V. A. Prokof'ev, Затухание слабых волн в излучающем газе,
Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., 1963, Volume 4, Issue 6, 42–49

ЗАТУХАНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

В. А. Прокофьев

(*Москва*)

В работе [1] на основании уравнений релятивистской радиационной гидродинамики [1] невязкого и нетеплопроводного газа получено частотное уравнение, описывающее распространение малых плоских возмущений заданной частоты в безграничной излучающей и поглощающей радиационную энергию среде. В настоящей работе исследуются корни частотного уравнения (2.6) * для некоторых случаев, представляющих самостоятельный интерес и дающих возможность проиллюстрировать роль радиации в процессах затухания и дисперсии волн давления. Вычисляются коэффициенты поглощения волн $\alpha_a{}^0$ на длине условной звуковой волны l_0, истинный коэффициент поглощения α_a на длине волны l, коэффициент поглощения α_τ на средней (по частотам определяющей поле радиации) длине свободного пробега радиации $1/\omega_0$ и коэффициент поглощения $\alpha_\alpha{}^1$ на единице длины, причем, очевидно,

$$\alpha_a^0 = 2\pi\,|\,m_r\,|, \qquad \alpha_\tau = |\,m_r\,|\,v, \qquad \alpha_a{}^1 = \alpha_\tau\omega_0 = \omega\,|\,m_r\,|/c_0, \tag{0.1}$$

$$\alpha_a = 2\pi\alpha_1 = 2\pi\frac{m_r}{m_i}, \qquad l_0 = \frac{2\pi c_0}{\omega}, \qquad l = \frac{2\pi c_a}{\omega}$$

Все рассмотренные в работе [1] предельные случаи волн давления были в нулевом приближении незатухающими и не обладающими дисперсией, а соответствующие корни частотного уравнения были чисто мнимыми. Здесь изучаются близкие к ним волны, которые обладают малыми истинными коэффициентами затухания и малой дисперсией; поэтому корни частотного уравнения представляются в виде ряда

$$m = \pm\, i m_0\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots) \tag{0.2}$$

где ε_k — малые величины порядка k, m_0 — главная часть разложения, вообще говоря комплексная величина. Функции g_n, через которые выражаются вариации радиационных параметров (2.4)*, могут быть представлены разложениями

$$g_n = A_n\,[g_n{}'^{(0)} + g_n{}'^{(1)}\varepsilon_1 + g_n{}'^{(11)}\varepsilon_1{}^2 + g_n{}'^{(2)}\varepsilon_2 + 2g_n{}'^{(11)}\,\varepsilon_1\varepsilon_2 +$$
$$+ g_n{}'^{(111)}\varepsilon_1{}^3 + g_n{}'^{(3)}\varepsilon_3 + \ldots] \tag{0.3}$$

Здесь

$$g_n{}'^{(k)} = \frac{1}{m_0} S\,\{g_n{}^{(k)}\} \qquad (n = 1, 2, 3, 4;\ k = 0, 1, 2, 11, 111, 3, \ldots) \tag{0.4}$$

$$A_1 = -\,2i, \qquad A_2 = \pm\,8, \qquad A_3 = 12i, \qquad A_4 = +\,4i \tag{0.5}$$

Подынтегральные функции $g_n{}^{(k)}$ имеют следующий вид:

$$g_1{}^{(0)} = a_0,\ \ g_1{}^{(1)} = -\,a_0 + a_1,\ \ g_1{}^{(11)} = a_0 - a_1 + a_{11},\ \ g_1{}^{(111)} = a_{111} - g_1{}^{(11)} \tag{0.6}$$

$$g_2{}^{(0)} = -\,i + p_\nu a_0, \qquad g_2{}^{(1)} = i - p_\nu\,(2a_0 - a_1), \qquad g_2{}^{(11)} = -\,i + p_\nu\,(3a_0 - 2a_1 + a_{11})$$
$$g_2{}^{(111)} = i - p_\nu\,(4a_0 - 3a_1 + 2a_{11} - a_{111}), \qquad p_\nu = {}^1/_2\,(w_\nu{}' + ic^\circ) \tag{0.7}$$

$$g_3{}^{(0)} = 2p_\nu g_2{}^{(0)}, \qquad g_3{}^{(11)} = 2p_\nu\,[-\,3i + p_\nu\,(6a_0 - 3a_1 + a_{11})] \tag{0.8}$$
$$g_3{}^{(1)} = 2p_\nu\,[2i - p_\nu\,(3a_0 - a_1)], \qquad g_3{}^{(111)} = 2p_\nu\,[4i - p_\nu\,(10a_0 - 6a_1 + 3a_{11} - a_{111})]$$

$$g_4{}^{(0)} = 1 - 12ip_\nu{}^2 g_2{}^{(0)}, \qquad g_4{}^{(1)} = -\,1 - 12ip_\nu{}^2\,[3i - p_\nu\,(4a_0 - a_1)] \tag{0.9}$$
$$g_4{}^{(11)} = 1 - 12i\,p_\nu{}^2\,[-\,6i + p_\nu\,(10a_0 - 4a_1 + a_{11})]$$
$$g_4{}^{(111)} = -\,1 - 12ip_\nu{}^2\,[10i - p_\nu\,(20a_0 - 10a_1 + 4a_{11} - a_{111})]$$

---

[1] Ссылки на формулы этой статьи будут указываться звездочкой.

В этих выражениях приняты следующие обозначения:

$$a_0 = \ln\frac{2p_\nu + i}{2p_\nu - i}, \qquad a_1 = \frac{4ip_\nu}{1+4p_\nu^2}, \qquad a_{11} = \frac{-4ip_\nu}{(1+4p_\nu^2)^2}$$
$$a_{111} = \frac{4ip_\nu}{3}\,\frac{3-4p_\nu^2}{(1+4p_\nu^2)^3}, \qquad w_\nu' = \frac{w_\nu}{m_0}, \qquad c^{\circ\prime} = \frac{c^\circ}{m_0} \tag{0.10}$$

Нетрудно видеть, что при любых значениях w_ν' и $c^{\circ\prime}$ все функции $w_\nu'\ g_i^{(k)}$ ограниченные по модулю; ограниченными в связи с этим будут и коэффициенты $g_n'^{(k)}$ в разложении (0.3). Для больших или малых значений w_ν' и $c^{\circ\prime}$ некоторые из этих коэффициентов будут малыми, что дает возможность сделать дальнейшие упрощения. Последнее обстоятельство не мешает в разложении корня в ряд по малым величинам считать эти величины просто порядка единицы и затем рассматривать как частный случай малые или большие значения w_ν' и $c^{\circ\prime}$. Только в общем разложении среди величин, которые определяются как малые n-го порядка, могут присутствовать и малые более высокого порядка.

Если m_0 действительное число, то, разделяя функции $g_n^{(0)}$ на действительную и мнимую части, получим

$$g_1^{(0)} = \lambda + i\mu, \tag{0.11}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{w_\nu^2 + (c^\circ + m_0)^2}{w_\nu^2 + (c^\circ - m_0)^2}, \qquad \mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{2w_\nu m_0}{w_\nu^2 + c^{\circ 2} - m_0^2}$$

$$g_2^{(0)} = \frac{1}{2}w_\nu'\lambda - \frac{c^{\circ\prime}}{2}\mu + i\left(-1 + \frac{1}{2}w_\nu'\mu + \frac{1}{2}c^{\circ\prime}\lambda\right)$$

$$g_3^{(0)} = c^{\circ\prime} + \frac{1}{2}(w_\nu'^2 - c^{\circ\prime 2})\lambda - c^{\circ\prime}w_\nu'\mu + i\left[-w_\nu' + c^{\circ\prime}w_\nu'\lambda + \frac{1}{2}(w_\nu'^2 - c^{\circ\prime 2})\mu\right]$$

$$g_4^{(0)} = 1 + 3(c^{\circ\prime 2} - w_\nu'^2) + \frac{3}{2}w_\nu'(w_\nu'^2 - 3c^{\circ\prime 2})\mu + \frac{3}{2}c^{\circ\prime}(3w_\nu'^2 - c^{\circ\prime 2})\lambda -$$
$$- 3i\left[2c^{\circ\prime}w_\nu' + \frac{1}{2}w_\nu'(w_\nu'^2 - 3c^{\circ\prime 2})\lambda + \frac{1}{2}c^{\circ\prime}(c^{\circ\prime 2} - 3w_\nu'^2)\mu\right]$$

§ 1. Волны большой оптической длины. В статье [1] было выяснено, что при $v_\nu = 0$ корень частотного уравнения чисто мнимый. Волны распространяются в этом случае с низкочастотной адиабатической скоростью звука, а коэффициент затухания равен нулю: в волне нет диссипации энергии. Затухание волн появится, если считать определяющие движение v_ν малыми, но отличными от нуля, причем далее будем считать, что порядок любой величины определяется входящими в их выражение величинами v_ν. Из (4.1)* следует, что главное значение m_0 корня m по порядку величины не превышает $1 + c^\circ$. Поэтому

$$v_\nu \ll 1, \quad |m|\,v_\nu \ll 1, \quad c^\circ v_\nu \ll 1, \quad |q_\nu| \ll 1 \tag{1.1}$$

В соответствии со сказанным предполагается также, что эти неравенства сохранятся, если вместо v_ν ввести число v_R, построенное по росселандову среднему из коэффициентов оптического поглощения:

$$v_R \ll 1, \quad |m|\,v_R \ll 1, \quad c^\circ v_R \ll 1, \quad v_R \equiv \omega/(c_0\omega_R) = S\{v_\nu^2\} \tag{1.2}$$

Числа v_ν малы, если частота колебаний мала, а коэффициент оптического поглощения не малая величина. Для газов функция ω_ν резко изменяется и имеются участки спектра, где $\omega_\nu = 0$; при отсутствии значительного сплошного спектра величину ω_ν нельзя считать малой величиной во всем спектре. Однако в этом случае все вошедшие в дисперсионное уравнение интегралы по частоте следует заменить суммами, распространенными на те участки спектра, где $\omega_{\nu_0} \neq 0$, так как выброшенные участки с нулевым поглощением вовсе не влияют на диссипацию энергии в волне, как видно из вывода дисперсионного уравнения. Следовательно, v_ν можно считать малой величиной, имея в виду, что учитываются лишь те оптические частоты, которые определяют поглощение радиации в среде. Если определять порядок малости только порядком малой величины v_ν или, соответственно, величины $[S\{v_\nu^{1+n}\}]^{1/n}$, то главный член разложения мнимой части корня частотного уравнения определится выражением (4.1) *, а главный член разложения действительной части в соответствии с предыдущим будет равен

$$\pm m_r = \frac{h_4 m_0 Z v_R}{6(h_4 + 12 e_3 \xi)(e_2 + 4\xi c^{\circ 2})} \left\{ \left[e_2 - h_1 m_0^2 - c^{\circ 2} \left(2h_2 + \frac{24}{5}\xi + \frac{2e_1}{e_3} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 3h_1 - \frac{3h_4}{5e_3} \right) \right] m_0^2 + c^{\circ 2} \left(24 c^{\circ 2} \xi + \frac{h_4 c^{\circ 2}}{e_3} + 3e_2 \right) \right\} \tag{1.3}$$

Отсюда и из выражения (4.1)* следует, что коэффициенты поглощения волн α_a^0, α_a^1, α_a при малых числах v_ν определяются росселандовым средним, как было замечено ранее [2]; в этом приближении коэффициенты оптического поглощения иначе не входят в выражение для корней уравнения. Физически это совершенно ясно, так как в случае малых значений v_ν в предположении о применимости закона Кирхгофа условия в среде близки к условиям равновесия среды и радиационного поля. А это как раз и есть случай применимости росселандова среднего при осреднении уравнения переноса радиации по частотам [3].

Коэффициенты поглощения на длине волны и на условной длине волны прямо пропорциональны частоте колебаний в волне и обратно пропорциональны коэффициенту поглощения радиации. Рассчитанный же на единицу длины коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты и обратно пропорционален коэффициенту поглощения радиации. Наконец, коэффициент поглощения на длине свободного пробега радиации есть величина второго порядка малости.

Для совершенного релятивистского газа частиц в радиационном поле выражение (1.3) примет вид

$$\pm m_r = \frac{2\gamma v_R \xi}{x m''} \frac{(x + \varphi + 0.6f - 6 - 4.8\xi - m''^2) m''^2 + 3(1 + x + \varphi) + f + 24\xi}{1 + f + 20\xi + 16\xi^2} \tag{1.4}$$

$$m'' = \frac{m_0}{c^\circ} = \frac{c}{c_{a0}} = \frac{1}{c_a^\circ}, \qquad m_0^2 = \frac{1+f}{fx} \frac{(f + 12\xi)(1 + x + \varphi + 4\xi)}{1 + f + 20\xi + 16\xi^2} \tag{1.5}$$

Истинный коэффициент поглощения волн отсюда получается в виде

$$\alpha_1 = \frac{2v_R \xi}{c^\circ} \frac{[\gamma - m_0^2 + (\varphi + 0.6f - 6 - 4.8\xi) c^{\circ 2}] m_0 + [(3 + 3\varphi + f + 24\xi) c^{\circ 2} + 3\gamma] c^{\circ 2}}{(f + 12\xi)[\gamma + (1 + \varphi + 4\xi) c^{\circ 2}]} \tag{1.6}$$

Для величин ξ, больших по сравнению с единицей и по сравнению со значениями x, получим:

$$\pm m_r = 0.4\sqrt{3}\, v_R c^{\circ 2}, \qquad \alpha_1 = 0.4 v_R c^\circ \tag{1.7}$$

При малых значениях c°

$$\pm m_r = \frac{8}{15} \frac{v_R}{c^\circ} \frac{(1 + 4\xi)^2 \xi \sqrt{1 + 8\xi}}{(1 + 8\xi + 6.4\xi^2)^{3/2}} \tag{1.8}$$

что при малых ξ дает

$$\pm m_r = \frac{8\xi v_R}{15 c^\circ} = \frac{Z v_R}{15} \tag{1.9}$$

В газе частиц с постоянными теплоемкостями

$$\alpha_1 = \frac{(\gamma - 1) FZv_R}{6 [1 + 12 (\gamma - 1) \xi] [\gamma (\gamma - 1) + \gamma c^{\circ 2} + 4 (\gamma - 1) \xi c^{\circ 2}]} \tag{1.10}$$

$$F \equiv \{3\gamma (\gamma - 1) + c^{\circ 2} [3\gamma + 1 + 24 (\gamma - 1) \xi]\} c^{\circ 2} +$$

$$+ \frac{[1 + 12 (\gamma - 1) \xi] [\gamma (\gamma - 1) + \gamma c^{\circ 2} + 4 (\gamma - 1) \xi c^{\circ 2}]}{[\gamma + 20 (\gamma - 1) \xi + 16 (\gamma - 1) \xi^2]^2} \{\gamma (\gamma - 1)^2 (1 + 4\xi)^2 +$$

$$+ c^{\circ 2} [6 (1.1 - \gamma) \gamma + 4 (\gamma - 1) (37 - 34.2\gamma) \xi +$$

$$+ 16 (\gamma - 1) (16.6 - 15\gamma) \xi^2 - 76.8 (\gamma - 1)^2 \xi^3]\}$$

Отсюда в предельных случаях получается

$$\xi \gg 1, \qquad \alpha_1 = 0.4 c^\circ v_R, \qquad m_r = 0.4 \sqrt{3}\, c^{\circ 2} v_R \tag{1.11}$$

$$c^\circ \ll 1, \qquad m_r = \frac{\gamma (\gamma - 1) (1 + 4\xi)^2 Zv_R \sqrt{\gamma [1 + 12 (\gamma - 1) \xi]}}{6 [\gamma + 20 (\gamma - 1) \xi + 16 (\gamma - 1) \xi^2]^{5/2}} \tag{1.12}$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma (\gamma - 1) (1 + 4\xi)^2 Zv_R}{6 [\gamma + 20 (\gamma - 1) \xi + 16 (\gamma - 1) \xi^2]^2}$$

$$c^\circ \ll 1, \qquad \xi \ll 1, \qquad m_r = \frac{(\gamma - 1) Zv_R}{6\gamma} = \alpha_1 \tag{1.13}$$

Из частотного уравнения видно, что все формулы этого параграфа справедливы в первом приближении, если

$$v_\nu \ll 1, \qquad Zv_R \ll 1 \tag{1.14}$$

§ 2. Волны малой оптической длины. Из характеристического уравнения получаются следующие достаточные условия распространения волн со скоростью, близкой к скорости высокочастотных акустических волн (2.1)

$$\xi c^\circ |mg_2| \ll 1 + c^{\circ 2}, \qquad \xi |mg_3| \ll 1 + c^\circ, \qquad \xi |mg_1| \ll 1 + c^\circ$$

$$\xi |mg_2| \ll c^\circ, \qquad \xi c^{\circ 2} |mg_3| \ll 1 + c^{\circ 3}, \qquad \xi |mg_4| \ll 1 + c^{\circ 2}$$

Здесь g_n можно заменить также на $A_n g_n'^{(0)}$. Если c° велико или порядка единицы, то эти неравенства принимают вид

$$\xi |mg_n| \ll c^\circ \qquad (n = 1, 2, 3, 4) \tag{2.2}$$

Неравенства (2.1) выполняются при любых ξ и c°, начиная с достаточно малых значений w_ν (например, начиная с достаточно больших частот механических колебаний). Но так как все функции $|g_n|$ ограниченные, то неравенства (2.1) выполняются также всегда (для любых частот) при достаточно малых значениях Z. Действительно, если Z мало, то неравенство (2.2) удовлетворяется, и оно достаточно для любых не малых значений c°. Если же c° мало, то при малых значениях Z мала и величина ξ и удовлетворяются все неравенства (2.1).

Таким образом, условие $Z \ll 1$ достаточно при любых значениях ξ и c° для того, чтобы волны распространялись со скоростью, близкой к адиабатической высокочастотной скорости звука. Но оно, как указано выше, не является необходимым.

Корень частотного уравнения при условиях (2.1) представится разложением (0.2), откуда в линейном приближении получается

$$
\begin{aligned}
m_r = \frac{1}{2\gamma h_1 h_4 m_0}\Big[\frac{\gamma-1}{\gamma} h_4 e_2 Z S\left\{1-\frac{w_\nu'}{2}\mu\right\} - 6\,(e_1+h_2e_3)\, m_0\xi\,\times \\
\times\, S\,\{w_\nu'\,(c^{\circ\prime}\mu - w_\nu'\lambda)\} + 2h_4 c^\circ \xi S\,\{2-6w_\nu'^2 + \\
+\,3w_\nu'\,(w_\nu'^2 - c^{\circ\prime 2})\,\mu + 6c^{\circ\prime} w_\nu'^2\lambda\}, \qquad m_0^2 = \frac{e_2}{\gamma h_1}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
m_i = m_0 + \frac{1}{2\gamma h_1 h_4 m_0}\Big(\frac{\gamma-1}{2\gamma} h_4 e_2 Z S\,\{w_\nu'\lambda\} - \\
-\,6m_0\xi\,(e_1+h_2e_3)\,S\,\{w_\nu'\,(2-c^{\circ\prime}\lambda - w_\nu'\mu)\} - \\
-\,6h_4c^\circ\xi S\,\{w_\nu'\,[2c^{\circ\prime} + (w_\nu'^2 - c^{\circ\prime 2})\,\lambda - 4c^{\circ\prime} w_\nu'\mu]\}\Big]
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Коэффициент затухания и малое отклонение скорости волн от высокочастотной скорости звука зависят сложным образом от частоты колебаний в волне. В частных случаях малых w_ν, ξ, c° или в случае больших значений c° эти выражения заменяются простыми формулами.

Если $\xi \ll 1$, то высокочастотная и низкочастотные скорости звука одинаковы, а неравенства (2.1) сводятся к следующим:

$$
Z\,|g_2| \ll 1, \qquad \xi \ll 1 \tag{2.5}
$$

Это выполняется, например, при любом значении Z для достаточно больших значений определяющих параметров w_ν. Но, кроме этого, неравенство (2.5) справедливо при любом значении w_ν для малых значений Z, в частности для всех газов, находящихся в состоянии, не очень сильно отличающемся от нормального. Корень частотного уравнения (2.3), (2.4) сохраняет свой вид, только теперь ξ малая величина. Когда c° мало, то условия (2.5) преобразуются к следующим:

$$
Z\,|a_{00}^{(0)}| \ll 1, \qquad \xi \ll 1, \qquad c^\circ \ll 1 \tag{2.6}
$$

а выражение (2.3) примет вид

$$
m_r = \frac{\gamma-1}{2\gamma} a_{00}^{(0)}, \qquad a_{00}^{(0)} = S\,\{1 - w_\nu \operatorname{arc\,ctg} w_\nu\} \tag{2.7}
$$

Это действительно, в частности, для малых значений Z, ξ, c°.

В качестве примера рассмотрим волны малой оптической длины. В случае $v_\nu \gg 1$ корень частотного уравнения в нулевом приближении чисто мнимый: волны незатухающие и распространяются с высокочастотной скоростью звука $c_{a\infty}$, как было установлено в § 5 статьи [1]. Следующее приближение определяет коэффициент затухания волн. Будем считать для определяющих движение частот $c^\circ v_\nu \gg 1$; кроме того, для для $\gamma < 2$ имеем $m_0 > c_0$. Разлагая функции $g_n'^{(k)}$ в ряды по w_ν, получим из (2.3) и (2.4)

$$
\begin{gathered}
\pm m = im_0 + \frac{m_0 w^{(1)}}{2e_2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} e_2 Z + 4c^\circ\xi\right) \\
m_0^2 = 1 + \frac{1+e_3}{\gamma h_1 e_3} c^{\circ 2}, \qquad w^{(1)} = \frac{1}{v^{(1)}} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega c_0} = S\,\{1\}
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

Коэффициент затухания волн на единице длины, как видно из (2.8), не зависит от частоты, коэффициенты затухания на условной и на истинной длинах волны обратно пропорциональны частоте. Все три коэффициента затухания зависят от коэффициентов оптического поглощения через параметры $w^{(1)}$, что совпадает с выводами работы [2]. Коэффициенты затухания волн α_a°, α_a', α_a прямо пропорциональны среднему коэффициенту поглощения радиации $\omega^{(1)}$. Коэффициент затухания на средней длине свободного пробега радиации $1/\omega^{(1)}$ не зависит ни от частоты колебаний в волне, ни от коэффициента поглощения излучения.

Итак, при $v_\nu \gg 1$ затухание волн давления определяется коэффициентом непрозрачности $\omega^{(1)}$, который представляет собою среднее по частотам радиации значение объемных коэффициентов оптического поглощения с той же весовой функцией $\partial B_\nu / \partial T$, что и обратная величина росселандова среднего.

Начиная с работ Стокса и Релея весьма распространено мнение, что в предельном случае очень малых частот инфразвуковые волны распространяются с изотермической (ньютоновской) скоростью звука $c_a = c_0 / \sqrt{\gamma}$; температура внутри длинной волны за счет теплопроводности, вязкости и радиационной теплопередачи успеет выравниться. Так в действительности и получается из гидродинамических уравнений, если учитывать только эмиссию радиационной энергии, теплопроводность и вязкость или любой из этих процессов в отдельности. Однако, если учесть еще и поглощение газом радиационной энергии, то и очень длинные волны оказываются распространяющимися с адиабатической (лапласовской) скоростью звука. В пределе очень больших частот скорость волны неограниченно растет под влиянием вязкости и теплопроводности [5,6]. В интервале частот, от очень малых до очень больших, в зависимости от физических свойств среды и ее состояния, как показано в работах [1,2,4], может существовать такой интервал частот, когда скорость волны постепенно изменяется от адиабатической до изотермической, а потом вновь приближается к адиабатической с ростом частоты.

§ 3. Изотермические волны. В случае невязкого и нетеплопроводного газа волны давления распространяются с ньютоновской скоростью звука, в частности, когда [1,2]

$$Z\,|b_0| \gg 1, \qquad \xi \leqslant o(1)$$

$$b_0 \equiv S\{1 - w_\nu' \operatorname{arc\,ctg} w_\nu''\} \qquad m_0 = \sqrt{\gamma} \tag{3.1}$$

Из первого неравенства следует, что число Z должно быть большой величиной, т. е. изотермические волны в невязкой и нетеплопроводной жидкости возможны лишь в том случае, если отношение энергии, излучаемой единицей массы газа за время прохождения волной средней длины свободного пробега определяющей радиациональный перенос тепла радиации к внутренней энергии единицы массы газа велико.

Физический смысл условия (3.1) следует из уравнения изменения внутренней энергии (1.5)*. Для наглядности перепишем его для малых c°, ξ для случая, когда внутренняя энергия единицы массы газа зависит только от температуры. Из (1.5) *, (0.2) в первом приближении при $m_0 = \sqrt{\gamma}$ получим

$$э' = h_4 T' = i h_4 Z b_0 T' - \sqrt{\gamma}\, e_3 M \tag{3.2}$$

Первый член справа есть приток тепла к единице объема газа за время $1/\omega$, отнесенный к внутренней энергии единицы объема невозмущенного газа. Второй член — работа сил давления при сжатии газа за время $1/\omega$. Пока $Z\,|b_0|$ мало — процесс сжатия и разрежения в волне адиабатический. Если же $Z|\,b_0\,|$ велико, то процесс близок к изотермическому. При $Z\,|b_0| = 0\,(1)$ происходит переход от адиабатического процесса к изотермическому при изменении этой величины от малых до больших значений. При больших значениях $Z\,|b_0|$ приток тепла за счет радиационного теплообмена к единице объема газа за период колебаний в волне уравновешивает выделившееся при сжатии газа в волне тепло: температура всей среды остается неизменной. Выделившееся тепло за период колебаний радиационным теплообменом успевает передаться окружающей среде. Волны будут распространяться с изотермической скоростью звука.

Условию (3.1) в только что рассмотренной постановке задачи можно придать и несколько иной смысл. Пусть в результате сжатия газа в волне температура увеличилась на $T_0 T'$. Если бы сжатие было адиабатическим, то внутренняя энергия единиц объема газа увеличилась бы на величину, равную $\rho_0 \vartheta_0 h_4 T'$. Но в результате радиационной теплопередачи единица объема газа теряет количество тепловой энергии в единицу времени, равное $16\, \pi B_0 \omega_0 b_0 T' \,/\, \sqrt{\gamma}$. Время θ_R, необходимое для того, чтобы радиационной теплопередачей весь прирост энергии за счет адиабатического сжатия был передан окружающей среде, определяется отсюда соотношением: $\theta_R^{-1} = Z\,|\,b_0\,|\,\omega$. Следовательно, неравенство (3.1) равносильно неравенству $\theta_R \ll \theta$, где $\theta = 2\pi \,/\, \omega$ — период колебаний в волне.

Условия (3.1) и в общем случае не малых значений ξ (при этом c° мало, так как число Z велико), как видно из (1.5) *, (0.2), сохраняют указанный физический смысл. В случае предельно малых частот, когда оптическая длина волны большая, внутри волны за период колебаний успевает установиться равновесие между радиационным полем и газом. Волны давления распространяются с низкочастотной адиабатической скоростью звука. При очень больших частотах колебаний, когда оптическая длина волны становится очень малой величиной, внутри волны единственный диссипативный процесс, который здесь рассматривается — радиационный теплообмен — не успевает передать тепло окружающей среде, а также не успевает измениться концентрация фотонов. Волны распространяются с высокочастотной скоростью звука. Радиационный теплообмен обусловливает слабое затухание и слабую дисперсию волн в этих случаях. Решение частотного уравнения при условиях (3.1) представится в виде ряда (0.2), где (3.3)

$$i\varepsilon_1 = \frac{1}{2\gamma h_1 h_4 Z b_0}\{\gamma(\gamma-1)\,h_1 h_4 + 48\,h_4 e_3 \xi^2 b_0 b_5 + 12\,(e_1 + h_2 e_3)\sqrt{\gamma}\,\xi b_4 + 144\,e_3 \xi^2 b_4^2\}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Phi_1 \varepsilon_1 + \Phi_2 c^{\circ\prime}}{2\gamma h_1 h_4 Z b_0} \qquad (3.4)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - 5\gamma)\,\gamma h_1 h_4 + 24 e_3 \xi^2 b_0 (7b_5 - 6b_3) + 6\xi b_4\,[\sqrt{\gamma}\,(e_1 + h_2 e_3) +$$
$$+ 12 e_3 \xi\,(7b_4 - 4b_3)] - 12\sqrt{\gamma}\,\xi b_3 (e_1 + h_2 e_3 + 2h_1 e_3) +$$
$$+ (\sqrt{\gamma}\,h_2 + 12\xi b_4)(\sqrt{\gamma}\,e_1 + 12 e_3 \xi b_4)\,\frac{b_2}{b_0}$$

$$\Phi_2 = 12\xi\,\{[e_3 e_4 + (e_1 + h_2 e_3)\sqrt{\gamma} + 12 e_3 \xi b_3]\, b_0 +$$
$$+ \left(\frac{1}{3}\sqrt{\gamma}\,h_4 + 4 e_3 \xi b_3\right) b_5 - [(e_1 + h_2 e_3)\sqrt{\gamma} + 24 e_3 \xi b_4]\, b_2\}$$

$$b_1 = S\,\{\operatorname{arc\,ctg} w_\nu'\}, \qquad b_2 = S\,\{(1 + w_\nu'^2)^{-1}\}$$
$$b_3 = S'\,\{w_\nu'\,(1 + w_\nu'^2)^{-1}\} \qquad b_4 = S\,\{w_\nu'\,(1 - w_\nu' \operatorname{arc\,ctg} w_\nu')\} \qquad (3.5)$$
$$b_5 = S\,\{1 - 3w_\nu'^2\,(1 - w_\nu' \operatorname{arc\,ctg} w_\nu')\}$$

Отсюда видно, что коэффициент затухания сложным образом зависит от частоты колебаний в волне. Зависимость скорости волн от частоты войдет лишь в члены, содержащие величины второго порядка малости относительно $(Z|b_0|)^{-1}$ и c°.

Если радиационное давление мало по сравнению с газовым, то с точностью до членов второго порядка малости по $(Z|b_0|)^{-1}$, c°, ξ

$$m = \pm\sqrt{\gamma}\left(i + \frac{\gamma - 1}{2Zb_0}\right) \qquad (3.6)$$

что совпадает с формулой (4.7) статьи [2][1].

[1] В статье [2] имеются опечатки: в правых частях перед вторыми членами вместо множителя 2 должен стоять множитель $1/2$, в формуле (4.6) и множитель $1/2\sqrt{\gamma}$ в формуле (4.7).

Когда в определяющих радиационный перенос оптических частотах $v_\nu \gg 1$, то по-прежнему, как видно из выражения (3.3), главное значение зависящих от коэффициентов оптического поглощения членов сводится к введению числа Бугера, построенного по среднему арифметическому с весом $\partial B_\nu / \partial T$ коэффициенту непрозрачности.

В случае преобладания малых величин v_ν дело сводится к введению росселандова среднего.

Неравенство (3.1) в этих случаях равноценно следующим:

$$Zw^{(1)} \gg 1, \quad v_\nu \gg 1; \qquad Zv_R \gg 1, \quad v_\nu \ll 1 \tag{3.7}$$

Условия (3.7) требуют, чтобы в случае волн давления очень малой оптической длины для определяющих радиационный перенос оптических частот отношение излучаемой единицей массы газа радиационной энергии за период колебаний в волне к общему количеству изменяемой части внутренней термической энергии в единице массы газа было большим. Вторые условия (3.7) требуют, чтобы в случае волн очень большой оптической длины отношение потока тепла за счет радиационной теплопроводности к общему конвективному потоку энергии было большим.

При малых ξ формула (3.6) примет вид

$$m = \pm \sqrt{\gamma}\left(i + \frac{\gamma - 1}{2Zw^{(1)}} + \ldots\right), \qquad v_\nu \gg 1 \tag{3.8}$$

$$m = \pm \sqrt{\gamma}\left(i + \frac{3(\gamma - 1)}{2\gamma Zv_R} + \ldots\right), \qquad v_\nu \ll 1 \tag{3.9}$$

Можно было бы легко учесть действие вязкости и теплопроводности, как это сделано в статье [2].

Считая введенное в работе [2] число X малым, а число Θ порядка не выше единицы, убеждаемся, что в линейном приближении число Θ не войдет вовсе, а в правые части выражения (3.3), (3.6), (3.8) и (3.9) добавится выражение $^1/_2\gamma X$.

Поступила 30 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. Скорость слабых волн в излучающем газе. ПМТФ, 1963, № 3, стр. 11—19.
2. Прокофьев В. А. Распространение вынужденных плоских волн сжатия малой амплитуды в вязком газе с учетом собственного радиационного поля. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2, стр. 18—33.
3. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure. The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1939. (Русск. пер. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, 1950).
4. Прокофьев В. А. Учет излучения в гидродинамической теории распространения плоских вынужденных волн бесконечно малой амплитуды. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем. механ., астрон., химии, 1957, № 6, стр. 7—16.
5. Truesdell C. Precise theory of the absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier-Stokes equations. J. Rational Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, No 4.
6. Прокофьев В. А. Поглощение и дисперсия слабых вынужденных волн очень малой и очень большой частоты под влиянием радиационного переноса тепла. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 12, стр. 15—23.