

МЕТОД РАССЛОЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ
ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧАХ

Ю. А. Давыдов, М. А. Лифшиц

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач теории вероятностей является изучение распределений функционалов, определенных на траекториях случайного процесса. Если процесс задан в виде меры P в функциональном пространстве X , то эта задача сводится к изучению меры Pf^{-1} , где f — измеримое отображение X в R^1 .

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы познакомить читателя с рядом результатов, полученных в этом направлении в течение нескольких последних лет с помощью так называемого метода расслоений. Эти результаты относятся в основном к следующим вопросам: существование плотности у распределения Pf^{-1} , существование ограниченной плотности и локальные предельные теоремы для $P_n f^{-1}$, когда P_n слабо сходятся к предельной мере.

В первой главе приводятся необходимые сведения из теории случайных процессов и дается общее описание метода расслоений.

Вторая глава посвящена функционалам от гауссовских процессов. Здесь устанавливается абсолютная непрерывность распределений гладких функционалов (в частности — функционалов интегрального типа) и выпуклых функционалов (в частности — функционалов типа супремума). Приводятся также достаточные условия для существования ограниченной плотности у распределений функционалов интегрального типа.

В третьей главе аналогичные вопросы рассматриваются для функционалов от процессов с независимыми приращениями.

Результаты о предельном поведении распределений $P_n f^{-1}$ собраны в четвертой главе. Здесь получена сходимости по вариации этих распределений к предельному в случае, когда рассматриваемые процессы — гауссовские, а также, если P_n — меры, отвечающие случайным ломаным, построенным по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин.

Наконец, в пятой главе изучаются функционалы от одномерных диффузионных процессов.

Авторы признательны Н. В. Смородиной, написавшей пятую главу, а также С. С. Валландеру, критические замечания которого способствовали улучшению рукописи. Авторы благодарят также И. А. Ибрагимова за постоянное внимание и поддержку.

Приведем несколько обозначений, используемых в дальнейшем.

$\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ — основное вероятное подпространство;

$\mathbf{P}f^{-1}$ — образ меры \mathbf{P} при отображении f ;

$\mathcal{P}_\xi = \mathbf{P}\xi^{-1}$ — распределение случайного элемента ξ ;

A^c — дополнение к A ;

$A^0, A^-, \partial A$ — соответственно внутренность, замыкание и граница A ;

$A \Delta B$ — симметрическая разность A и B ;

\mathfrak{B}_X — σ -алгебра борелевских подмножеств X ;

\mathfrak{B}^m — σ -алгебра борелевских подмножеств R^m ;

λ^m — мера Лебега в R^m ;

\mathbf{P}_B — сужение меры \mathbf{P} на множество B : $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \cap B)$ (например, $\mathbf{P}_{Y,B}^n$ обозначает сужение меры \mathbf{P}_Y^n на B);

\ll — знак абсолютной непрерывности одной меры относительно другой;

ω_x — модуль непрерывности функции x : $\omega_x(h) = \sup_{|s-t| \leq h} |x(s) - x(t)|$;

$\text{Ker } L$ — ядро линейного отображения L ;

C — константы;

■ — знак окончания доказательства.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Случайные процессы

Под случайным процессом, определенным на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ и параметрическом множестве T , мы понимаем, как обычно, семейство случайных величин (ξ_t) , $t \in T$. Для значения процесса ξ в точке t , наряду с записью ξ_t , будет также использоваться $\xi(t)$, а в тех случаях, когда надо подчеркнуть зависимость от ω — $\xi(t, \omega)$.

Если траектории процесса ξ с вероятностью 1 принадлежат функциональному пространству $X \subset R^T$, то мера \mathcal{P}_ξ — распределение процесса ξ — определена на (X, \mathfrak{B}_X) . Измеримое отображение $f: X \rightarrow R^1$ определяет случайную величину $\omega \rightarrow f(\xi(\omega))$.

называемую функционалом от процесса ξ . Распределение этой случайной величины, очевидно, совпадает с мерой $\mathcal{P}_\xi t^{-1}$ и, тем самым, однозначно определяется распределением процесса. Поэтому можно отвлечься от природы меры \mathcal{P}_ξ и рассматривать задачу изучения распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ в ситуации, когда \mathbf{P} — некоторая вероятностная мера в пространстве X .

Основными пространствами, рассматриваемыми ниже, являются: $\mathbf{C}(T)$ — пространство непрерывных функций на компакте T с равномерной нормой; $\mathbf{D}[0, 1]$ — пространство функций, непрерывных справа, имеющих пределы слева в каждой точке, снабженное метрикой d_0 Скорохода (см. [2, с. 153]); $L^p(T, \mathfrak{F}, \tau)$ — пространство (классов эквивалентности) функций, интегрируемых с p -й степенью ($p \geq 1$) по мере τ , с нормой $\|h\|_p = (\int_T |h|^p d\tau)^{1/p}$.

Нам понадобятся некоторые характеристики случайных процессов и вероятностных мер. Если $\forall t \in T \xi_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, то функция $t \rightarrow a_t = E\xi_t$ называется средним значением процесса ξ . Если $\forall t \in T \xi_t \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, то корреляционная функция процесса ξ определяется равенством $K(s, t) = E(\xi_s - a_s)(\xi_t - a_t)$. Пусть \mathbf{P} — вероятностная мера в линейном топологическом пространстве X . Обозначим через X^* пространство, сопряженное к X и снабженное слабой-* топологией, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — билинейную форму, приводящую X и X^* в двойственность. Средним значением меры \mathbf{P} называется такой элемент $a_{\mathbf{P}} \in X$, что $\forall x^* \in X^*$

$$\langle a_{\mathbf{P}}, x^* \rangle = \int_X \langle x, x^* \rangle \mathbf{P}(dx).$$

Корреляционный оператор меры \mathbf{P} — это такой линейный оператор $K_{\mathbf{P}}: X^* \rightarrow X$, что $\forall x^*, y^* \in X^*$

$$\langle K_{\mathbf{P}}x^*, y^* \rangle = \int_X \langle z - a_{\mathbf{P}}, x^* \rangle \langle z - a_{\mathbf{P}}, y^* \rangle \mathbf{P}(dz).$$

Характеристическим функционалом меры \mathbf{P} называется отображение $\Psi_{\mathbf{P}}$ пространства X^* в множество комплексных чисел, определяемое равенством

$$\Psi_{\mathbf{P}}(x^*) = \int_X \exp\{i \langle x, x^* \rangle\} \mathbf{P}(dx).$$

Линейный носитель $N_{\mathbf{P}}$ меры \mathbf{P} определяется как наименьшее замкнутое аффинное многообразие X , для которого $\mathbf{P}(N_{\mathbf{P}}) = 1$. Топологический носитель $\text{supp } \mathbf{P}$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество X , для которого $\mathbf{P}(\text{supp } \mathbf{P}) = 1$.

§ 2. Сходимость вероятностных мер

Слабая сходимость. Теория слабой сходимости подробно изложена в [2]. Напомним некоторые определения и приведем несколько менее известных, но важных для наших целей результатов.

Последовательность вероятностных мер (P_n) , определенных на σ -алгебре \mathfrak{B}_X борелевских подмножеств метрического пространства X , называется слабо сходящейся к мере P , если для любой непрерывной ограниченной функции h на X $\int_X h dP_n \rightarrow \int_X h dP$. Слабая сходимость обозначается символом \Rightarrow .

Если последовательность случайных элементов ξ_n пространства X сходится по вероятности к ξ , то $\mathcal{P}_{\xi_n} \Rightarrow \mathcal{P}_{\xi}$.

Утверждение о слабой сходимости P_n к P эквивалентно следующему: для любого P -почти всюду непрерывного функционала $f: X \rightarrow R^1$ $P_n f^{-1} \Rightarrow P f^{-1}$.

Справедлив и несколько более общий результат. Пусть h_n и h — измеримые отображения X в сепарабельное метрическое пространство Y . Пусть X_0 — множество тех x , для которых соотношение $h_n(x_n) \rightarrow h(x)$ не выполняется для какой-нибудь последовательности (x_n) , сходящейся к x .

Теорема 2.1. Если $P_n \Rightarrow P$ и $P(X_0) = 0$, то $P_n h_n^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$.

Доказательство см. [2, с. 53].

Следствие 1. Пусть $Y = R^1$ (или R^m), а h_n, h ограничены одной и той же постоянной. Если $P_n \Rightarrow P$ и $P(X_0) = 0$, то

$$\int_X h_n dP_n \rightarrow \int_X h dP.$$

Теорема 2.2. Предположим, что X сепарабельно. Пусть (f_θ) — семейство действительных функций на X , равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в каждой точке из множества P -полной меры. Тогда из $P_n \Rightarrow P$ следует, что равномерно по θ

$$\int_X f_\theta dP_n \rightarrow \int_X f_\theta dP.$$

Доказательство см. [60, теорема 1; 68].

Следствие 2. Пусть h — измеримое отображение сепарабельного пространства X в банахово пространство $(B, \|\cdot\|)$. Предположим дополнительно, что h ограничено по норме и P -почти всюду непрерывно. Тогда из $P_n \Rightarrow P$ следует, что

$$\left\| \int_X h dP_n - \int_X h dP \right\| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Надо применить теорему 2.2 к семейству $\{h_{y^*}\}$, $\|y^*\|_* \leq 1$; $h_{y^*}(x) = \langle h(x), y^* \rangle$ ■

Сходимость по вариации. Пусть μ — конечный заряд (знакопеременная мера) на \mathfrak{X} . Вариацией заряда μ называется мера $|\mu|$, определяемая равенством:

$$|\mu|(A) = \sup_{(A_n)} \sum_n |\mu(A_n)|,$$

где точная верхняя грань берется по всем счетным разбиениям (A_n) . Величина $\|\mu\| = |\mu|(X)$ называется полной вариацией заряда μ .

Любой конечный заряд μ допускает разложение Хана: существуют две конечные меры μ^+ , μ^- такие, что $\mu = \mu^+ - \mu^-$ и для некоторого измеримого множества A $\mu^+(A) = \mu^-(A^c) = 0$. Тогда $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Сходимость по норме банахова пространства всех конечных зарядов μ на \mathfrak{X} с нормой $\|\mu\|$ называется сходимостью по вариации или сильной сходимостью и обозначается символом \rightarrow .

Отметим два свойства полной вариации.

1. Если заряд μ абсолютно непрерывен относительно меры ν и $h = \frac{d\mu}{d\nu}$, то $\|\mu\| = \int |h| d\nu$.

2. Предположим, что $\mu_n \ll \nu$, $\mu \ll \nu$ и $h_n = \frac{d\mu_n}{d\nu}$, $h = \frac{d\mu}{d\nu}$, ν — мера. Тогда сходимость $\mu_n \xrightarrow{\text{var}} \mu$ эквивалентна сходимости h_n к h в норме пространства $L^1(X, \mathfrak{X}, \nu)$. В частности, сходимость по вариации абсолютно непрерывных (по мере Лебга) вероятностных распределений в R^n эквивалентна сходимости в среднем их плотностей.

§ 3. Формула полной вероятности

Пусть (X, \mathfrak{B}) — измеримое пространство, \mathbf{P} — вероятностная мера на \mathfrak{B} ; Γ — разбиение пространства X на непересекающиеся подмножества γ . Факторпространство, элементами которого служат подмножества γ , обозначим X/Γ .

Пусть $\pi: X \rightarrow X/\Gamma$ — каноническая проекция, сопоставляющая каждому $x \in X$ тот элемент разбиения, которому принадлежит x . Снабдим факторпространство σ -алгеброй $\mathfrak{B}_{X/\Gamma}$, состоящей из таких множеств $A \subset X/\Gamma$, для которых $\pi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$. На измеримом пространстве $(X/\Gamma, \mathfrak{B}_{X/\Gamma})$ возникает фактормера $\mathbf{P}_\Gamma = \mathbf{P}\pi^{-1}$.

Наконец, в (X, \mathfrak{B}) возникает σ -подалгебра \mathfrak{B}^Γ , состоящая из множеств вида $\pi^{-1}(A)$, $A \in \mathfrak{B}_{X/\Gamma}$.

Система вероятностных мер $\{\mathbf{P}_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, определенных на \mathfrak{B} , называется системой условных мер для меры \mathbf{P} относительно разбиения Γ , если для любого $B \in \mathfrak{B}$ функция $\gamma \rightarrow \mathbf{P}_\gamma(B)$ измерима относительно $\mathfrak{B}_{X/\Gamma}$ и для любого $A \in \mathfrak{B}_{X/\Gamma}$

$$\mathbf{P}(B \cap \pi^{-1}(A)) = \int_A \mathbf{P}_\gamma(B) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma). \quad (3.1)$$

Иными словами, функция $\mathbf{P}_{\pi(\cdot)}(B)$ является вариантом условной вероятности $\mathbf{P}(B | \mathfrak{B}^\Gamma)$.

При $A = X/\Gamma$ формула (3.1) превращается в формулу полной вероятности

$$\mathbf{P}(B) = \int_{X/\Gamma} \mathbf{P}_\gamma(B) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma). \quad (3.2)$$

Если g — интегрируемая функция, заданная на пространстве $(X, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$, то из (3.2) следует равенство

$$\int_X g(x) \mathbf{P}(dx) = \int_{X/\Gamma} \int_X g(x) \mathbf{P}_\gamma(dx) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma), \quad (3.3)$$

причем (3.2) является частным случаем (3.3) при $g = 1_B$. С другой стороны, если $f: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A})$ — измеримое отображение, то $\forall A \in \mathfrak{A}$

$$\mathbf{P} f^{-1}(A) = \int_{X/\Gamma} \mathbf{P}_\gamma f^{-1}(A) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma). \quad (3.4)$$

Меры $\mathbf{P}_\gamma f^{-1}$, заданные на пространстве (Y, \mathfrak{A}) , называются условными распределениями функционала f относительно меры \mathbf{P} и разбиения Γ .

Предположим теперь, что X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_X$ — борелевская σ -алгебра. Пусть Γ — разбиение на прообразы точек при некотором измеримом отображении (X, \mathfrak{B}_X) в полное сепарабельное метрическое пространство. Такое разбиение будем называть измеримым. Для измеримого разбиения система условных мер существует. С точностью до множества \mathbf{P}_Γ -меры нуль-условная мера единственна и сосредоточена на $\pi^{-1}(\gamma)$ (см. [45, 38 (с. 259—261)]).

Перейдем к изучению свойств системы условных мер. Сначала сформулируем аналог (3.4) для плотностей распределений функционалов. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — измеримое отображение, μ — мера на Y . Предположим, что существует такая функция $(\gamma, y) \rightarrow p_\gamma(y)$, измеримая по паре переменных и такая, что при $\gamma \in X/\Gamma$

$$p_\gamma(y) = \frac{d\mathbf{P}_\gamma f^{-1}}{d\mu}(y).$$

Тогда функция

$$p(y) = \int_{X/\Gamma} p_\gamma(y) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma) \quad (3.5)$$

является плотностью меры $\mathbf{P} f^{-1}$ по мере μ . Соотношение (3.5) позволяет из информации о плотностях условных распределений p_γ извлечь информацию о плотности распределения функ-

ционала f . На протяжении следующих глав именно формула (3.5) будет служить исходным инструментом исследования.

Следующее утверждение выражает независимость функционала f от σ -алгебры \mathfrak{B}^Γ в терминах условных распределений.

Теорема 3.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — борелевский функционал со значениями в сепарабельном метрическом пространстве Y . Если Γ — измеримое разбиение X , то для того чтобы f был независимым от \mathfrak{B}^Γ , необходимо и достаточно, чтобы $P_\gamma f^{-1} = P f^{-1}$ для P_Γ -почти всех $\gamma \in X/\Gamma$.

Предположим теперь, что на \mathfrak{B}_X заданы две меры P и Q , $Q \ll P$. Тогда, очевидно, $Q_\Gamma \ll P_\Gamma$. Укажем связь между P_γ и Q_γ .

Теорема 3.2. При P_Γ -почти всех γ $Q_\gamma \ll P_\gamma$ и

$$\frac{dQ_\gamma}{dP_\gamma}(x) = \frac{dQ}{dP}(x) \left[\frac{dQ_\Gamma}{dP_\Gamma}(\pi(x)) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

для P_γ -почти всех x .

Замечание 1. Верно и обратное: если $Q_\Gamma \ll P_\Gamma$, $Q_\gamma \ll P_\gamma$ для P_Γ -почти всех γ , то $Q \ll P$. Формулу (3.6) следует понимать в том смысле, что правая часть является одним из вариантов

плотности $\frac{dQ_\gamma}{dP_\gamma}$.

Приведем еще выражение для расстояния по вариации между двумя мерами в терминах условных мер. Пусть P, Q — меры на X ; $\{P_\gamma\}, \{Q_\gamma\}$, P_Γ, Q_Γ — соответствующие системы условных мер и фактормеры. Тогда

$$\|P - Q\| = \int_{X/\Gamma} \left\| P_\gamma \frac{dP_\Gamma(\gamma)}{d(P_\Gamma + Q_\Gamma)} - Q_\gamma \frac{dQ_\Gamma(\gamma)}{d(P_\Gamma + Q_\Gamma)} \right\| (P_\Gamma + Q_\Gamma)(d\gamma). \quad (3.7)$$

В частности, если $P_\Gamma = Q_\Gamma$, то

$$\|P - Q\| = \int_{X/\Gamma} \|P_\gamma - Q_\gamma\| P_\Gamma(d\gamma). \quad (3.8)$$

Соотношение (3.7) легко получить, пользуясь разложением Хана.

§ 4. Метод расслоений

Общая схема. Метод расслоений предназначен для изучения распределений функционалов от случайных процессов с помощью формулы полной вероятности. При этом основная идея заключается в том, что рассматриваются измеримые разбиения, элементы которых устроены достаточно просто. Во всех наших рассмотрениях элементы разбиения будут конечномерными (как правило, одномерными) множествами. При традиционном использовании формулы полной вероятности, наоборот, конечномерным оказывается факторпространство, а элементы

разбиения имеют сложную структуру, что затрудняет изучение условных мер. Неудивительно, что существует ряд задач, в которых метод расслоений дает лучшие результаты, чем традиционный подход.

Общая схема метода такова. Случайный процесс рассматривается как мера \mathbf{P} , заданная на полном сепарабельном метрическом пространстве (X, \mathfrak{B}_X) , точками которого являются траектории процесса. Пусть $f: (X, \mathfrak{B}_X) \rightarrow (R^m, \mathfrak{B}^m)$ — измеримый функционал со значениями в евклидовом пространстве R^m . Изучение его распределения — меры $\mathbf{P}f^{-1}$ на \mathfrak{B}^m — проводится в три этапа.

На первом этапе подбирается такое измеримое разбиение Γ , чтобы проще было изучить условные меры \mathbf{P}_γ . Для этого элементы разбиения γ выбираются как множества простой структуры — прямые линии, лучи, отрезки, гладкие кривые, d -мерные плоскости и т. д. Обычно их удается подобрать таким образом, чтобы вдоль каждого γ функционал f был гладкой функцией, и его производная не вырождалась.

На втором этапе изучается отображение функционалом f условных мер \mathbf{P}_γ . Соответствующая конечномерная задача хорошо изучена (известные результаты приведены ниже). Итог второго этапа — информация об условных распределениях $\mathbf{P}_\gamma f^{-1}$, которые являются образами \mathbf{P}_γ при отображении f .

На третьем этапе оценивается фактормера \mathbf{P}_Γ и с помощью формулы (3.4) информация, полученная на втором этапе, перерабатывается в информацию о $\mathbf{P}f^{-1}$. Если нас интересуют свойства плотности распределения $\mathbf{P}f^{-1}$, то вместо (3.4) можно использовать (3.5):

Метод расслоений был впервые использован в [15—19] и получил дальнейшее развитие и применения в [28—33, 53—55].

Наша ближайшая цель — построить широкий класс разбиений, отвечающих требованиям метода расслоений, и изучить возникающие условные меры.

Допустимые полугруппы. Пусть $(X, \mathfrak{B}_X, \mathbf{P})$ — метрическое пространство с мерой. Измеримое отображение $G: X \rightarrow X$ будем называть допустимым, если $\mathbf{P}G^{-1} \ll \mathbf{P}$.

Определение. Семейство отображений $\{G_c\}$, $c \in R_+^m$, назовем допустимой полугруппой, если 1) G_0 — тождественное отображение; 2) $G_{c_1} \circ G_{c_2} = G_{c_1+c_2}$; 3) при всех c отображение G_c допустимо и взаимно однозначно; 4) при любом x отображение $c \rightarrow G_c(x)$ взаимно однозначно.

Будем говорить, что $x_1, x_2 \in X$ эквивалентны ($x_1 \sim x_2$), если при некоторых $c_1, c_2 \in R_+^m$

$$G_{c_1}(x_1) = G_{c_2}(x_2).$$

Пусть Γ — разбиение, порожденное введенным отношением эквивалентности, $\pi: X \rightarrow X/\Gamma$ — каноническая проекция. Множе

ства вида $\pi^{-1}(\gamma)$, $\gamma \in X/\Gamma$, состоящие из эквивалентных точек, назовем орбитами. Орбиты инвариантны относительно G_c .

Лемма 4.1. Пусть $x_1 \sim x_2$. Тогда существует единственное $c(x_1, x_2) \in R^m$, такое, что если $G_{c_1}(x_1) = G_{c_2}(x_2)$, то $c_1 = c_2 + c(x_1, x_2)$.

Лемма 4.2. Пусть $\pi^{-1}(\gamma)$ — орбита полугруппы, $x \in \pi^{-1}(\gamma)$. Тогда отображение $J_x: y \rightarrow c(x, y)$ дает взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(\gamma)$ и некоторым множеством $C_x \subset R^m$, причем действие полугруппы $\{G_c\}$ на $\pi^{-1}(\gamma)$ переходит в действие полугруппы сдвигов на C_x :

$$J_x G_c(y) = J_x(y) + c. \quad (4.1)$$

Отметим, что изменение исходной точки x в пределах орбиты приводит только к линейному изменению J_x и сдвигу множества C_x :

$$J_{x_1}(\cdot) = J_{x_2}(\cdot) + c(x_1, x_2), \quad (4.2)$$

$$C_{x_1} = C_{x_2} + c(x_1, x_2). \quad (4.3)$$

Помимо выполнения алгебраических и теоретико-множественных условий 1—4, в дальнейшем будет предполагаться выполнение топологического условия:

5. Условие непрерывности: J_x является гомеоморфизмом, если на $\pi^{-1}(\gamma)$ рассматривать топологию, унаследованную из X .

Пусть λ^m — мера Лебега в R^m . Тогда на \mathfrak{B}_X можно определить меру λ_γ соотношением

$$\lambda_\gamma(B) = \lambda^m(J_x(B \cap \pi^{-1}(\gamma))). \quad (4.4)$$

Заметим, что, в силу (4.2), значение λ_γ не зависит от того, какое $x \in \pi^{-1}(\gamma)$ используется в (4.4). Мера λ_γ сосредоточена на $\pi^{-1}(\gamma)$.

Пусть $B \in \mathfrak{B}_X$, $c \in R_+^m$. Тогда $G_c^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_X$ и

$$G_c^{-1}(B) \cap \pi^{-1}(\gamma) = G_c^{-1}(B \cap \pi^{-1}(\gamma)), \quad (4.5)$$

поскольку $\pi^{-1}(\gamma)$ инвариантно относительно G_c . Кроме того, в силу (4.1),

$$c + J_x G_c^{-1}(\cdot) = J_x(\cdot).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_\gamma(G_c^{-1}(B)) &= \lambda^m(J_x(G_c^{-1}(B) \cap \pi^{-1}(\gamma))) = \\ &= \lambda^m(J_x(B \cap \pi^{-1}(\gamma)) - c) = \lambda_\gamma(B). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенство (4.6) устанавливает, что мера λ_γ инвариантна относительно действия полугруппы G_c .

Вычисление условных мер. Предположим теперь дополнительно, что X полно и сепарабельно, а Γ — измеримое разбиение на орбиты полугруппы $\{G_c\}$. Тогда определена система условных мер $\{P_\gamma\}$. Положим $P^c = P G_c^{-1}$. В силу допустимости

полугруппы $P^c \ll P$. Пусть $p^c = \frac{dP^c}{dP}$ — соответствующая плотность.

Теорема 4.1. Пусть Γ — измеримое разбиение полного сепарабельного метрического пространства X на орбиты допустимой полугруппы $\{G_c\}$, $c \in R_+^m$, удовлетворяющей условию непрерывности. Тогда при P_Γ -почти всех γ условная мера P_γ абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры λ_γ , и плотность может быть вычислена по формуле

$$\frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(G_u(x)) = K_\gamma [p^\mu(G_u(x))]^{-1} \quad (4.7)$$

для P_γ -почти каждого x . Нормирующий множитель K_γ постоянен на γ .

Замечание 1. В этой теореме X можно заменить на любое открытое множество $V \subset X$, так как изменением метрики оно может быть превращено в полное сепарабельное пространство. При этом надо считать, что отображения G_c действуют из V в V .

Доказательству теоремы предположим критерий абсолютной непрерывности мер в R^m в терминах сдвигов мер.

Лемма 4.3. Пусть μ — конечная мера на (R^m, \mathfrak{B}^m) , U — множество положительной меры Лебега λ^m . Пусть $\mu^u(\cdot) = \mu(\cdot - u)$, — сдвинутая мера, и при почти всех $u \in U$ $\mu^u \ll \mu$. Тогда $\mu \ll \lambda^m$ и плотность M меры μ относительно λ^m при μ -почти каждом $v \in R^m$ удовлетворяет соотношению

$$M(v+u) = M(v) \left[\frac{d\mu^u}{d\mu}(v+u) \right]^{-1} \quad (4.8)$$

одновременно для λ^m -почти всех $u \in U$ и любого измеримого по паре переменных варианта функции $\frac{d\mu^u}{d\mu}(v)$.

Доказательство леммы. Пусть ν — ненулевая абсолютно непрерывная мера, сосредоточенная на $-U$. Тогда для свертки $\nu * \mu$ справедлива формула

$$\nu * \mu(\cdot) = \int_{-U} \nu(du) \mu(\cdot - u) = \int_{-U} \nu(du) \mu^u(\cdot). \quad (4.9)$$

Соотношение $\mu^u \ll \mu$ можно переписать в виде $\mu \ll \mu^{-u}$, при этом $-u \in -U$. Поэтому из (4.9) следует, что $\mu \ll \nu * \mu$.

С другой стороны, $\nu * \mu \ll \lambda^m$, так как $\nu \ll \lambda^m$. Итак, $\mu \ll \lambda^m$. Пусть M — плотность μ относительно λ^m . Тогда функция $M(v)/M(v+u)$ будет измеримым вариантом плотности $\frac{d\mu}{d\mu^{-u}}(v)$.

Если $\rho(u, v)$ — любой измеримый вариант плотности $\frac{d\mu}{d\mu^{-u}}(v)$, то функция $\rho(u, v+u)$ будет измеримым вариантом $\frac{d\mu}{d\mu^{-u}}(v)$. Легко проверить, что любые два измеримых варианта функции $\frac{d\mu}{d\mu^{-u}}(v)$

совпадают на $U \times R^m$ почти всюду относительно меры $\lambda^m \times \mu$. Поэтому $\rho(u, v+u) = \frac{M(v)}{M(v+u)}$,

$$M(v+u) = M(v) \left[\frac{d\mu^u}{d\mu}(v+u) \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

Поскольку для μ -почти всех v (4.10) верно при λ^m -почти всех $u \in U$, то лемма доказана ■

При $m=1$, $U=R_+^1$ аналогичное утверждение доказано в [50].

Идея приведенного здесь рассуждения принадлежит В. Полицуку.

Доказательство теоремы 4.1. Прежде всего, заметим, что для фактормеры $(P^c)_\Gamma$ и семейства условных мер $\{(P^c)_\Gamma\}$, порождаемых мерой P^c и разбиением Γ , справедливы соотношения

$$(P^c)_\Gamma = P_\Gamma; \quad (P^c)_\gamma = P_\gamma G_c^{-1}. \quad (4.11)$$

Первое из этих соотношений сразу следует из инвариантности орбит относительно G_c : если $A \in \mathfrak{B}_{X,\Gamma}$, то

$$(P^c)_\Gamma(A) = P^c \pi^{-1}(A) = P G_c^{-1} \pi^{-1}(A) = P \pi^{-1}(A) = P_\Gamma(A).$$

Второе из равенств (4.11) может быть получено прямой проверкой соотношения (3.1). С другой стороны, применяя теорему 3.2 к мерам P^c и P , найдем

$$\frac{d(P^c)_\gamma}{dP_\gamma}(x) = p^c(x) = \frac{d(P_\gamma G_c^{-1})}{dP_\gamma}(x). \quad (4.12)$$

Поскольку пространство (X, λ_γ) эквивалентно подмножеству (R^m, λ^m) , причем изоморфизм J_x переводит полугруппу $\{G_c\}$ в полугруппу сдвигов, то к мере $\mu = P_\gamma J_x^{-1}$ можно применить лемму 4.3. При этом выполнение условия $\mu^c \ll \mu$ эквивалентно установленному теоремой 3.2 соотношению $P_\gamma G_c^{-1} = (P^c)_\gamma \ll P_\gamma$. Применение леммы 4.2 дает: $P_\gamma J_x^{-1} \ll \lambda^m$, что эквивалентно соотношению $P_\gamma \ll \lambda^m J_x = \lambda_\gamma$.

Для P_γ -почти всех x формула (4.8) применима с $v=0$. Получим

$$\frac{dP_\gamma J_x^{-1}}{d\lambda^m}(u) = K_\gamma \left[\frac{dP_\gamma G_u^{-1} J_x^{-1}}{dP_\gamma J_x^{-1}}(u) \right]^{-1}.$$

Возвращаясь в пространство (X, λ_γ) , получаем с учетом (4.12)

$$\frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(G_u(x)) = K_\gamma [p^u(G_u(x))]^{-1} \quad \blacksquare$$

Вычисление условных распределений. В соответствии с общей схемой метода расслоений за вычислением условных мер следует изучение их образов, т. е. условных распределений. Поскольку вычисленные в теореме 4.1 условные меры сосредото-

чены на конечномерных множествах, то необходимо изучить преобразования мер в евклидовом пространстве. Перейдем к обзору соответствующих аналитических результатов. Пусть λ^m — мера Лебега в R^m , $\lambda = \lambda^1$.

Теорема 4.2. Пусть $f: \Delta \rightarrow R^1$, где Δ — ограниченное открытое множество в R^1 , B — измеримое подмножество Δ , функция f дифференцируема λ -почти везде на B . Тогда а) для того, чтобы $\lambda_B f^{-1} \ll \lambda$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda \{c \in B \mid f'(c) = 0\} = 0; \quad (4.13)$$

б) если дополнительно предположить, что f абсолютно непрерывна или монотонна на Δ , и выполнено условие (4.13), то плотность может быть найдена по формуле

$$\frac{d\lambda_B f^{-1}}{d\lambda}(u) = \sum_{c \in f^{-1}\{u\} \cap B} |f'(c)|^{-1}. \quad (4.14)$$

Утверждение б) для абсолютно непрерывных функций доказано в [63].

Замечание 2. Нам неизвестно, справедливо ли равенство (4.14) при более слабых предположениях, чем абсолютная непрерывность.

Нам понадобится также аналог теоремы 4.2 для функций нескольких переменных.

Теорема 4.3. Пусть $f: \Delta \rightarrow R^m$, где Δ — ограниченное открытое подмножество R^m , функция f дифференцируема по Фреше λ^m -почти везде. Тогда а) если $\lambda^m f^{-1} \ll \lambda^m$, то

$$\lambda^m \{c \mid \det Df(c) = 0\} = 0, \quad (4.15)$$

где Df — матрица первых производных; б) если выполнено (4.15) и f непрерывно дифференцируема, то $\lambda^m f^{-1} \ll \lambda^m$ и плотность имеет вид

$$p(u) = \sum_{c \in f^{-1}\{u\}} |\det Df(c)|^{-1}. \quad (4.16)$$

Несомненный методический интерес представляло бы ослабление условия непрерывной дифференцируемости f . Известен аналог теоремы 4.2 для случая, когда размерности образа и прообраза различны (см. [20]). Приведенные теоремы допускают обобщение на случай, когда функцией f переносится не сама мера λ^m , а некоторая мера, абсолютно непрерывная относительно λ^m .

Следствие 1. Пусть μ — мера на Δ , $\mu \ll \lambda^m$. Тогда 1) Если $m=1$ и выполнено (4.13), то $\mu_B f^{-1} \ll \lambda$. 2) Если $m=1$, функция f абсолютно непрерывна или монотонна на Δ и выполнено условие (4.13), то плотность $\mu_B f^{-1}$ по λ может быть вычислена по формуле

$$p(u) = \sum_{c \in f^{-1}\{u\} \cap B} |f'(c)|^{-1} \frac{d\mu}{d\lambda}(c). \quad (4.17)$$

3) Если функция f непрерывно дифференцируема по Фреше, и почти везде на Δ матрица первых производных Df невырождена, то

$$p(u) = \sum_{c \in f^{-1}\{u\}} |\det Df(c)|^{-1} \frac{d\mu}{d\lambda^m}(c). \quad (4.18)$$

Выведем формулу для условного распределения функционала. Пусть по-прежнему $\{G_c\}$ — допустимая полугруппа, действующая в X , Γ — соответствующее разбиение на орбиты, $\{P_\gamma\}$ — система условных мер. Напомним, что для $x \in X$ было введено отображение J_x , параметризующее орбиту $\pi(x)$ элементами некоторого множества $C_x \subset R^m$.

Если f — измеримое отображение из X в R^m , то через f_x обозначим отображение

$$c \rightarrow f_x(c) = f(J_x^{-1}(c)), \quad x \in X, \quad c \in C_x.$$

Теорема 4.4. Пусть $B \in \mathfrak{B}_X$. 1) Если $m=1$, при почти всех $c \in J_x(B)$ функция f_x имеет производную, не равную нулю, то мера $P_{\gamma, B} f^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ . 2) Если $m=1$, функция f_x абсолютно непрерывна или монотонна на C_x и $f_x'(c) \neq 0$ почти везде на C_x , то плотность меры $P_{\gamma, B} f^{-1}$ по мере Лебега вычисляется по формуле

$$p(u) = \sum_{c \in J_x(B) \cap f_x^{-1}\{u\}} \frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(J_x^{-1}(c)) |f_x'(c)|^{-1}. \quad (4.19)$$

3) Если функция f_x непрерывно дифференцируема по Фреше, и почти везде на C_x матрица первых производных невырождена, то

$$p(u) = \sum \frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(J_x^{-1}(c)) |\det Df_x(c)|^{-1}. \quad (4.20)$$

Доказательство. Очевидно $P_{\gamma, B} f^{-1} = \mu_{J_x(B)} f_x^{-1}$, где плотность меры μ относительно λ^m задается формулой

$$p_\mu(c) = \frac{dP_\gamma J_x^{-1}}{d\lambda^m}(c) = \frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(J_x^{-1}(c)).$$

Применяя к мере μ соотношения (4.17), (4.18), получим утверждение теоремы ■

Следующие теоремы дают достаточные условия непрерывной зависимости образа меры от отображающего функционала.

Теорема 4.5. Пусть f_n, f — выпуклые функции со значениями в R^1 , определенные на ограниченном интервале $\Delta \subset R^1$. Пусть при λ -почти всех $c \in \Delta$

$$f'(c) \neq 0, \quad f(c) = \lim_n f_n(c).$$

Тогда для любой меры \mathbf{P} , абсолютно непрерывной относительно λ ,

$$\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P} f^{-1}. \quad (4.21)$$

Теорема 4.6. [19]. Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые функции со значениями в R^1 , определенные на ограниченном интервале $\Delta \subset R^1$ и $f' \neq 0$ почти везде. Пусть \mathcal{P} — семейство мер на σ -алгебре \mathfrak{B}_Δ , плотности которых образуют равномерно ограниченное и равномерно непрерывное семейство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства

$$\sup_{\Delta} (|f-g| + |f'-g'|) \leq \delta$$

следует, что

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{P}g^{-1} - \mathbf{P}f^{-1}\| \leq \varepsilon.$$

Простые примеры показывают, что в условии теоремы нельзя отказаться ни от близости производных, ни от непрерывности f' .

Глава 2

ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 5. Допустимые сдвиги и условные меры

Случайный процесс $\xi = (\xi_t), t \in T$, называется гауссовским, если все его конечномерные распределения гауссовские. Распределение гауссовского процесса ξ в (R^T, \mathfrak{B}^T) будет гауссовской мерой в смысле следующего определения.

Мера \mathbf{P} в линейном пространстве X называется гауссовской, если $\forall x^* \in X^*$ распределение случайной величины $\langle \cdot, x^* \rangle$ на вероятностном пространстве (X, \mathbf{P}) является гауссовским.

При изучении структуры мер, соответствующих гауссовским процессам, важную роль играют сдвиги, оставляющие эти меры квазиинвариантными. Напомним соответствующие определения.

Каждый элемент l линейного топологического пространства X порождает группу $G^l = \{G_c^l\}, c \in R^1$, сдвигов:

$$G_c^l(x) = x + cl. \quad (5.1)$$

Вектор l называется допустимым сдвигом для меры \mathbf{P} , если $\mathbf{P}^l = \mathbf{P}(G_1^l)^{-1} \ll \mathbf{P}$. Вектор l определяет допустимое направление для \mathbf{P} , если группа G^l допустима, т. е. если $\mathbf{P}^{cl} \ll \mathbf{P}$ для всех

$c \in R^1$. Множество всех векторов, определяющих допустимые направления для P , будет обозначаться H_P . Оно является векторным пространством и не меняется при сдвигах меры: $\forall l \in X$
 $H_P = H_{P+l}$.

Разбиение Γ на орбиты группы G^1 будем называть разбиением на прямые, параллельные l . Каждый элемент γ разбиения Γ может быть представлен в следующем виде: $\gamma = \{x + cl, c \in R^1\}$. Такую параметризацию элементов разбиения Γ будем называть естественной. Как обычно, через $\{P_\gamma\}$ и P_Γ обозначаем систему условных мер и фактормеру для P относительно разбиения Γ .

Перейдем к рассмотрению гауссовских мер. В этом случае пространство допустимых направлений и условные меры на прямых, параллельных допустимым направлениям, могут быть описаны исчерпывающим образом. Ниже, в теореме 5.1 собраны основные факты о структуре гауссовской меры в линейном пространстве, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Хотя многие из приводимых свойств выполняются и при менее жестких ограничениях, мы будем предполагать, что пространство X локально выпукло и сепарабельно. Отметим, что эти условия заведомо обеспечивают измеримость разбиений пространства X на параллельные прямые.

Предложение 5.1. Пусть P — гауссова мера в X . Тогда среднее значение для P существует.

Если среднее значение для P равно a , то для меры P^{-a} средним значением будет 0. Таким образом, при изучении пространства H_P допустимых направлений гауссовской меры P можно всегда предполагать, что исходное среднее равно нулю. В дальнейших рассуждениях этого параграфа, если не оговорено противное, рассматриваются меры с нулевым средним.

Каждый линейный непрерывный функционал x^* может рассматриваться как гауссовская случайная величина на вероятностном пространстве (X, P) , то есть как элемент пространства $L^2(X, P)$. Пусть X_P — замыкание X^* в $L^2(X, P)$. Элемент h этого пространства, рассматриваемый как случайная величина на (X, P) , будет обозначаться $\langle \cdot, h \rangle$. Он является линейным измеримым функционалом. Последнее означает, что равенство

$$\langle x + y, h \rangle = \langle x, h \rangle + \langle y, h \rangle$$

выполняется для $P \times P$ -почти всех пар $(x, y) \in X \times X$. Пространство X_P , как подпространство $L^2(X, P)$, является гильбертовым. Скалярное произведение, индуцированное из $L^2(X, P)$, будем обозначать (\cdot, \cdot) , а норму $|\cdot|$.

Пусть i^* — оператор включения X^* в X_P . Из сходимости x_n^* к x^* в слабой-* топологии вытекает, что $i^*(x_n^*)$ сходится к $i^*(x^*)$ в норме X_P . Это означает, что оператор i^* непрерывен. Обозначим через i оператор из $X_P = X_P^*$ в X , сопряженный к i^* . Положим

$$N_P = \bigcap_{x^* \in \ker i^*} \ker x^*.$$

Так как X сепарабельно, то X^* тоже сепарабельно. Поэтому N_P совпадает с пересечением $\ker x_j^*$ для некоторого счетного множества $x_j^* \in \ker i^*$. Поскольку для каждого j $P(\ker x_j^*) = 1$, то $P(N_P) = 1$. Поэтому N_P является наименьшим замкнутым подпространством полной меры, то есть линейным носителем меры P .

Теорема 5.1. Гауссовская мера P обладает следующими свойствами: 1) оператор i изоморфно отображает X_P на H_P ; 2) замыкание пространства H_P совпадает с линейным носителем N_P ; 3) линейный носитель N_P является и топологическим носителем меры P ; 4) пусть Γ — разбиение X на прямые, параллельные вектору $l \in H_P$, $l = i(h)$, $h \in X_P$; тогда для P_Γ -почти всех γ условная мера P_γ в естественной параметризации ($\gamma = \{x + cl, c \in R^1\}$) будет гауссовской с параметрами $(-\langle x, h \rangle |h|^{-2}, |h|^{-2})$; 5) пусть $l \in H_P$, $l = i(h)$, $h \in X_P$; тогда

$$\frac{dP^l}{dP}(x) = \exp \left\{ \langle x, h \rangle - \frac{1}{2} |h|^2 \right\}; \quad (5.2)$$

6) корреляционный оператор для P существует и равен $i \cdot i^*$.

Эти свойства, за исключением, вероятно, свойства 4), достаточно хорошо известны (см., например, [64, 62, 65, 8, 12, 51, 56, 44, 7]); этот перечень далеко не полон, — обширную библиографию можно найти в [12, 44, 51]). Тем не менее для удобства читателя мы приводим доказательство пп. 1, 4—6. Доказательство свойства 4), основанное на формуле сдвига (5.2), имеется в [28]. Предлагаемый здесь вывод свойства 4) и формулы сдвига (5.2) по-видимому является новым.

Доказательство. Докажем 1). Заметим, что оператор i инъективен. Действительно, пусть $i(h) = 0$. Тогда $\forall x^* \in X^*$ $0 = \langle i(h), x^* \rangle = (h, i^*(x^*))$. Так как $i^*(X^*)$ плотно в X_P , то $\forall \varphi \in X_P$ $(h, \varphi) = 0$. Следовательно, $h = 0$.

Пусть l — допустимый сдвиг. Для каждого $x^* \in X^*$ обозначим μ_{x^*} , ν_{x^*} распределения функционала $\langle \cdot, x^* \rangle$ относительно мер P и P^l . Меры μ_{x^*} , ν_{x^*} являются гауссовскими с параметрами $(0, |i^*(x^*)|^2)$, $(\langle l, x^* \rangle, |i^*(x^*)|^2)$, соответственно. Так как $P^l \ll P$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что из $P(A) < \delta$ вытекает $P^l(A) < \varepsilon$. Значит $\forall x^* \in X^*$ из неравенства $\mu_{x^*}(B) < \delta$ будет следовать $\nu_{x^*}(B) < \varepsilon$. Последнее означает, что параметры мер μ_{x^*} , ν_{x^*} связаны соотношением

$$\sup_{x^* \in X^*} \frac{|\langle l, x^* \rangle|}{|i^*(x^*)|} < \infty.$$

Отсюда вытекает, что линейный функционал $\langle l, \cdot \rangle$ продолжается с $i^*(X^*)$ до непрерывного функционала на X_P . Следовательно, существует $h \in X_P$ такой, что $\langle l, x^* \rangle = (h, i^*(x^*))$ $\forall x^* \in X^*$. Но $(h, i^*(x^*)) = \langle i(h), x^* \rangle$ и так как X^* разделяет точки в X , то $l = i(h)$.

Пусть теперь $l = i(h)$, где $h \in X_p$. Покажем, что l — допустимый сдвиг.

Положим $l^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle l, x^* \rangle = 0\}$. Легко видеть, что σ -алгебра \mathfrak{M} подмножеств X , порожденная функциями $\{\langle \cdot, x^* \rangle, x^* \in l^\perp\}$, совпадает с σ -алгеброй, порожденной разбиением Γ пространства X на прямые, параллельные l . Так как $\forall x^* \in l^\perp$ $\langle h, i^*(x^*) \rangle = \langle l, x^* \rangle = 0$, то h ортогонально каждой случайной величине $\langle \cdot, x^* \rangle$, $x^* \in l^\perp$. Поскольку X_p образует гауссовское семейство, то это означает, что случайная величина $\langle \cdot, h \rangle$, а следовательно, и $\xi = \langle \cdot, h \mid h \rangle^{-2}$, не зависит от σ -алгебры \mathfrak{M} . Но тогда (см. теорему 3.1) мера $P_{\gamma, \xi}^{-1}$, где P_γ — условные меры для P относительно Γ , для P_Γ -почти всех γ совпадает с P_ξ^{-1} , т. е. является гауссовской с параметрами $(0, |h|^{-2})$. Пусть прямая γ имеет параметризацию $\gamma = \{x + ct, c \in R^1\}$. Поскольку для P_Γ -почти всех γ и почти всех $c \in R^1$

$$\xi(x + ct) = \langle x + ct, h \mid h \rangle^{-2} = \langle x, h \rangle^{-2} + c,$$

то сама мера P_Γ в указанной параметризации будет гауссовской с параметрами $(-\langle x, h \rangle \mid h \rangle^{-2}, |h|^{-2})$. Для меры P^l фактормера P_Γ^l равна P_Γ , а условные меры P_γ^l получаются из P_γ сдвигом на 1 (в естественной параметризации). Значит, $P_\gamma^l \ll P_\gamma$ для P_Γ -почти всех γ и по замечанию к теореме 3.2 получаем, что $P^l \ll P$. Таким образом, $l \in H_p$. Заметим, что одновременно мы получили доказательство и п.4).

Выведем формулу сдвига (5.2). В соответствии с теоремой 3.2 для P_Γ -почти всех γ и P_γ -почти всех y

$$\frac{dP^l}{dP}(y) = \frac{dP_\gamma^l}{dP_\gamma}(y).$$

Пусть $y = x + ct$ и пусть p_γ, p_γ^l — плотности мер P_γ, P_γ^l в естественной параметризации. Тогда

$$\frac{dP_\gamma^l}{dP_\gamma}(y) = \frac{p_\gamma^l(c)}{p_\gamma(c)} = \frac{p_\gamma(c-1)}{p_\gamma(c)}.$$

Так как $p_\gamma(c)$ — гауссовская плотность с параметрами $(-\langle x, h \rangle \mid h \rangle^{-2}, |h|^{-2})$, то

$$\frac{p_\gamma(c-1)}{p_\gamma(c)} = \exp \left\{ \langle x, h \rangle + c \mid h \rangle^{-2} - \frac{1}{2} |h|^{-2} \right\} = \exp \left\{ \langle y, h \rangle - \frac{|h|^2}{2} \right\},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство свойства б) вытекает из соотношения

$$\langle i(i^*(x^*)), y^* \rangle = \langle i^*(x^*), i^*(y^*) \rangle = \int_X \langle x, x^* \rangle \langle x, y^* \rangle P(dx),$$

$$x^*, y^* \in X^*.$$

Теорема доказана ■

Замечание 1. Пусть K_P — корреляционный оператор меры P . Тогда $K_P(X^*)$ плотно в N_P .

Замечание 2. Если X — сепарабельное банахово пространство, то поскольку оператор i^* непрерывен в слабой-* топологии, он будет вполне непрерывен. Сопряженный к нему оператор i и оператор $K_P = i \circ i^*$ также будут вполне непрерывны.

Замечание 3. Как следует из п. 4), дисперсия условных мер на прямых, параллельных допустимому вектору l , не зависит от γ . Ее величина будет обозначаться $\sigma_P^2(l)$. Величина $\sigma_P(l)$ совпадает с $|h|^{-1}$, где $l = i(h)$; она будет называться мерой допустимости вектора l .

Рассуждения, аналогичные использованным нами при доказательстве второй части п. 1), дают возможность получить

Предложение 5.2. Пусть (l_1, \dots, l_n) — линейно независимые векторы из H_P , $l_k = i(h_k)$, $h_k \in X_P$, A — матрица, образованная скалярными произведениями (h_i, h_k) . Пусть Γ — разбиение на n -мерные многообразия, параллельные подпространству, натянутому на (l_1, \dots, l_n) . На элементе разбиения γ введем

параметризацию: $\gamma = \left\{ x + \sum_1^n c_k l_k, c_k \in \mathbb{R}^1 \right\}$. Тогда для P_Γ -почти

всех γ условная мера P_γ в выбранной параметризации будет гауссовской с матрицей ковариаций A^{-1} и средним $a(x) = -A^{-1}b(x)$, где $b(x)$ — вектор с координатами $\langle x, h_k \rangle$.

Следует обратить внимание на тот факт, что матрица ковариаций мер P_γ не зависит от элемента разбиения. Заметим

также, что вектор $a_\gamma = x + \sum_1^n a_k(x) l_k$, где $a_k(x)$ — k -я координата $a(x)$, не зависит от выбора $x \in \gamma$. Этот вектор a_γ будем называть центром условного распределения P_γ .

Следующая теорема оказывается весьма полезной при нахождении пространства H_P в конкретных ситуациях.

Теорема 5.2. Предположим, что корреляционный оператор K_P меры P допускает факторизацию $K_P = I \circ I^*$, где I — линейный оператор из некоторого гильбертового пространства $L = L^*$ в X , а I^* — оператор, сопряженный к I . Тогда $H_P = I(L)$.

Доказательство. Пусть L_0 — замыкание $I^*(X^*)$ в L , а L_0^\perp — ортогональное дополнение к L_0 . Соответствие $\kappa: i^*(x^*) \rightarrow I^*(x^*)$ в силу равенства

$$\begin{aligned} (I^*(x^*), I^*(y^*))_L &= \langle I \circ I^*(x^*), y^* \rangle = \\ &= \langle i \circ i^*(x^*), y^* \rangle = (i^*(x^*), i^*(y^*)) \end{aligned}$$

является изометрическим изоморфизмом между $i^*(X^*)$ и $I^*(X^*)$ и продолжается до изометрического изоморфизма между X_P и

L_0 . Так как для $\varphi \in i^*(X^*)$ $I(\chi(\varphi)) = i(\varphi)$, то $I \circ \chi = i$. Следовательно $I(L_0) = I(\chi(X_P)) = i(X_P) = H_P$. Для $l \in L_0^\perp$ и $\forall x^* \in X^*$ $\langle I(l), x^* \rangle = \langle l, I^*(x^*) \rangle_L = 0$. Поэтому $I(l) = 0$ и значит $I(L) = I(L_0) = H_P$ ■

Замечание 4. Мера допустимости вектора $I(l)$ равна $|\text{pr}_{L_0} l|_L^{-1}$ и следовательно не меньше, чем $|l|_L^{-1}$.

Отметим еще один полезный факт.

Теорема 5.3. Предположим, что гауссовские меры P и Q эквивалентны. Тогда $H_P = H_Q$ и мера допустимости $\sigma_P(l)$ элемента $l \in H_P$ эквивалентна $\sigma_Q(l)$, то есть существуют две положительные постоянные c_1 и c_2 , такие, что $\forall l \in H_P$

$$c_1 \sigma_Q(l) \leq \sigma_P(l) \leq c_2 \sigma_Q(l). \quad (5.3)$$

Рассмотрим несколько важных для дальнейшего примеров.

Пример 1. Гильбертово пространство. Пусть P — гауссова мера в гильбертовом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. отождествим X^* с X . Корреляционный оператор K меры P будет положительно определенным и самосопряженным. Нетрудно показать (см., например, [44, с. 20]), что K будет ядерным. Имеет место очевидная факторизация: $K = K^{1/2} \cdot K^{1/2}$, где $K^{1/2} : X \rightarrow X$ — квадратный корень из K . Поэтому допустимые сдвиги имеют вид $l = K^{1/2}h$, $h \in X$. Если K инъективен, то мера допустимости $\sigma_P(l)$ равна $\|h\|^{-1}$ (в общем случае вместо вектора h надо брать его проекцию на замыкание образа $K^{1/2}(X)$).

Пример 2. Воспроизводящие ядра. Предположим, что P — гауссовская мера в пространстве непрерывных функций $X = C(T)$ на метрическом компакте T с равномерной нормой. Сопряженным пространством X^* будет пространство конечных зарядов на T . Слабая-* топология — это топология слабой сходимости мер. Корреляционный оператор K в этом случае является интегральным оператором

$$Kv(t) = \int_T K(t, s) v(ds), \quad (5.4)$$

ядро которого $K(t, s)$ — положительно определенная непрерывная функция на $T \times T$. Пусть L — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $K(t, s)$, т. е. пополнение пространства функций вида

$$f(t) = \int_T K(t, s) v(ds), \quad v \in X^*, \quad t \in T, \quad (5.5)$$

по норме, порожденной скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_{T \times T} K(t, s) v_1(dt) v_2(ds).$$

Легко видеть, что K является непрерывным линейным оператором из X^* в L , а его сопряженным будет оператор включения L

в $C(T)$. Поэтому допустимые сдвиги — это в точности элементы L . Мера допустимости $\sigma_P(l)$ равна $\|l\|_L^{-1}$.

Пример 3. **Винеровское поле.** Пусть P — гауссовская мера в $X = C(T)$, $T = [0, 1]^d$, соответствующая гауссовскому полю с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K(t, s) = \prod_1^d (t_i \wedge s_i), \quad t, s \in [0, 1]^d. \quad (5.6)$$

Чтобы получить конструктивное описание допустимых сдвигов, построим факторизацию оператора K , отличную от рассмотренной в предыдущем примере.

Возьмем $L = L^2(T)$ и определим операторы $I: L \rightarrow X$, $I^*: X^* \rightarrow L$ равенствами

$$I^*v(s) = \int_{T \setminus [0, s]} v(dt), \quad [0, s] = \prod_1^d [0, s_i]; \quad (5.7)$$

$$Ih(t) = \int_{[0, t]} h(s) \lambda^d(ds). \quad (5.8)$$

Непосредственно проверяется, что I, I^* сопряжены и что $K_P = I \circ I^*$. Таким образом, формула (5.8) дает общий вид допустимого сдвига; мера его допустимости равна $\|h\|_{L^1(T)}$. В случае $d = 1$ рассматриваемая мера P соответствует стандартному винеровскому процессу, и мы приходим к хорошо известному (см. [12]) результату: допустимые сдвиги винеровской меры в $C[0, 1]$ суть абсолютно непрерывные функции l , для которых $l(0) = 0$ и $l' \in L^2[0, 1]$. Мера допустимости l равна $\|l'\|_{L^2[0, 1]}$.

Пример 4. **Полуустойчивые гауссовские процессы (дробное броуновское движение).** Так называется гауссовский процесс $(w_\alpha(t))$, определенный на R_+ и имеющий нулевое среднее и корреляционную функцию

$$K(t, s) = \frac{1}{2} [s^\alpha + t^\alpha - |s - t|^\alpha]. \quad (5.9)$$

Параметр α лежит в интервале $(0, 2)$. Пусть P — гауссовская мера в $X = L^2[0, 1]$, соответствующая сужению $w_\alpha(t)$ на $[0, 1]$. Оператор K_P в данном случае — это интегральный оператор с ядром $K(t, s)$. Прямые вычисления показывают, что имеет место факторизация $K_P = I \circ I^*$, где I — интегральный оператор из $L^2(R^1)$ в $L^2[0, 1]$ с ядром

$$i(t, s) = c_\beta \{ (t-s)^{-\beta} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) + [(t-s)^{-\beta} - (-s)^{-\beta}] \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(s) \}, \quad (5.10)$$

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad c_\beta = \left\{ \int_{-\infty}^0 [(1-z)^{-\beta} - (-z^{-\beta})^2] dz + \int_0^1 (1-z)^{-2\beta} dz \right\}^{-1/2}.$$

Оператор I^* будет также интегральным оператором с ядром $i(s, t)$. Таким образом, общая форма допустимого сдвига имеет вид:

$$l(t) = c_\beta \int_{-\infty}^0 h(s) [(t-s)^{-\beta} - (-s)^{-\beta}] ds + c_\beta \int_0^t h(s) (t-s)^{-\beta} ds, \\ h \in L^2(R^1). \quad (5.11)$$

Функция h называется производной дробного порядка $(1-\beta)$ от функции l .

Приведем без доказательства одно полезное достаточное условие для того, чтобы функция l имела представление вида (5.11).

Предложение 5.3. Предположим, что $l(0) = 0$ и что преобразование Фурье \hat{l} функции l принадлежит $L^2(R^1, |t|^{1+\alpha} \lambda(dt))$. Тогда l представима в виде (5.11), т. е. является допустимым сдвигом для \mathbf{P} , и мера допустимости

$$\sigma_{\mathbf{P}}(l) \geq \left(\int_{R^1} |\hat{l}(t)|^2 |t|^{1+\alpha} dt \right)^{-1/2}.$$

В случае $\alpha=1, \beta=0$ мы опять приходим к описанию допустимых сдвигов винеровской меры. Допустимые сдвиги гауссовских полуустойчивых процессов изучались в [37].

Пример 5. Стационарные гауссовские процессы. Рассмотрим стационарный гауссовский процесс $(\xi_t), t \in R^1$, с нулевым средним, корреляционной функцией $K(t, s) = K(t-s)$ и спектральной мерой F :

$$K(t, s) = \int_{R^1} e^{i(t-s)u} F(du).$$

Пусть \mathbf{P} — мера в $L^2[0, 1]$, соответствующая сужению нашего процесса на $[0, 1]$. Корреляционный оператор $K_{\mathbf{P}}$ меры \mathbf{P} — интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ — факторизуется следующим образом: $K_{\mathbf{P}} = I \cdot I^*$, где $I: L^2(R^1, F) \rightarrow L^2[0, 1]$.

$$Ih(t) = \int_{R^1} e^{-its} h(s) F(ds), \quad t \in [0, 1]; \quad (5.12)$$

$$I^*g(s) = \int_{[0,1]} e^{ist} g(t) dt, \quad s \in R^1.$$

Поэтому l является допустимым сдвигом для \mathbf{P} в том и только том случае, если

$$l(t) = \int_{R^1} e^{-its} h(s) F(ds) \quad (5.13)$$

для некоторой функции $h \in L^2(R^1, F)$.

Предположим теперь, что существует спектральная плотность p вида

$$p(s) \asymp (1 + |s|)^{-2n}, \quad (5.14)$$

где n — целое число. В этом случае уравнение (5.13) имеет решение тогда и только тогда, когда l n раз дифференцируема и $l^{(n)} \in L^2[0, 1]$, т. е. когда l принадлежит пространству Соболева $W_2^n[0, 1]$. При этом мера допустимости

$$\sigma_P(l) \asymp \|l\|_{W_2^n[0,1]}^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \|l^{(k)}\|_{L^2[0,1]}^2 \right)^{-1/2}. \quad (5.15)$$

Доказательства этих утверждений можно найти в [44, с. 37—40]. Заметим еще, что если условие (5.14) выполняется не на всей прямой, а только на бесконечности, то описание допустимых сдвигов остается прежним. Это следует из теоремы 5.3 и того факта, что меры соответствующие стационарным процессам, спектральные плотности которых совпадают вне некоторой окрестности нуля, эквивалентны ([44, с. 145—147]).

Пример 6. Проектирование гауссовских мер. В ряде статистических работ (см., например, [22, 57]) встречаются процессы вида

$$\xi_t = \omega(t) - t\omega(1) - \sum_1^n x_i(t) \int_0^1 x_i'(s) d\omega(s), \quad t \in [0, 1], \quad (5.16)$$

где ω — процесс броуновского движения, а функции x_i обладают свойствами: $x_i' \in L^2[0, 1]$, $x_i(0) = x_i(1) = 0$, $(x_i', x_j')_{L^2[0,1]} = \delta_{ij}$. Пусть P — распределение процесса ξ в $C[0, 1]$. Функция l является допустимым сдвигом для P , если $l' \in L^2[0, 1]$, $l(0) = l(1) = 0$, $(l', x_i')_{L^2[0,1]} = 0$, $i = 1, \dots, n$; при этом

$$\sigma_P(l) = \left(\int_0^1 (l')^2 d\lambda \right)^{-1/2}.$$

Этот результат непосредственно вытекает из следующего предложения (ср. с предложением 5.2).

Предложение 5.4. Пусть P — гауссова мера в линейном пространстве X . Пусть l_1, \dots, l_n — линейно независимые допустимые сдвиги, $l_k = l(h_k)$, $h_k \in X_P$. Пусть A — матрица скалярных произведений (h_j, h_k) . Определим отображение $J: X \rightarrow X$ равенством

$$Jx = x - \sum_{j,k} A_{jk}^{-1} \langle x, h_k \rangle l_j, \quad (5.17)$$

где A_{jk}^{-1} — элементы матрицы A^{-1} . Тогда для гауссовой меры $Q = PJ^{-1}$ пространство $H_Q = E^\perp$, где E — подпространство H_P , натянутое на вектора l_1, \dots, l_n . Тем самым, $\sigma_Q(l) = \sigma_P(l)$.

Заметим, что отображение J имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим разбиение Γ пространства X на многообра-

зия, параллельные порожденному векторами l_1, \dots, l_n подпространству. Пусть a_γ — центр условной меры \mathbf{P}_γ . Тогда J_x есть $a_{\pi(x)}$, где $\pi(x)$ — тот элемент разбиения, который содержит вектор x .

§ 6. Абсолютная непрерывность распределений гладких функционалов

Сначала мы докажем общую теорему для процессов произвольного вида, а затем выведем из нее ряд следствий для гауссовского случая. Сформулируем требования, которым должны подчиняться рассматриваемые функционалы и процессы. В этом параграфе будем считать X полным сепарабельным метрическим линейным пространством. Пусть B, H — подмножества пространства X , снабженные топологиями τ_B и τ_H .

Определение 1. Функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ назовем (B, H) -гладким, если для каждого $x \in B$ существует направление $l \in H$ такое, что

$$D_l f(x) = \lim_{c \rightarrow 0} c^{-1} [f(x + cl) - f(x)] \neq 0 \quad (6.1)$$

и функция $(y, h) \rightarrow D_h f(y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности пары (x, l) относительно топологии $\tau_B \times \tau_H$. Класс (B, H) -гладких функционалов обозначим через $\mathcal{M}(B, H)$.

Определение 2. Пусть на X заданы полунорма $\|\cdot\|$ и борелевская мера \mathbf{P} . Будем говорить, что \mathbf{P} имеет (B, H) -достаточное число допустимых преобразований, если для любых $x \in B$, $l \in H$ существует упорядоченная система окрестностей V^α точки x , система определенных на V^α допустимых относительно \mathbf{P} полугрупп G^α и система определенных на V^α векторных полей l^α со значениями в H таких, что

1) для \mathbf{P} -почти всех $y \in V^\alpha$

$$\lim_{c \rightarrow 0} c^{-1} \|G_c^\alpha(y) - y - cl^\alpha(y)\| = 0; \quad (6.2)$$

2) отображение $y \rightarrow (y, l^\alpha(y))$ непрерывно на $V^\alpha \cap B$ (если в образе рассматривать топологию $\tau_B \times \tau_H$), и

$$3) \tau_H\text{-}\lim_{\alpha} l^\alpha(x) = l. \quad (6.3)$$

Теорема 6.1. Пусть \mathbf{P} — борелевская мера на X , $\|\cdot\|$ — полунорма на X . Пусть B и H — подмножества X , снабженные топологиями τ_B и τ_H , $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримый функционал. Предположим, что 1) \mathbf{P} имеет (B, H) -достаточное число допустимых преобразований; 2) функционал f удовлетворяет локальному условию Липшица на B относительно $\|\cdot\|$; 3) $f \in \mathcal{M}(B, H)$. Тогда $\mathbf{P}_B f^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство. Для $x \in B$ найдем направление $l = l(x)$ для которого выполнено (6.1). Пользуясь (6.3), выберем α так, чтобы пара $(x, l^\alpha(x))$ принадлежала области определения и не прерывности функции $(x, l) \rightarrow D_l f(x)$. Пользуясь непрерывностью отображения $y \rightarrow (y, l^\alpha(y))$, можно найти окрестность W^α точки x такую, что $W^\alpha \subset V^\alpha(x, l)$ и функция $y \rightarrow D_{l^\alpha(y)} f(y)$ определена и отлична от нуля при $y \in W^\alpha \cap B$.

Пусть для $y \in W^\alpha \cap B$ выполнено (6.2). Рассмотрим функцию $f_y(c) = f(G_c^\alpha(y))$. Имеем, в силу условия Липшица

$$\begin{aligned} |f_y(c) - f_y(0) - c D_{l^\alpha(y)} f(y)| &\leq |f(G_c^\alpha(y)) - f(y + cl^\alpha(y))| + \\ &+ |f(y + cl^\alpha(y)) - f_y(0) - c D_{l^\alpha(y)} f(y)| = \\ &= O(\|G_c^\alpha(y) - y - cl^\alpha(y)\|) + o(c) = o(c). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{df_y}{dc}(0) = D_{l^\alpha(y)} f(y) \neq 0. \quad (6.4)$$

Поэтому при почти всех c

$$\frac{df_y}{dc}(c) = \frac{df G_c^\alpha(y)}{dc}(0) \neq 0.$$

Из утверждения 1 теоремы 4.4 следует, что $P_{y, B \cap W^\alpha} \ll \lambda$ и, следовательно, в силу (3.2)

$$P_{B \cap W^\alpha} f^{-1} \ll \lambda.$$

Пользуясь сепарабельностью X , из покрытия множества B множествами $W^\alpha = W'^\alpha(x)$ выделим счетное подпокрытие $\{W_n\}$. При этом

$$P_B f^{-1} \ll \sum_n P_{W_n \cap B} f^{-1} \ll \lambda \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Если возникающие в доказательстве теоремы полугруппы $\{G_c^\alpha\}$ имеют вид (5.1), то условие Липшица в формулировке теоремы 6.1 можно отбросить, так как дополнительное выражение в (6.2) равно нулю.

Теорема 6.1 обобщает аналогичные результаты [15, 19, 29]. Укажем широкий класс гауссовских мер, имеющих достаточное число допустимых преобразований.

Пример 1. Пусть P — гауссовская мера в банаховом сепарабельном пространстве X . Пусть B — любое подмножество X , $\|\cdot\|$ — любая полунорма, τ_B — любая топология, а подмножество H и топология τ_H выбраны так, что $H_P \cap H$ плотно в H относительно τ_H . Тогда P имеет (B, H) -достаточное число до-

пустимых преобразований. Действительно, для $l \in H$, $x \in B$ можно положить $V^n = X$, а группы G^n взять линейными:

$$G_c^n(x) = x + cl_n,$$

где $l_n \in H_P \cap H$, $l = \tau_H\text{-}\lim l_n$.

Допустимость полугрупп G^n отмечалась в § 5, а дифференцирующее поле $l^n(y) = l_n$ постоянно при каждом n , и, следовательно, отображение $y \rightarrow (y, l^n(y))$ непрерывно относительно любых топологий τ_B, τ_H .

Пример 2. Пусть T — измеримое пространство с конечной мерой μ ; $X = L^2(T, \mu)$; (ξ_t) , $t \in T$, — гауссовский процесс, траектории которого принадлежат X . Пусть K — его корреляционная функция, а P — соответствующая мера в X , и для любого ненулевого $y^* \in X^* = X$

$$|i^*(y^*)|^2 = \int_{T \times T} K(s, t) y^*(t) y^*(s) \mu(dt) \mu(ds) > 0. \quad (6.5)$$

Пусть $H_P \cap H$ плотно в H относительно топологии τ_H . Тогда P имеет (B, H) -достаточное число допустимых преобразований относительно любых $B, \tau_B, \|\cdot\|$. В частности, можно положить $H = H_P$ и брать любую топологию τ_H . Этот пример — частный случай примера 1.

Пример 3. Пусть T — метрический компакт, $X = C(T)$, (ξ_t) , $t \in T$, — гауссовский процесс с непрерывными траекториями. Пусть P — соответствующая мера в X и для любого ненулевого заряда $y^* \in X^*$

$$|i^*(y^*)|^2 = \int_{T \times T} K(s, t) y^*(dt) y^*(ds) > 0. \quad (6.6)$$

Тогда H_P плотно в X , и легко проверяется, что для $H = X$, борелевских топологий τ_H, τ_B мера P имеет (B, H) -достаточное число допустимых преобразований при любых $B \subset X$ и полунорме $\|\cdot\|_A$.

Замечание 2. Условия (6.5) и (6.6) эквивалентны невырожденности распределений линейных непрерывных функционалов от процесса.

Приведем примеры (B, H) -гладких функционалов.

Пример 4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $f: X \rightarrow R^1$ — отображение, дифференцируемое по Фреше на множестве $B \subset X$, т.е. при $x \in B$ существует такой элемент $Df(x)$ пространства X^* , что

$$\|f(x+y) - f(x) - \langle y, Df(x) \rangle\| = o(\|y\|). \quad (6.7)$$

Предположим, что отображение $x \rightarrow Df(x)$ непрерывно, если в B рассматривать сильную топологию τ_B , а в X^* — топологию двойственности. Из (6.7) следует, что при $x \in B$, $l \in X$

$$D_l f(x) = \langle l, Df(x) \rangle. \quad (6.8)$$

Если $Df(x) \neq 0$, то при некотором $l \in X$ правая часть (6.8) отлична от нуля. Пусть $\tau_H = \tau_B$ — борелевские топологии, $H = X$. Тогда $f \in \mathcal{M}(B, H)$.

Действительно, достаточно установить непрерывность производной. Если $x_n \rightarrow x$, то $Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ в слабой топологии. Поэтому последовательность $\{Df(x_n)\}$ ограничена по норме в X^* и, следовательно, при $l_n \rightarrow l$

$$\langle l_n, Df(x_n) \rangle - \langle l, Df(x) \rangle = \langle l_n - l, Df(x_n) \rangle + \langle l, Df(x_n) - Df(x) \rangle \rightarrow 0.$$

Пример 5. Рассмотрим интегральный функционал на $X = L^2(T, \mu)$

$$f(x) = \int_T q(x(t)) \mu(dt). \quad (6.9)$$

Предположим, что q удовлетворяет локальному условию Липшица, и на некотором множестве $\Pi \subset R^1$ производная q' определена, непрерывна и отлична от нуля. Пусть $B = \left\{ x \mid \int_T 1_\Pi(x(t)) \mu(dt) = \mu(T) \right\} \cap L^\infty(T, \mu)$, H плотно в X , а τ_B и τ_H — это L^∞ -топологии.

Функционал f определен на $L^\infty(T, \mu)$. Продолжим его произвольным образом на все пространство X . Тогда $f \in \mathcal{M}(B, H)$. Действительно, в силу условия Липшица, ограниченности x и l , подынтегральная функция в выражении

$$\int_T c^{-1} [q((x + cl)(t)) - q(x(t))] \mu(dt)$$

будет ограничена.

Совершив предельный переход под знаком интеграла, найдем

$$D_l f(x) = \int_T q'(x(t)) l(t) \mu(dt). \quad (6.10)$$

Непрерывность функции $(x, l) \rightarrow D_l f(x)$ следует из непрерывности q' . Наконец, поскольку $x(t) \in \Pi$, то $q'(x(t)) \neq 0$ и можно найти такое $l \in H$, что правая часть (6.10) отлична от нуля.

Комбинируя примеры 5 и 2, получим следующий результат.

Теорема 6.2. Пусть P — гауссовская мера в пространстве $X = L^2(T, \mu)$, удовлетворяющая условию (6.5), сосредоточенная на $L^\infty(T, \mu)$. Пусть функционал f задан формулой (6.9). Предположим, что ядро q удовлетворяет условиям примера 5 и $\lambda(R^1 \setminus \Pi) = 0$. Тогда $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Для $T = [0, 1]$, $\mu = \lambda$ теорема 6.2 доказана в [29]. Аналогичный результат можно доказать для функционалов вида

$$f(x) = \int_T q(x(t), t) \mu(dt). \quad (6.11)$$

Пример 6. Рассмотрим функционал (6.9), где $T = [0, 1]$, μ — конечная мера, $\mu(\Delta) > 0$ на любом интервале $\Delta \subset [0, 1]$. Пусть функция q локально интегрируема и непрерывно дифференцируема в некоторой открытой области U , причем

$$0 \in \{u \in U \mid q'(u) \neq 0\}^- \quad (6.12)$$

Пусть $B_0 \subset C[0, 1]$ — множество функций, для которых локальное время (плотность меры μx^{-1}) ограничено. Тогда на B_0 функционал f конечен. Положим

$$B = \{x \mid \sup_{t \in [0, 1]} x(t) > 0, \inf_{t \in [0, 1]} x(t) < 0, x(0) = 0\} \cap B_0, \quad (6.13)$$

$$H = \{l \mid l(0) = 0, l' \in L^2[0, 1]\}.$$

Пусть τ_B — борелевская топология, а τ_H — дискретная топология. Тогда $f \in \mathcal{M}(B, H)$.

Заметим, что здесь в качестве τ_H нельзя выбирать топологию равномерной сходимости, так как из равномерной сходимости $l_n \rightarrow l$ не следует даже, что $D_{l_n} f(x)$ определена при больших n .

Если потребовать, чтобы функция q была локально ограничена, то в определении B_0 можно отбросить требование ограниченности локального времени.

Ввиду особой важности винеровского процесса представляет интерес следующий результат, вытекающий из примеров 6 и 1.

Теорема 6.3 [19]. Пусть W — винеровская мера в $C[0, 1]$, интегральный функционал (6.9) удовлетворяет условиям примера 6, и плотность $\frac{d\mu}{d\lambda}$ локально ограничена. Тогда $Wf^{-1} \ll \lambda$.

Аналогичная теорема для функционалов вида (6.11) сформулирована в [19].

Теорему 6.3 можно распространить на довольно широкий класс процессов [19]. Достаточно потребовать, чтобы для любого открытого множества $\Delta \subset T$ существовал допустимый сдвиг l такой, что функция l — ненулевая, неотрицательная и ее носитель принадлежит Δ . Некоторые классы процессов, имеющих такие сдвиги, приведены в § 5 (см. примеры 3—6).

§ 7. Распределение выпуклых функционалов

Функционал f , определенный на линейном пространстве X и принимающий значения из расширенной прямой \bar{R}^1 , называется выпуклым, если

- 1) $\forall x \ f(x) > -\infty$,
- 2) $\forall x, y \in X$ и $\forall p \in [0, 1]$

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y). \quad (7.1)$$

Цель настоящего параграфа состоит в исследовании строения распределения Pf^{-1} выпуклого функционала f в том случае, когда P — гауссова мера в X .

Непрерывные выпуклые функционалы. Следующий результат дает качественное описание распределения непрерывного выпуклого функционала.

Теорема 7.1. Предположим, что X — локально выпуклое метризуемое сепарабельное пространство, P — гауссовская мера в X , f — выпуклый функционал, непрерывный на носителе N_P меры P . Положим

$$a_0 = \inf_{x \in N_P} f(x). \quad (7.2)$$

Тогда 1) распределение Pf^{-1} сосредоточено на полупрямой $[a_0, \infty)$ и на (a_0, ∞) абсолютно непрерывно; 2) плотность $\frac{dPf^{-1}}{d\lambda}$ строго положительна на (a_0, ∞) .

Замечание 1. Можно показать, что P -почти всюду непрерывный выпуклый функционал будет на самом деле непрерывен на N_P . Поэтому теорема 7.1 применима в этом, формально более широком, случае.

Замечание 2. В силу того, что функционал f может быть представлен в виде

$$f(x) = \sup_n \xi_n(x), \quad (7.3)$$

где ξ_n — аффинные непрерывные функционалы, распределение Pf^{-1} совпадает с распределением супремума последовательности гауссовских величин. Поэтому обширная имеющаяся информация о распределении такого супремума (см., например, [61] и обзор [43]) может эффективно использоваться при изучении распределений выпуклых функционалов. Мы приведем здесь лишь один результат, принадлежащий Б. С. Цирельсону [58].

Теорема 7.2. Пусть (ξ_n) — гауссовская последовательность, для которой $E\xi_n \geq 0$, $\max_n D\xi_n > 0$ и $\zeta = \sup_n \xi_n < \infty$ почти наверное. Тогда 1) распределение величины ζ сосредоточено на полупрямой $[b_0, \infty)$, $b_0 = \inf\{b \mid P\{\zeta > b\} > 0\}$, причем на (b_0, ∞) оно абсолютно непрерывно; 2) плотность распределения ζ непрерывна на (b_0, ∞) за исключением быть может счетного числа точек, где она имеет скачки вниз; на $[b_0 + \varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, плотность имеет ограниченную вариацию.

Замечание 3. Следующий пример, принадлежащий Маркусу и Шелпу [67], показывает, что условие непрерывности f на N_P является существенным.

Пример 1. Пусть (η_n) — ортогауссовская последовательность, $c_n = (2 \ln n + 2 \ln \ln n)^{-1/2}$, $\xi_n = c_n \eta_n$. Тогда, как установлено в [67], $\sup_n \xi_n = 1$ с положительной вероятностью.

Пусть \mathbf{P} — распределение последовательности (ξ_n) в $X = \mathbb{R}^\infty$, $f(x) = \sup_n x_n$, $x = (x_n)$. Мера \mathbf{P} центрирована. Поэтому $0 \in N_{\mathbf{P}}$ и, значит, $a_0 \leq 0$. В то же время атом у $\mathbf{P}f^{-1}$ находится в точке 1.

Доказательство теоремы 7.1. Без ограничения общности можно считать, что $N_{\mathbf{P}} = X$. Положим $B = \{x \mid f(x) > a_0\}$ и покажем, что $\forall x \in B \exists l \in H_{\mathbf{P}}$ и такая выпуклая окрестность U точки x , что $\forall y \in U \mathbf{D}f(y) \neq 0$. Тогда, применив теорему 4.4, получим требуемое соотношение $\mathbf{P}_B f^{-1} \ll \lambda$.

По определению a_0 и по непрерывности f найдется x_1 , для которого $f(x) - f(x_1) = 2\delta > 0$. Из непрерывности f и непрерывности сложения в X следует также, что найдутся такие выпуклые окрестности U, U_1, U_2 соответственно точек x, x_1 и $x_1 - x$, что $\forall y \in U, y_1 \in U_1, y_2 \in U_2$

$$f(y) - f(y_1) > \delta \text{ и } y_2 + y_1 \in U_1.$$

Так как $H_{\mathbf{P}}$ всюду плотно, то найдется $l \in U_2 \cap H_{\mathbf{P}}$. Зафиксируем l и покажем, что пара U и l — искомая.

Пусть Γ — разбиение X на прямые, параллельные l . Рассмотрим функцию $f_v(c) = f(y + cl)$ — сужение функционала f на прямую $\{y + cl, c \in \mathbb{R}^1\}$, проходящую через точки $y \in U$ и $y + l \in U_1$. Функция f_v выпукла и непрерывна. Кроме того, по выбору окрестностей U и U_1

$$f_y(0) - f_y(l) = f(y) - f(y + l) > \delta.$$

Отсюда следует, что для почти всех c , для которых $y + cl \in U$, $f'_v(c) = \mathbf{D}f(y + cl) < 0$. Последнее означает, поскольку l — допустимое направление, что для \mathbf{P} -почти всех $y \in U \mathbf{D}f(y) \neq 0$. Тем самым абсолютная непрерывность $\mathbf{P}f^{-1}$ на (a_0, ∞) доказана.

Пусть $f(x) = c > a_0$. Покажем, что $\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}(c) > 0$. Пусть U и l — выпуклая окрестность x и допустимое направление, выбранные выше. отождествим X/Γ с $\ker x^*$, где x^* — непрерывный линейный функционал, для которого $\langle l, x^* \rangle = 1$. Пусть π — оператор проектирования X на X/Γ вдоль l :

$$\pi(y) = y - \langle y, x^* \rangle l.$$

Пересечение прямой $\pi^{-1}(\gamma)$ с U (для тех $\gamma \in X/\Gamma$, для которых оно непусто) представляет собой открытый интервал; обозначим его (b_γ, c_γ) . Выше мы видели, что сужение f на прямую $\pi^{-1}(\gamma_0)$, где $\gamma_0 = \pi(x)$, является строго убывающей функцией на $[b_{\gamma_0}, c_{\gamma_0}]$. Поскольку из $\gamma \rightarrow \gamma_0$ следует, что $b_\gamma \rightarrow b_{\gamma_0}$, $c_\gamma \rightarrow c_{\gamma_0}$, то найдутся такие выпуклые окрестности U_1 и U_2 точек b_{γ_0} и c_{γ_0} , что $\forall \gamma_1 \in U_1, \gamma_2 \in U_2$

$$f(b_{\gamma_1}) > c > f(c_{\gamma_2}).$$

Полагая $V = \pi(U_1) \cap \pi(U_2) \cap \pi(U)$, получим, что $\forall \gamma \in V$ сужение f на прямую $\pi^{-1}(\gamma)$ на интервале $[b_\gamma, c_\gamma]$ будет выпуклой строго убывающей функцией, причем $f(b_\gamma) > c > f(c_\gamma)$. Так как условная мера \mathbf{P}_γ является невырожденной гауссовской, то отсюда следует, что $\forall \gamma \in V$

$$\frac{d\mathbf{P}_\gamma f^{-1}}{d\lambda}(c) > 0. \quad (7.4)$$

Из формулы полной вероятности (3.5) находим, что

$$\frac{d\mathbf{P} f^{-1}}{d\lambda}(c) \geq \int_V \frac{d\mathbf{P}_\gamma f^{-1}}{d\lambda}(c) \mathbf{P}_\Gamma(d\gamma) > 0,$$

в силу (7.4) и того, что $\mathbf{P}_\Gamma(V) > 0$ ■

Распределение супремума непрерывного процесса. Рассмотрим подробнее случай, когда $X = \mathbf{C}(T)$, T — метрический компакт, а

$$f(x) = \sup_T x(t). \quad (7.5)$$

Очевидно, что f — выпуклый непрерывный на всем X функционал. Будем считать, что гауссовская мера \mathbf{P} в X является распределением непрерывного гауссовского процесса (ξ_t) , $t \in T$. Положим $a(t) = \mathbf{E}\xi_t$, $\sigma^2(t) = \mathbf{D}\xi_t$, $K(t, s)$ — корреляционная функция процесса ξ ,

$$a_1 = \sup_{t \in D_0} a(t), \quad (7.6)$$

где $D_0 = \{t \in T \mid \sigma^2(t) = 0\}$ — множество точек вырождения процесса ξ .

Теорема 7.3. [29]. Распределение $\mathbf{P}f^{-1}$ сосредоточено на $[a_1, \infty)$ и на (a_1, ∞) абсолютно непрерывно.

Замечание 4. Легко видеть, что всегда $a_1 \leq a_0$. Простые примеры показывают, что a_1 может быть строго меньше a_0 . В силу теорем 7.1 и 7.3 в этом случае $\mathbf{P}f^{-1}$ абсолютно непрерывно.

Доказательство. Обозначим через M_x множество тех $x \in T$, для которых $x(t) = f(x)$. Точки $t_1, t_2 \in T$ назовем \mathbf{P} -эквивалентными, если $\mathbf{P}\{x \mid x(t_1) = x(t_2)\} = 1$, т. е. если $\xi_{t_1} = \xi_{t_2}$, почти наверное. Обозначим через B_1 совокупность тех x , для которых все точки, входящие в M_x , \mathbf{P} -эквивалентны. По теореме 3 [59] (см. также теорему 3 [29]) $\mathbf{P}(B_1) = 1$.

Нам понадобится следующий просто проверяемый факт:

Лемма 7.1. Для любых $x, l \in X$

$$D_l^+ f(x) = \sup_{t \in M_x} l(t), \quad D_l^- f(x) = \inf_{t \in M_x} l(t). \quad (7.7)$$

Пусть $x \in B_1$ и $f(x) > a_1$. Заметим, что $\forall l \in H_p$ и $\forall t, s \in M_x$ выполняется равенство $l(t) = l(s)$. Действительно, условие $x \in B_1$ означает, что $N_p \subset \{y \mid y(t) = y(s)\}$. Но тогда поскольку $l \in N_p$,

то $l(t) + a(t) = l(s) + a(s)$. Так как $\xi_t = \xi_s$ почти наверное, то $a(t) = a(s)$. Отсюда и следует, что $l(t) = l(s)$.

Выберем какую-либо точку t_0 из M_x . Функция $l(s) = K(t_0, s)$ является (см. пример 2 § 5) допустимым сдвигом для \mathbf{P} . Так как $f(x) > a_1$, то $t_0 \notin D_0$. Поэтому $Dif(x) = l(t_0) > 0$. Теперь, повторяя рассуждения из первой части доказательства теоремы 7.1, легко найдем такую открытую окрестность U точки x , что для \mathbf{P} -почти всех $y \in U$ $Dif(y) > 0$. Применение теоремы 4.4 завершает доказательство ■

Приведем еще один результат, который показывает, что появление атома может определяться как ковариационными характеристиками, так и средними значениями процесса (ξ_t) .

Символами C_1 и C_0 будем обозначать соответственно замыкание и выпуклую оболочку в пространстве $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Множество $A \subset L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ назовем GB -множеством, если существует такой гауссовский процесс $\eta = (\eta_\alpha)$, $\alpha \in A$, с нулевым средним и ограниченными реализациями, что $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A$

$$E\eta_{\alpha_1}\eta_{\alpha_2} = E\alpha_1\alpha_2.$$

Вопрос о том, когда данное подмножество $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ является GB -множеством, практически решен (см. обзор [21]). Положим

$$a^- = \inf_{t \in T} a(t). \quad (7.8)$$

Теорема 7.4 [30]. Предположим, что $a_1 = a^-$. Для того, чтобы распределение $\mathbf{P}f^{-1}$ было абсолютно непрерывно, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из трех условий:

- 1) множество $K = \left\{ \frac{\xi_t - a(t)}{\sigma(t)}, t \in T, \sigma(t) \neq 0 \right\}$ не является GB -множеством в $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$;
- 2) $0 \notin C_1 C_0 K$;
- 3) $\sup_T \frac{a(t) - a^-}{\sigma(t)} = \infty$.

Поясним смысл этих условий. Роль условия 1). Для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$K_\varepsilon = \left\{ \frac{\xi_t - a(t)}{\sigma(t)}, \sigma(t) > \varepsilon \right\}$$

является GB -множеством. Поэтому условие 1) относится к поведению процесса вблизи точек вырождения. Например, винеровский процесс $w = (w_t)$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяет условию 1), но не 2) и 3). Абсолютная непрерывность $\mathbf{P}f^{-1}$ объясняется в данном случае большим колебанием стохастической компоненты процесса в окрестности точек вырождения.

Роль условия 2). Пусть (ξ_t) , $t \in [0, 1]$, — дифференцируемый процесс, $E\xi_t = 0$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$, $\xi_0' = \xi_1' \neq 0$. Тогда условия 1) и 3) не выполнены, но выполнено 2), поскольку

$$0 = \frac{\xi_0' - \xi_1'}{2(E(\xi_1')^2)^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi_t}{\sigma(t)} + \frac{1}{2} \frac{\xi_{1-t}}{\sigma(1-t)} \right) \in \text{Cl Co } K.$$

Здесь соотношение $f(\xi) > a_1$ выполняется, благодаря тому, что либо в окрестности нуля, либо в окрестности единицы $\xi_t > 0$.

Роль условия 3). Пусть $\xi_t = \sqrt{t + \eta_t}$, $t \in [0, 1]$, где η — дифференцируемый процесс, $E\eta_t = 0$, $\eta_0 = 0$. Очевидно, что в малой окрестности нуля $\xi_t > 0$, и потому в точке $a_1 = 0$ атом отсутствует. Здесь абсолютная непрерывность объясняется тем, что вблизи точек вырождения процесс вытягивается выше уровня a_1 за счет высоких средних значений.

Подробное доказательство теоремы 7.4 содержится в [30]. Там же имеется дополнительная информация об абсолютной непрерывности $\text{sup } \xi$, в случае произвольных средних значений.

Распределение нормы гауссовского вектора. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, $f(x) = \|x\|$, P — гауссовская мера в X .

Теорема 7.5. Предположим, что P не сосредоточена в одной точке. Тогда 1) если среднее $a_P \in H_P$, то $Pf^{-1} \ll \lambda$; 2) если каждая точка единичной сферы $\{x \mid \|x\| = 1\}$ является крайней, то есть если пространство X строго выпукло, то $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство. Если X строго выпукло или если $a_P = 0$, то существует единственная точка $x_0 \in N_P$, в которой f достигает минимума. Применяя теорему 7.1, получаем абсолютную непрерывность Pf^{-1} . В случае $a_P \in H_P$, $a_P \neq 0$ рассмотрим меру P_0 с нулевым средним, получаемую из P сдвигом на $-a_P$. По доказанному $P_0 f^{-1} \ll \lambda$, а так как P_0 эквивалентна P , то и $Pf^{-1} \ll \lambda$. ■

Если X не является строго выпуклым, то всегда найдется гауссовская мера P ($a_P \neq 0$), для которой распределение Pf^{-1} имеет атом. Например, если отрезок $[x_0, x_1]$ таков, что $\forall c \in [0, 1] \|cx_0 + (1-c)x_1\| = 1$, то в качестве P можно взять меру, носителем которой является прямая, проходящая через точки x_0 и x_1 .

В связи с исследованием скорости сходимости в центральной предельной теореме в банаховых пространствах представляет интерес вопрос об ограниченности плотности нормы гауссовского вектора.

Теорема 7.6. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — конечномерное банахово пространство. Если $a_P = 0$ или если $N_P = X$, то распределение Pf^{-1} имеет ограниченную плотность.

Замечание 5. Если $a_P \neq 0$ и $N_P \neq X$, то как показывает пример гауссовской меры в R^2 с одномерным носителем и отличным от нуля средним, плотность распределения Pf^{-1} может быть неограничена.

В бесконечномерном случае положение является более сложным. Следующий пример построен М. А. Лифшицем. Анало-

точный результат независимо получен В. Паулаускасом [41, 42].

Теорема 7.7. В пространстве $c_0 = \{x = (x_n) \mid x_n \rightarrow 0\}$, $\|x\| = \sup_n |x_n|$, существует гауссовская мера \mathbf{P} с нулевым средним,

для которой плотность распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ не ограничена.

Опишем структуру этой меры. Пусть $\{\xi_{k,i}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, n_k$, — треугольный массив независимых гауссовских центрированных величин. При этом все величины $\{\xi_{k,i}\}$, $i = 0, 1, \dots, n_k$, имеют одинаковые дисперсии σ_k^2 . Последовательности $\{n_k\}$, $\{\sigma_k\}$, а также $\{y_k\}$, определим индуктивно. Положим $\sigma_1 = (2\pi e)^{-1/2}$, $n_1 = 10$, $y_1 = \sigma_1 \left(2 \ln \frac{n_1}{\sqrt{\ln n_1}}\right)^{1/2}$. Если n_j, σ_j, y_j определены при $j < k$, то полагаем $y_k = \min \left\{ \frac{y_{k-1}}{4}, \sigma_{k-1} \right\}$. Далее выберем n_k так, чтобы

$$n_k \geq \max \left\{ 10, \exp \left\{ y_k^{1 - \sum_{j=1}^{k-1} n_j} \prod_{j=1}^{k-1} (V 2\pi e \sigma_j)^{n_j} k \right\} \right\}.$$

Пусть, наконец,

$$\sigma_k = y_k \left(2 \ln \frac{n_k}{\sqrt{\ln n_k}} \right)^{-1/2}. \quad (7.9)$$

Тогда $n_k \rightarrow \infty$, $\sigma_k \leq y_k \leq c4^{-k}$. Располагая величины $\{\xi_{k,i}\}$ в последовательность, видим, что ее распределение \mathbf{P} помещается в c_0 . Можно показать, что

$$\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}(y_k) \geq k.$$

Тем самым плотность распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ не ограничена.

Из представления нормы в виде супремума модуля линейных функционалов следует, что $\mathbf{P}f^{-1}[0, \varepsilon]$ убывает при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε . Поэтому неограниченность плотности распределения нормы центрированного гауссовского вектора может достигаться только за счет редких осцилляций с амплитудой, возрастающей по мере приближения к нулю.

Следующая теорема показывает, что в пространствах L^p , $1 < p < \infty$, подобное явление невозможно.

Теорема 7.8. Пусть (T, \mathfrak{E}, τ) — измеримое пространство со счетно порожденной σ -алгеброй \mathfrak{E} и σ -конечной мерой, и \mathbf{P} — гауссова мера в пространстве $X = L^p(T, \mathfrak{E}, \tau)$. Пусть $f(x) = \|x\| = \left(\int_T |x(t)|^p \tau(dt) \right)^{1/p}$. Если $a_p = 0$ или если $\dim N_p \geq p$, то плотность распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ ограничена.

Замечание 6. При $p=2$ этот результат хорошо известен (см. [66, 71]): Для пространств l^p , $1 \leq p < \infty$, в предположении, что достаточно большое (в зависимости от p) число пер-

вых координат x_1, \dots, x_N по мере \mathbf{P} независимы между собой и не зависят от оставшейся последовательности (x_{N+1}, \dots) , ограниченность плотности нормы получена в [39].

Доказательство. В случае $a_p = 0$, $\dim N_p < p$ доказываемый результат следует из теоремы 7.6. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $\dim N_p \geq p$. Нам будет удобно от исходной задачи перейти к эквивалентной ей и считать, что мера \mathbf{P} центрирована, а функционал f имеет вид: $f(x) = \|x + a\|$, $a \in X$.

Выберем функционалы $x_i^* \in X^*$, $i = 1, \dots, d$; d — наименьшее число, для которого $p \leq d$, так, чтобы они как элементы X_p образовывали ортонормальную систему. Пусть E — подпространство, порожденное векторами $l_i = K_p x_i^*$, $i = 1, \dots, d$; K_p — корреляционный оператор меры \mathbf{P} . Пусть Γ — разбиение X на d -мерные аффинные многообразия, параллельные E . Факторпространство X/Γ отождествим с подпространством $Y = \bigcap_1^d \text{Ker } x_i^*$. По формуле полной вероятности (5.3)

$$\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}(t) = \int_Y q_y(t) \mathbf{P}_Y(dy), \quad (7.10)$$

где $q_y = \frac{d\mathbf{P}_y f^{-1}}{d\lambda}$.

Лемма 7.2. Существует такое $C > 0$, что при $p \geq 2$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} q_y(t) \leq C(1 + \|a\|^{d-1} + \|y\|^{d-1}), \quad (7.11)$$

при $1 < p < 2$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} q_y(t) \leq C(1 + \|a\|^2 + \|y\|^2). \quad (7.12)$$

Из этой леммы, соотношения (7.10) и теоремы Ферника [12, с. 129] сразу следует доказательство теоремы.

Докажем лемму 7.2. Пусть $y \in Y$. На элементе разбиения $y + E$ введем параметризацию с помощью отображения $I_y: \mathbb{R}^d \rightarrow y + E$, $I_y(\bar{c}) = y + \sum_1^d c_k l_k$. По предложению 5.2, условное распределение \mathbf{P}_y совпадает с $\mathbf{Q}I_y^{-1}$, где \mathbf{Q} — стандартная гауссовская мера в \mathbb{R}^d . Положим $f_y = f \circ I_y$. Тогда $q_y = \frac{d\mathbf{Q}f_y^{-1}}{d\lambda}$.

Обозначим через $\bar{m}_y = (m_1, \dots, m_d)$ ту точку \mathbb{R}^d , в которой f_y достигает минимума. В силу строгой выпуклости нормы в X при $p \in (1, \infty)$ \bar{m}_y определяется однозначно.

Рассмотрим разбиение Θ пространства \mathbb{R}^d на лучи $L_\theta = \{\bar{m}_y + s\theta, s \in \mathbb{R}_+\}$, выходящие из точки \bar{m}_y . Факторпространство

R^d/Θ отождествим с единичной евклидовой сферой S_1 . Сужение функции f_y на луч L_θ имеет вид $f_{y,\theta}(s) = \|a + y + m_y + s\theta\|$,

где $m_y = \sum_1^d m_k l_k$.

Положим $\Psi_\theta(s) = f_{y,\theta}^p(s)$ и будем сначала считать, что $p \geq 2$. Элементарный анализ показывает, что справедлива

Лемма 7.3. Пусть $p \geq 2$. Существует такое $C > 0$, что $\forall s \in R_+$ выполняется неравенство

$$\Psi'_\theta(s) \geq Cs^{p-1}. \quad (7.13)$$

Из (7.13) следует, что

$$f'_{y,\theta}(s) = \frac{1}{p} [f_{y,\theta}(s)]^{p-1} \Psi'_\theta(s) \geq Cs^{p-1} (\|a + y + m_y\| + s)^{1-p}. \quad (7.14)$$

Нетрудно видеть, что условная мера Q_θ на луче L_θ имеет плотность

$$r_\theta(s) = s^{d-1} (2\pi)^{-d/2} \kappa(\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(s\theta + \bar{m}_y, s\theta + \bar{m}_y)\right\}, \quad (7.15)$$

где κ — плотность фактормеры Q_θ относительно равномерного распределения $d\theta$ на сфере S_1 .

Функция $s \rightarrow f_{y,\theta}(s)$, $s \in R_+$, является выпуклой и строго возрастающей. Поэтому, полагая $s = f_{y,\theta}^{-1}(t)$, получим

$$\frac{dQ_\theta f_y^{-1}}{d\lambda}(t) = \frac{1}{f'_{y,\theta}(s)} r_\theta(s).$$

Пользуясь соотношениями (7.13) — (7.15), находим

$$\begin{aligned} \sup_t \frac{dQ_\theta f_y^{-1}}{d\lambda}(t) &\leq \frac{C}{\kappa(\theta)} \sup_{s \in R_+} \left\{ s^{d-p} (\|a + y + m_y\| + s)^{p-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(s\theta + \bar{m}_y, s\theta + \bar{m}_y)\right\} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко выводится, что

$$\sup_t q_y(t) \leq \int_{S_1} \sup_t \frac{dQ_\theta f_y^{-1}}{d\lambda}(t) \kappa(\theta) d\theta \leq C(1 + \|y\| + \|m_y\| + \|a\|)^{d-1}.$$

Поскольку $\|m_y\| \leq 2\|y + a\|$, то мы приходим к (7.11).

В случае $p \in (1, 2)$ (7.13) заменяется неравенством

$$\begin{aligned} \Psi'_\theta(s) &\geq p(p-1) \left[s \int_B \frac{|\theta(t)|^2}{(1+b(t))^{2-p}} \tau(dt) + \right. \\ &\quad \left. + s^{p-1} \int_{T \setminus B} \frac{|\theta(t)|^p}{(1+b(t))^{p-p}} \tau(dt) \right], \quad (7.16) \end{aligned}$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, $\theta(t) = \sum_1^d \theta_k l_k(t)$, $b(t) = |a(t) + y(t) + m_y(t)|$,
 $B = \left\{ t \in T \mid |\theta(t)| < \frac{1}{s} \right\}$. Пусть $T_A = \{t \mid l_k(t) \leq A, \forall k = 1, \dots, d\}$.
 Из (7.16) следует, что

$$\Psi'_\theta(s) \geq \frac{p(p-1)}{(dA)^{2-p}} \int_{T_A} \frac{|\theta(t)|^2}{(1+b(t))^{2-p}} \tau(dt) \cdot (s \wedge s^{p-1}). \quad (7.17)$$

Лемма 7.3. Существует такое $A > 0$, что

$$\inf_{\theta \in S, T_A} \int |\theta(t)|^2 \tau(dt) = \sigma > 0.$$

Из этой леммы и (7.17) уже легко получить оценку

$$\Psi'_\theta(s) \geq C(1 + \|a + y + m_y\|)^{p-2} (s \wedge s^{p-1}).$$

Поэтому

$$f'_{y,\theta}(s) \geq C(1 + \|a + y + m_y\|)^{-1} (s \wedge s^{p-1}).$$

Теперь, подобно случаю $p \geq 2$, придем к (7.12). Лемма 7.2, а вместе с ней и теорема 7.5, доказаны ■

Отметим в заключение еще два результата о существовании ограниченной плотности у нормы гауссовского вектора. К сожалению, они далеко не полны.

1) $X = c_0$, $\|x\| = \sup_k |x_k|$, мера \mathbf{P} отвечает последовательности независимых гауссовских величин. В [41, теорема 2] содержатся некоторые достаточные условия, обеспечивающие ограниченность $\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}$.

2) $X = \mathbf{C}[0,1]$, \mathbf{P} — мера, отвечающая непрерывному стационарному гауссовскому процессу. В этом случае ограниченность $\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}$ может быть установлена с помощью леммы 1 [71].

§ 8. Ограниченность плотности распределения функционалов интегрального типа

Мы установили в § 6, что если дифференциал функционала f отличен от нуля почти наверное относительно меры \mathbf{P} , то распределение $\mathbf{P}f^{-1}$ абсолютно непрерывно. Сейчас мы дадим оценки плотности $\frac{d\mathbf{P}f^{-1}}{d\lambda}$ через вероятности множеств, на которых дифференциал близок к нулю. Особый интерес представляют условия, при которых плотность ограничена, так как ограниченность плотности позволяет получить оценки скорости сходимости распределений функционала в принципе инвариантности и бесконечномерной центральной предельной теореме [4—6].

Пусть X — сепарабельное (метризуемое) локально выпуклое пространство. Пусть \mathbf{P} — гауссовская мера на X , и задан измеримый функционал $f: X \rightarrow R^1$.

Теорема 8.1. Пусть $B \in \mathfrak{D}_X$, $\{B_n\}$ и $\{E_n\}$ — два покрытия множества B . Пусть задана последовательность \mathbf{P} -допустимых сдвигов l_n в пространстве X . Предположим, что $B_n \subset E_n$, а E_n высекает на любой прямой, параллельной вектору l_n , выпуклое множество.

Положим

$$b_n = \inf_{x \in E_n} [\sup_{c \in R^1} \{c \mid x + cl_n \in E_n\} - \inf_{c \in R^1} \{c \mid x + cl_n \in E_n\}].$$

b_n — это минимальная длина интервала, высекаемого множеством E_n на прямой вида $\{x + cl_n, c \in R^1\}$.

Предположим, что функционал f монотонен на B_n вдоль направления l_n и производная допускает оценку

$$\inf_{x \in B_n} |D_{l_n} f(x)| \geq d_n. \quad (8.1)$$

Тогда

$$S = \sup_{v \in R^1} \frac{d\mathbf{P}_B f^{-1}}{d\lambda}(v) \leq C \sum_n \mathbf{P}(E_n) (2 + |2 \ln \mathbf{P}(E_n)|^{1/2}) d_n^{-1} (\sigma(l_n)^{-1} + b_n^{-1}), \quad (8.2)$$

где C — абсолютная константа, а $\sigma(l_n)$ — мера допустимости сдвига l_n , определенная в замечании 3 к теореме 5.1.

Доказательство. Пусть Γ_n — разбиение пространства X на прямые, параллельные l_n . Через $\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_\gamma^n$ обозначим соответствующую фактормеру и условные меры. Поскольку $B \subset \bigcup_n B_n$, то

$$S \leq \sum_n \sup \frac{d\mathbf{P}_{B_n} f^{-1}}{d\lambda} \leq \sum_n \int_{X/\Gamma_n} \sup \frac{d\mathbf{P}_{\gamma, B_n}^n f^{-1}}{d\lambda} \mathbf{P}_n(d\gamma). \quad (8.3)$$

Пользуясь формулой (4.19) и оценкой (8.1), получим, что каждое слагаемое в (8.3) не превосходит

$$d_n^{-1} \int_{X/\Gamma_n} \sup \frac{d\mathbf{P}_\gamma}{d\lambda_\gamma} \mathbf{P}_n(d\gamma). \quad (8.4)$$

Здесь λ_γ — инвариантная мера на прямой, определенная в § 4. Для оценки плотности условной меры используем такой элементарный результат.

Лемма 8.1. Пусть $\Phi = \Phi(a, \sigma^2)$ — гауссовская мера на прямой со средним a и дисперсией σ^2 . Пусть $\varphi = \frac{d\Phi}{d\lambda}$, U — интервал на прямой. Пусть длина U не меньше b . Положим $\rho = \inf_{c \in U} |c - a|$.

Тогда для некоторых абсолютных постоянных c_1, c_2

$$\Phi(U) \leq c_1 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (8.5)$$

$$\sup_{u \in U} \varphi(u) \leq c_2 \Phi(U) \left(1 + \frac{\rho}{\sigma} \right) (\sigma^{-1} + b^{-1}). \quad (8.6)$$

Применим для оценки $\frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}$ лемму в следующей ситуации.

Пусть a_γ — центр гауссовской меры P_γ . Пусть $\Phi = P_\gamma$, $U = \gamma \cap \cap E_n$, $b = b_n$, $\sigma = \sigma(l_n)$, $\rho_\gamma = \inf \{ |c| \mid a_\gamma + cl_n \in B_n \}$.

Применяя (8.6), видим, что (8.4) не превосходит

$$c_2 d_n^{-1} (\sigma(l_n)^{-1} + b_n^{-1}) \int_{X/\Gamma_n} P_\gamma(E_n) (1 + \rho_\gamma \sigma(l_n)^{-1}) P_\Gamma(d\gamma). \quad (8.7)$$

Разобьем интеграл (8.7) на две части, соответствующие условиям

$$\rho_\gamma \sigma(l_n)^{-1} \leq |2 \ln P(E_n)|^{1/2} + 1, \quad (8.8)$$

$$\rho_\gamma \sigma(l_n)^{-1} > |2 \ln P(E_n)|^{1/2} + 1. \quad (8.9)$$

Для области интегрирования, определяемой условием (8.8), применяя формулу полной вероятности (3.2), мы сразу приходим к (8.2). Для области интегрирования, определяемой условием (8.9), применим оценку (8.5) к $P_\gamma(E_n)$. Поскольку функция $v \rightarrow (1+v) \exp(-v^2/2)$ убывает при $v > 1$, соответствующая часть (8.7) не превосходит

$$\begin{aligned} & c_2 d_n^{-1} (\sigma(l_n)^{-1} + b_n^{-1}) c_1 (2 + |2 \ln P(E_n)|^{1/2}) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (|2 \ln P(E_n)|^{1/2} + 1)^2 \right\} \leq \\ & \leq c_1 c_2 d_n^{-1} (\sigma(l_n)^{-1} + b_n^{-1}) (2 + |2 \ln P(E_n)|^{1/2}) P(E_n). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Возвращаясь от (8.10) к (8.7), (8.4), (8.3), получим (8.2) ■

Для интегральных функционалов производная по направлению имеет достаточно простой вид (6.10) и легко оценивается снизу. Для целого ряда примеров мы в § 5 вычислили или оценили меры допустимости. Поэтому из теоремы 8.1 можно вывести ряд следствий применительно к нескольким типам часто встречающихся процессов и функционалов.

Теорема 8.2. Пусть $\omega_\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — полуустойчивый гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией (5.9). Пусть $q: \mathbb{R}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримая по паре переменных функция, и для некоторого $v > 0$ функция $q(\cdot, t)$ не убывает (или не возрастает) одновременно для всех $t \in [0, 1]$ на отрезках $(0, v)$ и $(-v, 0)$. Пусть c_1, c_2, c_3 — положительные числа,

$$c_2 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/\alpha} \left| \ln P \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\omega_\alpha(t)| \leq \varepsilon \right\} \right|, \quad (8.11)$$

и при почти всех $u \in (-v, v)$ и всех $t \in [0, 1]$

$$|D_u q(u, t)| \geq c_1 \exp\{-c_2 |u|^{-2/\alpha}\} t^{c_1}. \quad (8.12)$$

Тогда распределение случайной величины

$$f(\omega_\alpha) = \int_0^1 q(\omega_\alpha(t), t) \lambda(dt)$$

имеет ограниченную плотность по мере Лебега.

Замечание. При $\alpha = 1$ мы имеем дело с винеровским процессом, для которого (8.11) превращается в неравенство $c_2 < \frac{\pi^2}{8}$.

Случай винеровского процесса последовательно рассматривался в работах [69, 46, 4, 31, 47]. Наименее обременительное из известных достаточных условий ограниченности плотности $f(\omega_1)$ имеет [47] вид

$$|D_u q(u, t)| \geq c_1 \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8} |u|^{-2}\right\} |u|^{-1}.$$

Аналогичный результат справедлив и для броуновского моста. Рассмотрение функции $q(v, t) = \exp(-c|v|^{-2})$ показывает, что постоянную c_2 в формулировке теоремы нельзя увеличить.

Если ядро q зависит только от пространственной переменной, то мы можем рассмотреть более широкий класс процессов. Пусть (ξ_t) — гауссовский процесс с непрерывными траекториями, заданный на конечном интервале T , и P — соответствующая мера в банаховом пространстве $C(T)$.

Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_T q(x(t)) \lambda(dt). \quad (8.13)$$

Сделаем следующие предположения относительно f и ξ .

1) Функция q непрерывно дифференцируема и при малых v длина наибольшей компоненты множества $K_\varepsilon = \{v \mid |q'(v)| \leq \varepsilon\}$ не превосходит $c_1 \varepsilon^{c_2}$, а расстояние между его компонентами не меньше c_3 . Здесь и далее c_i — несущественные для наших целей положительные постоянные.

2) Модуль непрерывности процесса ξ удовлетворяет оценке

$$P\{\omega_\xi(r) > r^{c_4}\} \leq c_5 \exp\{-r^{-c_4}\}. \quad (8.14)$$

3) Для любого отрезка $I \subset T$ существует неотрицательная функция $l_I \in C(T)$ такая, что носитель l_I принадлежит I , $l_I \in H_P$ и

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \int_{|I| < r} l_I(t) \lambda(dt) \cdot \sigma_P(l_I) r^{-c_1} > 0. \quad (8.15)$$

4) Для любого отрезка $I \subset T$ семейство случайных величин $\{\xi_t, t \in I\}$ бесконечномерно в $L^2(C(T), P)$.

Теорема 8.3. Если ξ и f удовлетворяют условиям 1—4, то плотность распределения Pf^{-1} ограничена.

Доказательство. Положим $r_n = 2^{-n}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $T = [0, 1]$. Пусть $I_{n,j} = [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$ при $0 \leq j \leq 2^n - 1$, $n = 3, 4, 5, \dots$. Положим $l_{n,j} = I_{n,j}$.

Будем говорить, что отрезок $I \subset T$ свободен от множества $K \subset R^1$ для траектории $x \in C(T)$, если $x(I) \cap K = \emptyset$. Введем несколько подмножеств пространства $C(T)$: $F_{n,j} = \{x \mid I_{n,j} \text{ свободен от } K_{r_n} \text{ для } x, \forall v \text{ отрезок } I_{n-1,v} \text{ не свободен от } K_{r_{n-1}}\}$; $B_{n,j}^1 = \{x \mid x(j2^{-n}) \in K_{r_{n-1}}\} \cap F_{n,j}$; $B_{n,j}^2 = \{x \mid x(j2^{-n}) \notin K_{r_{n-1}}, I_{n,j} \text{ не свободен от множества } K_{r_{n-1}} \cap (x(j2^{-n}), \infty)\} \cap F_{n,j}$; $B_{n,j}^3 = \{x \mid x(j2^{-n}) \notin K_{r_{n-1}}, I_{n,j} \text{ не свободен от множества } K_{r_{n-1}} \cap (-\infty, x(j2^{-n}))\} \cap F_{n,j}$; $B_{n,j}^4 = \{x \mid I_{n,j} \text{ свободен от } K_{r_{n-1}}\} \cap F_{n,j}$; $E_{n,j}^i = \{x \mid x = y + cl_{n,j}, y \in B_{n,j}^i, c \in R^1\}$.

Проверка следующих элементарных свойств введенных объектов предоставляется читателю.

А) $B_{n,j}^i \subset E_{n,j}^i$.

Б) Для всех i, n, j множества $B_{n,j}^i$ и $E_{n,j}^i$ высекают на любой прямой, параллельной вектору $l_{n,j}$, выпуклые множества.

В) $\bigcup_i B_{n,j}^i = F_{n,j}$.

Г) $\bigcup_{i,n,j} B_{n,j}^i = \bigcup_{n,j} \{x \mid I_{n,j} \text{ свободен от } K_{r_n}\}$, при этом дополнение к последнему множеству состоит только из функций, принимающих только одно значение (этим значением может быть любой нуль функции q'). Из условия 4 и свойства Г) следует, что $\{B_{n,j}^i\}$ — покрытие P -почти всего пространства $C(T)$.

Д) Для любых i, n, j и траектории $x \in E_{n,j}^i$ среди отрезков $[0, 1/4]$, $[3/8, 5/8]$, $[3/4, 1]$ найдется такой отрезок Δ , что при $I_{n-1,v} \subset \Delta$ отрезок $I_{n-1,v}$ не свободен от $K_{r_{n-1}}$ для x . В качестве Δ можно взять тот отрезок, который не пересекается с $I_{n,j}$.

Свойство Д) означает, что траектория x на всем Δ лишь ненадолго пскидает узкое множество $K_{r_{n-1}}$. Если при этом x успевает побывать в различных компонентах множества $K_{r_{n-1}}$, то переход между компонентами длится не дольше, чем $2r_{n-1}$ и, в силу условия 1,

$$\omega_x(2r_{n-1}) \geq c_3. \quad (8.16)$$

Если x успевает за промежуток времени Δ побывать только в одной из компонент множества $K_{r_{n-1}}$, но удаляется от нее на расстояние $(2r_{n-1})^{c_4}$, то

$$\omega_x(2r_{n-1}) \geq (2r_{n-1})^{c_4}. \quad (8.17)$$

В остальных случаях x за промежуток Δ не выходит за пределы полосы, ширина которой

$$c_1 r_{n-1}^{c_2} + 2(2r_{n-1})^{c_4} \leq (c_1 + 2c_4) r_{n-1}^{c_4}.$$

Отсюда

$$\sup_{s, t \in \Delta} |x(t) - x(s)| \leq c_3 r_n^{c_0}. \quad (8.18)$$

Оценивая вероятности событий (8.16), (8.17) с помощью условия 3, а вероятность события (8.18) — с помощью условия 4, получим, что для любого $\beta > 0$ для некоторой постоянной c_β , зависящей только от β ,

$$P(E_{n,j}^i) \leq c_\beta r_{n-1}^\beta. \quad (8.19)$$

Поскольку при $x \in B_{n,j}^i$ отрезок $I_{n,j}$ свободен от K_{r_n} , то

$$|D_{I_{n,j}} f(x)| = \left| \int_{I_{n,j}} l_{n,j}(t) q'(x(t)) dt \right| \geq r_n \int_{I_{n,j}} l_{n,j}(t) dt.$$

Применяя к покрытиям $\{B_{n,j}^i\}$, $\{E_{n,j}^i\}$ теорему 8.1, получим из (8.19), (8.15)

$$\begin{aligned} & \sup_{v \in R^1} \frac{dP^{f^{-1}}}{d\lambda}(v) \leq \\ & \leq 4C \sum_{n,j} \sup_j \left(\int_{I_{n,j}} l_{n,j}(t) dt \right)^{-1} \sigma(l_{n,j})^{-1} c_\beta r_{n-1}^\beta |\ln r_{n-1}|^{1/2} \leq \\ & \leq c_9 c_\beta \sum_n r_{n-1}^\beta r_n^{c_1} r_n^{-1} |\ln r_{n-1}|^{1/2}. \end{aligned}$$

При достаточно большом β этот ряд сходится ■

Обсудим условия теоремы 8.3. Степенная оценка в условии 1 — это аналог оценки q' снизу (8.12). Степенную оценку можно ослабить до логарифмической, если располагать оценкой для малых уклонений ξ вида

$$P \left\{ \sup_{s, t \in \Delta} |x(t) - x(s)| < r \right\} \leq C \exp\{-cr^{-c}\}, \quad r \rightarrow 0,$$

как это имеет место для винеровского процесса.

Полагая $q(v) = \sin j(k)v$ на отрезке $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, легко построить пример, в котором неограниченность плотности распределения $f(\xi)$ достигалась бы за счет быстрого роста функции j , т. е. сближения компонент K_ε между собой.

Условие 2 означает, что траектории процесса удовлетворяют условию Гёльдера. Достаточные условия для справедливости подобных утверждений хорошо известны [1]. Условие 4 легко проверяется во всех интересных случаях.

Пример 1. Пусть ξ — стационарный гауссовский процесс с квазирациональной спектральной плотностью ρ_ξ , т. е. для целого n и положительных чисел c_{10} , c_{11} и достаточно больших s

$$c_{10}(1+|s|)^{-2n} \leq p_{\xi}(s) \leq c_{11}(1+|s|)^{-2n}.$$

Тогда процесс ξ удовлетворяет условиям 2—4.

Доказательство. Предъявим систему функций $\{l_I\}$, удовлетворяющую (8.15). Пусть l_0 — ненулевая неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой лежит в $[0, 1]$. Для любого отрезка $I = [a, b]$ положим

$$l_I(t) = l_0\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Оценка (5.15) обеспечивает выполнение (8.15), причем $c_7 = n + \frac{1}{2}$ ■

Пример 2. Любая алгебраическая комбинация алгебраических и тригонометрических полиномов может рассматриваться как ядро q функционала f и удовлетворяет условию 1.

Один из вариантов теоремы 9.3 доказан в [28]. Теорему 8.1 можно использовать для получения неравномерных оценок плотности Pf^{-1} [31]. Рассмотрим применение теоремы 8.1 к проекциям броуновского моста (см. (5.16)). Для простоты формулировок ограничимся случаем одного направления x . Пусть w — процесс броуновского движения, $x(0) = x(1) = 0$, $\|x'\|_2 = 1$,

$$\xi(t) = w(t) - tw(1) - x(t) \int_0^1 x'(s) dw(s). \quad (8.20)$$

Рассмотрим интегральный функционал

$$f(\xi) = \int_0^1 q(\xi(t), t) \lambda(dt).$$

Относительно ядра q , как и в теореме 8.2, предположим, что для некоторого $v > 0$ функция $q(\cdot, t)$ не убывает (или не возрастает) на отрезках $(0, v)$ и $(-v, 0)$ одновременно для всех $t \in [0, 1]$. Следующий пример показывает, что условия (8.12) недостаточно даже для невырожденности распределения f .

Пример 3. Пусть x дважды непрерывно дифференцируема. Положим $q(u, t) = cx''(t)u$. Из (8.20) видим, что

$$f(\xi) = c \int_0^1 x''(t) \xi(t) \lambda(dt) = -c \int_0^1 x'(t) d\xi(t) = 0.$$

Поэтому необходимо накладывать дополнительные условия, которые обеспечивали бы различие функций $q_u'(u, t)$ и $cx''(t)$. Приведем два варианта таких условий. Через $\text{Lip}(\alpha)$ обозначим класс функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α .

Теорема 8.4. Пусть $x \in \text{Lip}(\alpha)$, $c_1 - c_7$ — положительные постоянные. Предположим, что при $t \leq t_0$

$$c_1 \exp\{-c_2 |u|^{-2}\} t^{c_6} \leq |q_u'(u, t)| \leq c_3 t^{-c_7}, \quad (8.21)$$

при достаточно малых t существует κ'' и

$$|\kappa''(t)| \geq c_4 t^{-c_1}, \quad (8.22)$$

$$c_7 < c_5, \quad c_2 \frac{3-c_5}{c_5-c_7} < \frac{\pi^2}{8} t_0. \quad (8.23)$$

Тогда распределение $\mathbf{P}f^{-1}$ имеет ограниченную плотность.

Теорема 8.5. Пусть $\kappa \in \text{Lip}(\alpha)$, $\delta > 0$ и для любых пар (t_1, u_1) , (t_2, u_2) из неравенств $t_2 < (1-\delta)t_1 < (1-\delta)t_0$, $|u_2| < (1-\delta)|u_1|$ следует

$$\left| \frac{q_{u'}(u_2, t_2)}{\kappa''(t_2)} \right| < \left| \frac{q_{u'}(u_1, t_1)}{\kappa''(t_1)} \right| (1-\delta). \quad (8.24)$$

Пусть $c_2 < \frac{\pi^2}{8}$ и при $t < t_0$

$$c_1 \exp\{-c_2 |u|^{-2}\} t^{c_1} \leq |q_{u'}(u, t)|. \quad (8.25)$$

Тогда распределение $\mathbf{P}f^{-1}$ имеет ограниченную плотность.

Теорема 8.4 применима только в том случае, когда κ'' бесконечна в окрестности нуля. Отметим, что квадратичная интегрируемость κ' не позволяет рассчитывать на получение в (8.22)

оценки с $c_5 \geq 3/2$. Поэтому дробь $\frac{3-c_5}{c_5-c_7}$ из (8.23) не может быть больше единицы и условие (8.23) более жесткое, чем условие $c_2 < \frac{\pi^2}{8}$ из теоремы 8.5. Преимущество теоремы 8.4 — в отсут-

ствии условий, налагаемых совместно на q и κ . Расхождение $q_{u'}$ и κ'' обеспечивается здесь за счет неравенства $c_7 < c_5$.

Теорема 8.5 приспособлена к случаю, когда κ'' имеет конечный предел в нуле. Тогда (8.24) — это, в сущности, требование монотонности $q_{u'}$. При этом ограничение (8.25) имеет точную константу c_2 , как и в случае винеровского процесса и броуновского моста. Грубая асимптотика малых уклонений гауссовского процесса не изменяется при конечномерном проектировании. Поэтому константа $\frac{\pi^2}{8}$, возникающая для случая $\kappa=0$ в (8.11), сохраняет свою роль и для ξ .

Отметим, что функционалы типа ω^2 с ядрами

$$q(u, t) = q_0(t) u^2,$$

часто встречающиеся в статистике, подчиняются условиям теорем 8.4, 8.5. Разумеется, ограниченность плотности для них нетрудно установить, представляя $f(\xi)$ в виде суммы квадратов независимых гауссовских величин.

Условия, накладываемые на κ , симметричны относительно концов отрезка $[0, 1]$. Поэтому теоремы 8.4, 8.5 допускают очевидную переформулировку, в которой накладываются ограничения на q' и κ'' в окрестности $t=1$.

**ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ПРОЦЕССОВ
С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ**

**§ 9. Допустимые полугруппы для процессов
с независимыми приращениями**

Процесс $(\xi_t), t \in R_+$, называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi_0, \xi_{t_1} - \xi_0, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы.

Характеристическая функция стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями определяется формулой:

$$\begin{aligned} & \ln E \exp \{iu (\xi_t - \xi_0)\} = \\ & = ia(t)u - \frac{\sigma^2(t)u^2}{2} + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp \{iux\} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \Pi(dx, ds). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Мера Π называется мерой Леви—Хинчина процесса ξ . Она определена на $R^1 \times R_+$ и удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{x^2}{1+x^2} \Pi(dx, ds) < \infty \quad \forall t \in R_+. \quad (9.2)$$

Обоснование формулы (9.1) и других свойств процессов с независимыми приращениями можно найти в [49]. Процессу ξ можно [49, с. 48] сопоставить меру P в полном метрическом пространстве $(D[0, 1], d_0)$.

Чтобы применить метод расслоений, мы должны найти достаточное количество допустимых полугрупп для меры P . К сожалению, здесь уже нельзя, как в гауссовском случае, ограничиться линейными полугруппами вида (5.1). Два следующих предложения показывают, что запас допустимых направлений для мер без гауссовской компоненты состоит не более чем из одного направления.

Предложение 9.1. Для того чтобы функция вида $l(t) \equiv 1$ порождала допустимое направление для P , необходимо и достаточно, чтобы распределение ξ_0 было абсолютно непрерывно по мере Лебега λ и имело положительную плотность.

Доказательство этого предложения тривиально.

Предложение 9.2. Если $\xi_0 = c$ и гауссовская компонента отсутствует (т. е. $\sigma(t) \equiv 0$ в (9.1)), то P не имеет допустимых сдвигов и направлений.

Доказательство. Пусть l — допустимый сдвиг для \mathbf{P} . Определим меру \mathbf{P}^l соотношением

$$\mathbf{P}^l(A) = \mathbf{P}(A - l), \quad A \subset D[0, 1].$$

Введем последовательность процессов

$$\xi_n(t) = \xi(t) - \int_{\{|\kappa| > \varepsilon_n\}} \int_0^t [\kappa v(d\kappa, ds) - \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \Pi(d\kappa, ds)],$$

где $v(d\kappa, ds)$ — случайная мера скачков процесса ξ . Если $\varepsilon_n \rightarrow 0$ достаточно быстро, то при каждом $l \geq 0$ \mathbf{P} -почти наверное $\xi_n(t) \rightarrow a(t)$, но \mathbf{P}^l -почти наверное $\xi_n(t) \rightarrow (a + l)(t)$. Поэтому либо меры \mathbf{P} и \mathbf{P}^l ортогональны, либо $l \equiv 0$ ■

Если $\sigma(t) \not\equiv 0$, то множество допустимых сдвигов для \mathbf{P} совпадает с множеством допустимых сдвигов гауссовской компоненты процесса ξ . В этом случае применима вся техника, развитая в главе 2.

Построим класс допустимых полугрупп преобразований скачкообразной части процесса ξ . Не охватывая всех возможных преобразований, этот класс тем не менее оказывается вполне достаточным для решения рассмотренных ниже задач.

Неформальное описание действия полугруппы на траекторию таково. Берется скачок траектории ξ . Пусть κ_0 — величина скачка, t — момент скачка. Величина скачка начинает изменяться, а момент скачка остается прежним. Если функция $G_c(\xi)$ имеет в момент t скачок величины $\kappa(c)$, то скорость изменения скачка $\frac{d\kappa}{dc}$ равна $v(\kappa(c), t)$. Здесь v — неслучайная функция, определяющая группу преобразований $\{G_c\}$. Функцию v назовем скоростью преобразования скачков. Мы укажем класс таких скоростей, что построенные по ним полугруппы G удовлетворяют требованиям § 4.

Пусть A_1, \dots, A_M — конечное число открытых множеств в R^1 , отделенных от нуля. Множество A_k представим в виде объединения открытых непустых интервалов $A_k = \bigcup_j (\alpha_{j,k}, \beta_{j,k})$. Пусть T_1, \dots, T_M — непересекающиеся относительно открытые подынтервалы отрезка $[0, 1]$. Положим

$$Z = \bigcup_{k=1}^M (A_k \times T_k). \quad (9.3)$$

Функцию $v: R^1 \times [0, 1] \rightarrow R^1$ назовем скоростью преобразования скачков, если 1) v непрерывна по паре переменных на каждом из множеств $A_k \times T_k$; 2) $v^{-1}\{0\} = (R^1 \times [0, 1]) \setminus Z$; 3) если $v > 0$ на $(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) \times T_k$, то функция

$$(\kappa, t) \rightarrow \int_{\alpha_{j,k}}^{\kappa} \frac{d\xi}{v(\xi, t)}$$

должна быть конечна и непрерывна на $(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) \times T_k$ и

$$\left| \int_{\alpha_{j,k}}^{\beta_{j,k}} \frac{d\xi}{v(\xi, t)} \right| = +\infty. \quad (9.4)$$

Если $v < 0$, то конечной и непрерывной должна быть функция

$$(x, t) \rightarrow \int_x^{\beta_{j,k}} \frac{d\xi}{v(\xi, t)}$$

и должно выполняться (9.4).

Ядром полугруппы преобразований со скоростью v назовем функцию $g: R_+ \times Z \rightarrow R^1$, которая при $c \geq 0$ является решением уравнения

$$g(c, x, t) \rightarrow \int_x^{\beta_{j,k}} \frac{d\xi}{v(\xi, t)} = c. \quad (9.5)$$

Условие (9.4) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (9.5) относительно g . При этом $c \rightarrow g(c, x, t)$ — монотонная функция, $g(0, x, t) = x$ и

$$\lim_{c \rightarrow \infty} g(c, x, t) \in \{\alpha_{j,k}\} \cup \{\beta_{j,k}\}.$$

Значение предела определяется знаком v .

Через D_Z обозначим множество элементов x пространства D таких, что при некотором t $(x(t) - x(t-), t) \in Z$ и при любом t $(x(t) - x(t-), t) \notin Z$. Множество D_Z открыто в D .

Полугруппой с ядром g назовем семейство отображений $G_c: D_Z \rightarrow D_Z$, определяемое формулой

$$[G_c(x)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t [g(c, x, s) - x] 1_Z v(dx, ds) + x(t), \quad (9.6)$$

где v — мера скачков траектории x .

Пусть $\delta_x(t)$ — скачок функции x в момент времени t . Если $(\delta_x(t), t) \in Z$, то $\delta_{G_c(x)}(t) = g(c, \delta_x(t), t)$ и $(\delta_{G_c(x)}(t), t) \in Z$. Если же $\delta_x(t) \notin Z$, то $\delta_{G_c(x)}(t) = \delta_x(t)$.

Поскольку множество Z отделено от нуля в пространстве скачков, то полугруппа $\{G_c\}$ действует на конечное число скачков, и интеграл (9.6) является конечной суммой.

Пример 1. Положим $A_1 = (1, \infty)$, $T_1 = [0, 1]$, $v(x, t) = -1_{A_1}(x)$. Пусть $n_x(t)$ — число скачков на промежутке $[0, t]$, величина которых больше 1. Тогда

$$[G_c(x)](t) = x(t) + cn_x(t). \quad (9.7)$$

Таким образом, в этом примере орбиты прямолинейны, хотя и не параллельны друг другу.

Перечислим несколько свойств построенных полугрупп. Доказательства приведены в [32].

Пусть для любого $B \subset R^1 \times [0, 1]$

$$\Pi(B \cap Z) = \int_0^1 \Pi_1(dt) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x, t) 1_{B \cap Z} \lambda(dx), \quad (9.8)$$

т. е. условные меры, порожденные мерой Π , абсолютно непрерывны на Z относительно λ . Если $\pi > 0$ на Z , то $\{G_c\}$ будет допустимой полугруппой. Орбиты полугруппы $\{G_c\}$ являются гладкими кривыми в D . Введем обозначение

$$[G'(x)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t g_c'(0, x, s) \nu(dx, ds).$$

Если $\|\cdot\|$ равномерная норма в D , то

$$\|G_{c+\Delta c}(x) - G_c(x) - \Delta c G'(G_c(x))\| = o(\|\Delta c\|). \quad (9.9)$$

Поэтому $G'(x)$ можно интерпретировать как касательный вектор к орбите полугруппы в точке x .

Теорема 9.1 [32]. Пусть $x \in D$ и множество $\{t | x(t) \neq x(t-)\}$ всюду плотно в $[0, 1]$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $l \in D$ найдутся область Z , скорость преобразования скачков ν и число $\delta > 0$ такие, что δ -окрестность x лежит в D_Z , и при $d_0(x, y) < \delta$

$$d_0(l, G'(y)) < \varepsilon.$$

Этот результат показывает, что класс построенных полугрупп достаточно широк.

Замечание. Если $Z_0 \subset (R^1 \setminus \{0\}) \times [0, 1]$ — открытое множество и $\{t | \delta_x(t) \in Z_0\}$ плотно в $[0, 1]$, то в утверждении теоремы 9.1 можно выбрать $Z \subset Z_0$.

Дадим описание условных мер, порождаемых мерой P на орбитах полугруппы $\{G_c\}$.

Теорема 9.2. Пусть мера Π имеет на Z вид (9.8). Тогда условные меры P_γ на орбитах полугруппы $\{G_c\}$ существуют, и их плотности относительно инвариантных мер λ_γ вычисляются по формуле

$$\frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(G_c(x)) = \frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(x) \exp \left\{ \int_Z \ln \frac{\nu \cdot \pi(g(c, x, s), s)}{\nu \cdot \pi(x, s)} \nu(dx, ds) \right\}, \quad (9.10)$$

где ν — мера скачков траектории x .

Набросок доказательства. Рассмотрим процесс $\xi_c(t) = [G_c(\xi)](t)$. Это процесс с независимыми приращениями. Пусть Π^c — мера Леви—Хинчина для ξ_c . Она вычисляется как образ меры Π при следующем отображении:

$$\begin{aligned} (x, t) &\rightarrow (g(c, x, t), t) \text{ на } Z, \\ (x, t) &\rightarrow (x, t) \text{ на } (R^1 \times [0, 1]) \setminus Z. \end{aligned}$$

Если $\pi > 0$ на Z , то $\Pi^c \ll \Pi$ и полугруппа (G_c) будет допустимой. Тогда для вычисления условных мер можно воспользоваться теоремой 4.1. Формула (9.10) легко выводится из (4.7) и формул А. В. Скорохода, которые выражают плотности мер, соответствующих процессам с независимыми приращениями, в терминах мер Леви—Хинчина [48, 49, с. 265]. В общем случае меру \mathbf{P} можно приблизить по вариации мерами \mathbf{P}_n , для которых $\pi_n > 0$ на Z ■

Определение. Устойчивым называется процесс с независимыми приращениями и мерой Леви—Хинчина специального вида:

$$\Pi(dx, dt) = |\kappa|^{-1-\alpha} (c_1 1_{\{\kappa > 0\}} + c_2 1_{\{\kappa < 0\}}) dx dt. \quad (9.11)$$

Пример 2. Пусть полугруппа (G_c) определяется соотношением (9.7). Тогда для устойчивого процесса с мерой Леви—Хинчина (9.11) формула условной плотности имеет вид

$$\frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\lambda_\nu}(G_c(x)) = C_\nu \exp \left\{ \int_1^\infty \int_0^1 \ln[(c + \kappa)^{-1-\alpha}] \nu(dx, dt) \right\}, \quad (9.12)$$

где C_ν — нормирующий множитель, ν — мера скачков траектории x .

Содержание этого параграфа можно распространить на случай процессов с независимыми приращениями со значениями в пространстве R^m , $m > 1$. В этом случае приходится рассматривать пространство \mathbf{D}^m , состоящее из R^m -значных функций без разрывов второго рода.

Для широкого класса гладких функций v со значениями в R^m ядро g полугруппы преобразований может быть найдено из дифференциального автономного уравнения первого порядка

$$\mathbf{D}_c g(c, \kappa, t) = v(g(c, \kappa, t), t), \quad c \geq 0,$$

с начальным условием $g(0, \kappa, t) = \kappa$. Это уравнение служит m -мерным аналогом для (9.5). Полугруппа преобразований (G_c) вводится, аналогично (9.6), соотношением

$$[G_c(x)](t) = \int_{R^m} \int_0^t [\bar{g}(c, \kappa, s) - \kappa] 1_Z \nu(dx, ds) + x(t).$$

Формулировка теоремы 9.1 сохраняет силу и в m -мерном случае. Что касается теоремы 9.2, то формула (9.10) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\lambda_\nu}(G_c(x)) &= \frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\lambda_\nu}(x) \exp \left\{ \int_Z \ln \left[\frac{\pi(g(c, \kappa, s), s)}{\pi(\kappa, s)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \det \mathbf{D}_* g(c, \kappa, s) \nu(dx, ds) \right\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Определитель в (9.13) можно выразить по формуле Лиувилля

$$\det \mathbf{D}_g(c, \kappa, s) = \exp \int_0^c \text{Sp } \mathbf{D}_\kappa v(g(u, \kappa, s), s) du. \quad (9.14)$$

При $m=1$, делая в (9.14) замену переменной $w = g(u, \kappa, s)$, получим

$$\begin{aligned} & \exp \int_0^c \mathbf{D}_\kappa v(g(u, \kappa, s), s) du = \\ & = \exp \int_{\kappa}^{g(c, \kappa, s)} \frac{\mathbf{D}_w v(w, s)}{v} dw = \frac{v(g(c, \kappa, s), s)}{v(\kappa, s)}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Подставляя (9.15) в (9.13), снова приходим к (9.10).

§ 10. Абсолютная непрерывность распределений функционалов

Пусть \mathbf{P} — мера в \mathbf{D} , соответствующая процессу с независимыми приращениями ξ . Пусть Π — мера Леви—Хинчина для ξ . Рассмотрим измеримый функционал $f: \mathbf{D} \rightarrow R^1$ и, следуя общей теории из § 6, будем искать достаточные условия абсолютной непрерывности распределения $\mathbf{P}f^{-1}$. Будем использовать введенные в § 6 понятия (B, H) -гладкости функционала и (B, H) -достаточного числа преобразований.

Лемма 10.1. Пусть Z — открытое подмножество $R^1 \times [0, 1]$, $\Pi \ll \lambda^2$ на Z и

$$\frac{d\Pi}{d\lambda^2} > 0 \text{ на } Z. \quad (10.1)$$

Пусть $B \subset \mathbf{D}$ и для любой траектории $x \in B$ и любых $t_1 < t_2$ существует такое t , что

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad (\delta_x(t), t) \in Z. \quad (10.2)$$

Если в качестве t_B и t_D рассматривать топологию пространства \mathbf{D} , то мера \mathbf{P} имеет (B, \mathbf{D}) -достаточное число допустимых преобразований.

Доказательство. Существование достаточного числа полугрупп преобразований следует из теоремы 9.1 и замечания к ней. Допустимость этих полугрупп следует из теоремы 9.2 ■

Теорема 10.1. Пусть $Z \subset R^1 \times [0, 1]$ — открытое множество такое, что для любых различных $t_1, t_2 \in [0, 1]$

$$\int_{R^1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}_Z d\Pi = \infty. \quad (10.3)$$

Пусть мера Леви—Хинчина $\Pi \ll \lambda^2$ на Z . Предположим, что $f: \mathbf{D} \rightarrow R^1$ является (B_0, \mathbf{D}) -гладким функционалом для некоторого B_0 такого, что $\mathbf{P}(B_0) = 1$. Пусть f удовлетворяет локальному условию Липшица в равномерной норме. Тогда $\mathbf{P}f^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство. Пусть B состоит из таких элементов x множества B_0 , что для любых различных $t_1, t_2, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, существует t , удовлетворяющее (10.2). Поскольку мера скачков процесса ξ пуассоновская, а (10.3) есть среднее количество скачков в Z , то $P(B) = P(B_0) = 1$. Временно предположим, что выполнено условие (10.1). Тогда из леммы 10.1 следует, что мера P имеет (B, D) -достаточное число допустимых преобразований. Утверждение теоремы 10.1 следует теперь из теоремы 6.1. В общем случае меру P можно приблизить по вариации мерами, соответствующими процессам с положительной плотностью мер Леви—Хинчина. Но если $P_n \xrightarrow{\text{var}} P$, то $P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P f^{-1}$, а сходимость по вариации сохраняет абсолютную непрерывность. Следовательно, $P f^{-1} \ll \lambda$ ■

З а м е ч а н и е. Условие (10.3) играет ту же роль, которую в гауссовском случае играли условия невырожденности (6.5), (6.6).

В качестве объекта применения теоремы 10.1 рассмотрим интегральный функционал

$$f(x) = \int_0^1 q(x(t)) \mu(dt).$$

Предположим, что q удовлетворяет локальному условию Липшица и на некотором множестве $U \subset R^1$ производная q' определена, непрерывна и отлична от нуля. Пусть μ — конечная мера на $[0, 1]$. Функционал f определен на всем пространстве D , и если

$$\mu\{t \mid x(t) \notin U\} = 0, \quad (10.4)$$

то производная f по направлению $l \in D$ в точке x вычисляется (см. пример 5 из § 6) по формуле

$$D_l f(x) = \int_0^1 q'(x(t)) l(t) \mu(dt). \quad (10.5)$$

Предположим, что $\lambda(R^1 \setminus U) = 0$, $\mu \ll \lambda$, $\mu([0, 1]) > 0$. Пусть B_0 состоит из таких x , для которых выполнено (10.4). Тогда из формулы (10.5) видно, что f является (B_0, D) -гладким функционалом.

Условие (10.1) и абсолютная непрерывность Π гарантируют абсолютную непрерывность одномерных распределений процесса ξ . Поэтому из условия $\lambda(R^1 \setminus U) = 0$ следует, что $P(B_0) = 1$. Таким образом, при сформулированных выше условиях $P f^{-1} \ll \lambda$.

Аналогичный результат справедлив и для интегральных функционалов от многомерных процессов. В этом случае $q: R^m \rightarrow R^1$, а формула для производной примет вид

$$D_t f(x) = \int_0^1 (\text{grad } q(x(t)), l(t)) \mu(dt)$$

и условия невырожденности и непрерывности нужно накладывать на градиент функции q .

§ 11. Интегральные функционалы от устойчивых процессов

Для функционалов вида

$$f(x) = \int_T q(x(t), t) \mu(dt) \quad (11.1)$$

и гауссовских мер \mathbf{P} мы нашли в § 8 достаточные условия ограниченности плотности распределения $\mathbf{P}f^{-1}$. Получим аналогичный результат для меры \mathbf{P} , соответствующей устойчивому процессу.

Пусть \mathbf{P} — мера в \mathbf{D} , соответствующая устойчивому процессу ξ , с мерой Леви—Хинчина вида (9.11).

Пример. Пусть f — функционал вида (11.1), причем $\mu = \lambda$, $T = [0, 1]$, $q(u, t) = 0$ при $|u| > \varepsilon$ и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|u| < \delta} |q(u, t)| = 0. \quad (11.2)$$

Можно доказать, что

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sup v^{-1} \mathbf{P} f^{-1}([0, v]) = \infty,$$

и, следовательно, плотность распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ не может быть ограниченной.

Этот пример показывает, что, в отличие от теоремы 8.2, нам недостаточно ограничений, налагаемых на q в окрестности нуля, несмотря на то, что $\xi(0) = 0$. Мы будем предполагать, что существуют возрастающая последовательность вещественных чисел $U = \{u_n\}$, $\inf_n (u_n - u_{n-1}) > 0$, и невырожденный отрезок $\Delta \subset [0, 1]$ такие, что функция $q(\cdot, t)$ монотонна на $[u_{n-1}, u_n]$ при всех n для любого $t \in \Delta$ и при почти всех $u \in R^1$

$$|D_u q(u, t)| \geq c_3 \exp\{-c_4 \rho(u)^\alpha\}, \quad (11.3)$$

где $\rho(\cdot)$ — расстояние до множества U , а c_3, c_4 — положительные постоянные.

Теорема 11.1 [33]. Пусть мера \mathbf{P} отвечает устойчивому процессу с параметрами (c_1, c_2, α) . Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_0^1 q(x(t), t) \lambda(dt).$$

Предположим, что ядро q удовлетворяет условию (11.3). Если $c_1 c_2 > 0$ и

$$c_4 < \lambda(\Delta) \cdot 2^{-\alpha} (2 + 2^\alpha + \alpha^{-1})^{-1} \cdot \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha |\ln \mathbf{P} \{ \sup_{t \in [0,1]} |\xi_t| < \varepsilon \} |, \quad (11.4)$$

то плотность распределения $\mathbf{P}f^{-1}$ ограничена.

Доказательство теоремы 11.1 вполне аналогично доказательствам теорем 8.2 и 8.3. Главное отличие заключается в том, что вместо расслоений на параллельные прямые рассматривается расслоение на орбиты полугрупп преобразований скачков (см. § 9, пример 1).

З а м е ч а н и е. Существование предела логарифма вероятности малых уклонений (11.4) показано в [36] для строго устойчивых процессов. Для произвольного устойчивого процесса верхний предел (11.4) конечен.

Верхний предел логарифма вероятностей и сомножитель $\lambda(\Delta)$ необходимо появляются в (11.4) так же, как и в (8.11). Остальные сомножители (11.4) можно улучшать.

Ограниченность плотности суммы независимых случайных величин. Пусть ξ_i , $i=1, 2, 3, \dots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения p_1 . Пусть $\eta_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$, а p_k — плотность распределения η_k .

Ограниченность p_k — необходимое условие выполнения классических локальных предельных теорем, остальные условия которых выражаются в терминах p_1 , см. [23, с. 154]. Поэтому интерес представляют условия на p_1 , обеспечивающие ограниченность p_k при больших k .

Т е о р е м а 11.2. Если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E} p_1^{1+\varepsilon}(\xi) = \|p_1\|_{L^{1+\varepsilon}(R^1)}^{1+\varepsilon} < \infty, \quad (11.5)$$

то p_k ограничена при $k > (1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}$.

Этот результат получен в [23, с. 157] методом характеристических функций. Поскольку сумма — простейший вид функционала от процесса с дискретным временем, можно дать элементарное доказательство теоремы 11.2, основанное на методе расслоений. К сожалению, условие (11.5) не является необходимым для ограниченности p_k . В связи с этим отметим следующий факт.

Т е о р е м а 11.3. Пусть F — произвольная функция распределения. Тогда существует такая ограниченная случайная величина ξ , что при $u \geq 0$

$$1 - F(u) \leq \mathbf{P} \{ p_1(\xi) \geq u \},$$

однако p_k ограничена при $k \geq 2$.

Таким образом, не приходится надеяться на получение интегрального критерия типа (11.5), который давал бы необхо-

димое и достаточное условие ограниченности p_h . Тем не менее, если сузить класс рассматриваемых плотностей, то (11.5) оказывается также и необходимым.

Теорема 11.4. Пусть R^1 допускает разбиение на конечное число отрезков, на каждом из которых плотность p_i монотонна или ограничена. Если p_h ограничена, то при $\varepsilon < k^{-1}$ выполнено условие (11.5).

§ 12. Функционалы типа супремума

Пусть $(\xi(t)), t \in [0, 1]$, — m -мерный процесс с независимыми приращениями. P — его распределение в $X = D^m[0, 1]$,

$$f(x) = \sup_{[0,1]} \|x(t)\|, \quad (12.1)$$

где $x \in X$, а $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^m .

При изучении распределений функционалов такого типа можно эффективно использовать разбиения на параллельные прямые.

Теорема 12.1. Предположим, что распределение величины $\xi(0)$ абсолютно непрерывно. Тогда $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Если значение процесса ξ в начальный момент времени фиксировано, то у распределения Pf^{-1} может появиться атом.

Теорема 12.2. Предположим, что $\xi(0) = a$ с вероятностью 1, а $\forall t \in (0, 1]$ распределение $\xi(t)$ абсолютно непрерывно. Тогда распределение Pf^{-1} будет сосредоточено на полупрямой $[\|a\|, \infty)$ и на $(\|a\|, \infty)$ будет абсолютно непрерывно.

Доказательство теоремы 12.1. Мы проведем доказательство лишь для размерности $m \geq 2$. В случае $m = 1$ доказательство аналогично, но значительно проще.

Пусть $r, \|r\| = 1$, — вектор максимальной евклидовой длины, R — одномерное подпространство, натянутое на r , а E — ортогональное дополнение (в евклидовой метрике) к R . Пусть $(e_i), i = 1, \dots, m-1$, — орты в E . Пусть L — подпространство $D^m[0, 1]$, порожденное функциями $(l_i), i = 1, \dots, m-1, l_i(t) = e_i \forall t \in [0, 1]$.

Рассмотрим разбиение Γ пространства $D^m[0, 1]$ на многообразия, параллельные L . отождествим факторпространство $D^m[0, 1]/\Gamma$ с совокупностью тех $x \in D^m[0, 1]$, для которых $x(0) \in R$. Рассмотрим также разбиение Δ пространства R^m на многообразия, параллельные E . Факторпространство R^m/Δ можно отождествить с R .

Обозначим через Q распределение вектора $\xi(0)$. В силу независимости приращений процесса ξ условная мера P_γ на многообразии

$$\left\{ \gamma + \sum_{i=1}^{m-1} c_i l_i, c_i \in R^1 \right\}, \gamma(0) \in R, \text{ совпадает с условным рас-}$$

пределим $Q_{\gamma(0)}$ меры Q на многообразии $\left\{ \gamma(0) + \sum_1^{m-1} c_i e_i \mid c_i \in R^1 \right\}$. Из предположения, что $Q \ll \lambda^m$ следует, что $P_\gamma \ll \lambda^{m-1}$ для P_Γ -почти всех γ .

Сужение функционала f на многообразии $\left\{ \gamma + \sum_1^{m-1} c_i l_i \mid c_i \in R^1 \right\}$, $\gamma(0) \in R$, имеет вид:

$$f_\gamma(\bar{c}) = f\left(\gamma + \sum_1^{m-1} c_i l_i\right) = \sup_{t \in [0,1]} \Psi_t(\bar{c}),$$

где $\bar{c} = (c_1, \dots, c_{m-1})$, $\Psi_t(\bar{c}) = \left\| \gamma(t) + \sum_1^{m-1} c_i e_i \right\|$.

Поэтому f_γ , как супремум выпуклых функций, будет выпукла. Рассмотрим более подробно функции Ψ_t . Обозначим через $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ соответственно проекции $\gamma(t)$ на подпространство R и E . Пусть $\alpha = \sup_{t \in [0,1]} \|\gamma_1(t)\|$. В силу выбора вектора g

функция $\Psi(\bar{c}) = \left\| ar + \sum_1^{m-1} c_i e_i \right\|$ будет иметь единственный минимум. Если $\gamma_1(t) \neq 0$, то график функции $\bar{c} \rightarrow \Psi_t(\bar{c})$ получается из графика функции $\bar{c} \rightarrow \Psi(\bar{c})$ сдвигом и подобием с коэффициентом, не превосходящим 1. Если же $\gamma_1(t) = 0$, то $\Psi_t(\bar{c}) = \left\| \gamma_2(t) + \sum_1^{m-1} c_i e_i \right\|$ и ее график получается сдвигом из графика функции $\bar{c} \rightarrow \left\| \sum_1^{m-1} c_i e_i \right\|$. Но тогда функция $\bar{c} \rightarrow f_\gamma(\bar{c})$ также будет иметь единственный минимум, достигающийся в некоторой точке \bar{c}_γ . Последнее обстоятельство позволяет заключить, что $P_\gamma f^{-1} \ll \lambda$ (для доказательства этого достаточно применить формулу полной вероятности к разбиению пространства R^m на лучи, выходящие из точки \bar{c}_γ). Таким образом, по (3.5) $P f^{-1} \ll \lambda$ ■

Доказательство теоремы 12.2. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\alpha > 0$. Положим:

$$A = \{x \in X \mid \sup_{[e,1]} \|x(t)\| > \|a\| + \alpha\};$$

$$B = \{x \in X \mid \sup_{[0,\varepsilon]} \|x(t)\| < \|a\| + \alpha\};$$

$$C = \{x \in X \mid f(x) = \|a\|\}; \quad D = X \setminus C.$$

Поскольку функции из X непрерывны справа в нуле, то по заданному $\delta > 0$ можно найти ε и α так, что

$$P(D \setminus A) < \delta, \quad P(B) > 1 - \delta. \quad (12.2)$$

Обозначим через i_ε отображение X в $X_\varepsilon = D^n[\varepsilon, 1]$, сопоставляющее функции x ее сужение на интервал $[\varepsilon, 1]$. Пусть $P^\varepsilon = P_{i_\varepsilon}^{-1}$. Положим

$$f_\varepsilon(x) = \sup_{[\varepsilon, 1]} \|x(t)\|, \quad x \in X_\varepsilon;$$

$$v(c) = \|a\| \vee c, \quad c \in R^1;$$

$$g(x) = v(f_\varepsilon(i_\varepsilon(x))), \quad x \in X.$$

Пусть $G = D \setminus (A \cap B)$. Из (12.2) следует, что $P(G) < 2\delta$. Так как $f(x) = g(x)$ для $x \in C \cup (A \cap B)$, то отсюда следует, что

$$\|Pf^{-1} - Pg^{-1}\| \leq 2P(G) \leq 4\delta. \quad (12.3)$$

Распределение величины $\xi(\varepsilon)$ абсолютно непрерывно по условию. Применяя результат теоремы 12.1 к процессу $(\xi(t))$, $t \in [\varepsilon, 1]$ и функционалу f_ε , получим, что $P^\varepsilon f_\varepsilon^{-1} \ll \lambda$. Поскольку $Pg^{-1} = (P^\varepsilon f_\varepsilon^{-1})v^{-1}$, то распределение Pg^{-1} будет сосредоточено на $[\|a\|, \infty)$ и будет абсолютно непрерывно на $(\|a\|, \infty)$. Отсюда и из неравенства (12.3), устремляя δ к нулю, получаем, что распределение Pf^{-1} обладает аналогичным свойством. ■

Аналоги теорем 12.1 и 12.2 имеют место и для процессов с независимыми приращениями со значениями в равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Глава 4

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 13. Теоремы о сильной сходимости

Слабая сходимост мер P_n к P обеспечивает, как хорошо известно, слабую сходимост распределений $P_n f^{-1}$ к $P f^{-1}$ для любого P -почти всюду непрерывного функционала f . В этой главе с помощью метода расслоений выделяются широкие классы функционалов, для которых распределения $P_n f^{-1}$ сходятся к $P f^{-1}$ в более сильном смысле — по вариации. Если рассматриваемые распределения имеют плотности, то сходимост по вариации равносильна сходимости плотностей в метрике L^1 . Таким образом, речь идет о возможности получения локальных предельных теорем «одновременно» для многих функционалов.

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $P, P_n, n = 1, 2, \dots$ — вероятностные меры на \mathfrak{B}_X , f — измеримый функционал на X , Γ — измеримое разбиение X , фактор-

мера и условные распределения для мер P_n относительно Γ будут снабжаться индексом n : P_Γ^n , P_γ^n . Положим

$$v_\gamma = P_\gamma f^{-1}, \quad v_\gamma^n = P_\gamma^n f^{-1}.$$

Символом $Z(X)$ обозначим банахово пространство всех конечных зарядов на \mathfrak{X}_X с полной вариацией в качестве нормы.

Теорема 13.1. Пусть $P_n \Rightarrow P$. Предположим, что для некоторого разбиения Γ выполняются условия: 1) $\int \|v_\gamma^n - v_\gamma\| P_\Gamma^n(d\gamma) \rightarrow 0$;

2) отображение $\gamma \rightarrow v_\gamma$ из X/Γ в $Z(R^1)$ непрерывно P_Γ — почти всюду. Тогда $P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P f^{-1}$.

Доказательство. Определим меру μ_n , полагая $\mu_n = \int_{X/\Gamma} v_\gamma P_\Gamma^n(d\gamma)$. В силу (3.4), (3.9)

$$\|P_n f^{-1} - P f^{-1}\| \leq \int_{X/\Gamma} \|v_\gamma^n - v_\gamma\| P_\Gamma^n(d\gamma) + \|\mu_n - P f^{-1}\|.$$

Поэтому достаточно установить, что $\|\mu_n - P f^{-1}\| \rightarrow 0$. Но это сразу вытекает из следствия 2 теоремы 2.2 если применить его к функции $\gamma \rightarrow v_\gamma$. ■

Замечание 1. Условие 1) эквивалентно, очевидно, такому: $\forall \varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P_\Gamma^n \{ \gamma \mid \|v_\gamma^n - v_\gamma\| > \varepsilon \} \rightarrow 0. \quad (13.1)$$

Отметим также, что из определения мер v_γ^n , v_γ следует, что $\|v_\gamma^n - v_\gamma\| \leq \|P_\gamma^n - P_\gamma\|$ и, следовательно, условие 1) будет выполнено, если условные распределения для мер P_n сближаются по вариации с соответствующими условными распределениями для P .

Замечание 2. Структура множества значений функционала f не влияет на существо дела. Можно считать, что f есть измеримое отображение X в произвольное измеримое пространство (E, \mathcal{E}) (при этом в условии 2) вместо пространства $Z(R^1)$ появится $Z(E)$). В частности, результат, аналогичный теореме 13.1, будет справедлив и для функционалов f со значениями в R^n .

Замечание 3. Можно усилить теорему 13.1, потребовав, чтобы условия 1) и 2) выполнялись лишь в окрестности P -почти каждой точки x относительно разбиения, зависящего от x . Точную формулировку такого «локального» варианта теоремы 13.1 можно найти в [19, теорема 3.2]. Нам, однако, она не понадобится.

Регулярные последовательности разбиений. Ниже, в § 14 и 15, будет показано, что условные меры для распределений P_n в линейном пространстве X относительно разбиений на параллельные прямые сближаются с соответствующими условными ме-

рами для предельного распределения \mathbf{P} лишь в редких случаях. Это обстоятельство затрудняет непосредственное применение теоремы 13.1 к изучению поведения распределений функционалов общей структуры. Конструкция, к описанию которой мы приступаем, использует часто встречающееся явление «стабилизации» условных распределений и позволяет более эффективно изучать сильную сходимость.

Начиная с этого момента, будем предполагать, что X — полное сепарабельное линейное метрическое пространство.

Пусть (\mathbf{P}_n) и (\mathbf{Q}_n) — две последовательности вероятностных мер на \mathfrak{B}_X , слабо сходящиеся к мере \mathbf{P} . Нам будет удобно рассматривать формально более общую задачу о сближении по вариации распределений $\mathbf{P}_n f^{-1}$ и $\mathbf{Q}_n f^{-1}$.

Пусть Y — замкнутое линейное подпространство пространства X коразмерности 1, l — какой-либо элемент X , не содержащийся в Y , а (l_n) — некоторая последовательность, сходящаяся к l . Обозначим через Γ_n и Γ разбиение X на прямые, параллельные, соответственно, l_n и l . Факторпространства естественным образом отождествляются с Y . Условные распределения для мер \mathbf{P}_n и \mathbf{Q}_n относительно разбиения Γ_n будут обозначаться (\mathbf{P}_{y^n}) , (\mathbf{Q}_{y^n}) , $y \in Y$, а фактормеры — $\mathbf{P}_{\Gamma_n}^n$, $\mathbf{Q}_{\Gamma_n}^n$. Пользуясь теоремой 5.5 [2], легко вывести, что при $n \rightarrow \infty$ $\mathbf{P}_{\Gamma_n}^n \Rightarrow \mathbf{P}_\Gamma$, $\mathbf{Q}_{\Gamma_n}^n \Rightarrow \mathbf{P}_\Gamma$. Положим $\tilde{\mathbf{P}}_{y^n}^n = \mathbf{P}_{y^n}^n a_n^{-1}$, где a_n — линейный непрерывный функционал, аннулирующий Y и равный 1 на l_n . Пусть, далее, $\tilde{\mathbf{P}}_{y^n, v}^n = \mathbf{P}_{y^n, v}^n a_n^{-1}$. Соответствующие объекты, построенные по мерам \mathbf{Q}_n , обозначаются аналогично.

Определение 1. Последовательность разбиений Γ_n вышеуказанного типа называем регулярной (относительно последовательности (\mathbf{P}_n) и (\mathbf{Q}_n)), если для любых $V \in \mathfrak{B}_X$, $U \in \mathfrak{B}_Y$ таких, что $\mathbf{P}(\partial V) = 0$, $\mathbf{P}_\Gamma(\partial U) = 0$, выполняется соотношение

$$\left\| \int_U \tilde{\mathbf{P}}_{y^n, v}^n \mathbf{P}_{\Gamma_n}^n(dy) - \int_U \tilde{\mathbf{Q}}_{y^n, v}^n \mathbf{Q}_{\Gamma_n}^n(dy) \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13.2)$$

Мы покажем, что возникающие естественным образом последовательности разбиений оказываются регулярными всякий раз, когда конечномерные распределения мер \mathbf{P}_n и \mathbf{Q}_n сходятся по вариации к соответствующим конечномерным распределениям предельной меры \mathbf{P} .

Заметим, что условие (13.2) обеспечивает сближение по вариации лишь определенных смесей условных распределений и потому оно существенно слабее требования о сближении по вариации индивидуальных условных распределений, которое по сути используется в теореме 13.1.

Предположим, что σ -алгебра \mathfrak{B}_X порождается счетным набором $\mathcal{U} = \{u_k\}_0^\infty$ линейных непрерывных функционалов. Пусть

$Y = \ker u_0$, $l \in Y$, $l_n \rightarrow l$. Обозначим через π_k отображение X в R^{k+1} , определяемое равенством

$$\pi_k(x) = (u_0(x), \dots, u_k(x)).$$

Теорема 13.2. Предположим, что $P_n \Rightarrow P$, $Q_n \Rightarrow Q$ и что для любого k

$$P_n \pi_k^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P \pi_k^{-1}, \quad Q_n \pi_k^{-1} \xrightarrow{\text{var}} Q \pi_k^{-1}. \quad (13.3)$$

Тогда последовательность (Γ_n) разбиений пространства X на прямые, параллельные векторам l_n , регулярна.

Доказательство. Так как σ -алгебра \mathfrak{B}_X порождается множествами вида $\pi_k^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}^{k+1}$, то соотношения (13.2) достаточно проверить для случая, когда

$$V = \pi_k^{-1}(B_1), \quad B_1 \in \mathfrak{B}^{k+1};$$

$$U = \{x \mid (u_1(x), \dots, u_k(x)) \in B_2, u_0(x) = 0\}, \quad B_2 \in \mathfrak{B}^k.$$

Заметим, что для $A \in \mathfrak{B}^1$

$$\tau(U, V, A) = \int_U \tilde{P}_{y,V}^n(A) P_{\Gamma_n}^n(dy) = P_n(E_n),$$

где

$$E_n = \left\{ x \mid \frac{u_0(x)}{u_0(l_n)} \in A, \pi_k(x) \in B_1, \left(u_1 \left(x - \frac{u_0(x)}{u_0(l_n)} l_n \right), \dots, u_k \left(x - \frac{u_0(x)}{u_0(l_n)} l_n \right) \right) \in B_2 \right\}.$$

Аналогично

$$\sigma(U, V, A) = \int_U \tilde{Q}_{y,V}^n(A) Q_{\Gamma_n}^n(dy) = Q_n(E_n).$$

Множество E_n есть множество вида $\pi_k^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}^k$, и поэтому

$$\sup_{A \in \mathfrak{B}^1} |\tau(U, V, A) - \sigma(U, V, A)| \leq \|P_n \pi_k^{-1} - Q_n \pi_k^{-1}\| \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Применим полученный результат к пространству непрерывных функций $X = C[0, 1]$. В качестве Y возьмем подпространство тех y , для которых $y(t_0) = 0$, где t_0 — некоторая точка из $[0, 1]$. Пусть $l \in X$, $l(t_0) \neq 0$, $l_n \rightarrow l$. Через π_{t_1, \dots, t_k} , как обычно, обозначим координатные отображения:

$$\pi_{t_1, \dots, t_k}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_k)).$$

Пусть T — счетное всюду плотное подмножество интервала $[0, 1]$, содержащее точку t_0 . Из теоремы 13.2 непосредственно вытекает следующее утверждение (см. Предложение 6.1 [19]).

Предложение 13.1. Предположим, что $P_n \Rightarrow P$, $Q_n \Rightarrow Q$ и что для любых $t_1, \dots, t_k \in T$

$$P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}, \quad Q_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \quad (13.4)$$

Тогда последовательность Γ_n разбиений пространства X на прямые, параллельные векторам l_n , регулярна.

Допустимые классы. Введем некоторые обозначения. Пусть Γ_n — разбиения вышеуказанного типа, пусть

$$\gamma_z^n = \{z + cl_n, c \in R^1\}, \quad \gamma_y^n = \{y + cl_n, c \in R^1\}, \quad z, y \in Y,$$

— два элемента разбиения Γ_n и пусть f — измеримый функционал на X . Зададим отображение $I_{z,y,n}: \gamma_z^n \rightarrow \gamma_y^n$ равенством $I_{z,y,n}(z + cl_n) = y + cl_n$. Положим

$$v_{z,v}^n = P_{z,v}^n f^{-1}, \quad v_{z,y,v}^n = P_{z,y,v}^n = P_{z,v}^n I_{z,y,n}^{-1} f^{-1}.$$

Через $\kappa_{z,v}^n$ и $\kappa_{z,y,v}^n$ обозначим объекты, аналогичные введенным и образованные с помощью f и условных мер Q_z^n .

Обозначим через G_V множество тех $y \in Y$, для которых при любом $\varepsilon > 0$ найдется такая Y -открытая окрестность U_y точки $y \in Y$, что при $n \rightarrow \infty$

$$P_{\Gamma_n}^n \{z \in U_y \mid \|v_{z,v}^n - v_{z,y,v}^n\| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad (13.5)$$

$$Q_{\Gamma_n}^n \{z \in U_y \mid \|\kappa_{z,v}^n - \kappa_{z,y,v}^n\| > \varepsilon\} \rightarrow 0. \quad (13.6)$$

Определение 2. Класс $\mathcal{D} \subset \mathfrak{B}_X$ будем называть допустимым для функционала f , если

- 1) $\forall V \in \mathcal{D} \quad P(\partial V) = 0$;
- 2) для любого множества V вида

$$V = V_{k+1} \setminus \bigcup_1^k V_i, \quad V_i \in \mathcal{D}, \quad i = 1, \dots, k+1,$$

существует регулярная для (P_n) и (Q_n) последовательность разбиений Γ_n такая, что $P_{\Gamma_n}(G_V) = 1$.

Введение такого определения оправдывается следующей теоремой.

Теорема 13.3. Предположим, что $P_n \Rightarrow P$, $Q_n \Rightarrow P$ и пусть W — открытое множество, для которого $P(\partial W) = 0$. Если существует такой допустимый для f класс \mathcal{D} , что для P -почти каждого $x \in X$ найдется окрестность $V_x \in \mathcal{D}$, то

$$\|P_{n,W} f^{-1} - Q_{n,W} f^{-1}\| \rightarrow 0.$$

Доказательство этого утверждения лишь незначительными деталями отличается от доказательства теоремы 6.1 [19], мы его приводить не будем.

Условия теоремы 13.3 трудно проверить непосредственно. Однако именно эта теорема является той базой, на которой строится доказательство основной теоремы, приводимой ниже.

Асимптотическая стабильность. Семейство $A = \{\alpha\}$ мер на (R^1, \mathfrak{B}^1) назовем стабильным, если плотности g_α этих мер равномерно непрерывны и равномерно ограничены на R^1 .

Определение 3. Семейство (P_y^n) , $y \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, условных мер для последовательности P_n относительно разбиения Γ_n назовем асимптотически стабильным, если существует такое стабильное семейство мер $A = (\alpha_y^n)$, $y \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, что $\forall \varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P_{\Gamma_n}^n \{y \in Y \mid \| \bar{P}_y^n - \alpha_y^n \| > \varepsilon\} \rightarrow 0. \quad (13.7)$$

Следующий пример показывает, что без условия типа асимптотической стабильности даже для очень хороших функционалов f сильной сходимости $P_n f^{-1}$ к $P f^{-1}$ может и не быть.

Пример 1. Пусть ξ — гауссовская случайная величина с параметрами $(0, 1)$, не зависящая от стандартного процесса броуновского движения $(w(t))$, $t \in [0, 1]$. Пусть $\xi_n = h_n(\xi)$, где $h_n(s) = [ns]n^{-1}$, $s \in R^1$. Положим

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \begin{cases} w(2t-1), & t \in [1/2, 1] \\ -w(1-2t), & t \in [0, 1/2], \end{cases} \\ \eta_n(t) &= w_1(t) + \xi_n |2t-1|, \quad t \in [0, 1], \\ \eta(t) &= w_1(t) + \xi |2t-1|, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Обозначим через P_n и P распределения в $C[0, 1]$, соответствующие процессам η_n и η . Очевидно, что $P_n \Rightarrow P$. Несколько менее очевидно, что для любых точек $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, k$, никакие две из которых не симметричны относительно точки $1/2$ $P_n \pi_{t_1 \dots t_k}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P \pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}$. В то же время для линейного непрерывного функционала

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt, \quad x \in X,$$

сходимость $P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P f^{-1}$ невозможна, так как $f(\eta_n) = \frac{1}{2} \xi_n$, $f(\eta) = \frac{1}{2} \xi$. Сужение функционала f на прямую $\{x + cl, c \in R^1\}$, $l(t) = |2t-1|$, есть линейная функция $c \rightarrow f(x) + \frac{1}{2} c$. Тем самым в этом направлении f меняется достаточно быстро. Условные же распределения \tilde{P}_x^n (соответственно, \tilde{P}_x) будут с точностью до сдвига совпадать с распределением величины $\frac{1}{2} \xi_n$ (соответственно, $\frac{1}{2} \xi$). Поэтому стабилизации условных распределений здесь нет.

Основная теорема. Множество $\Delta = \{x + cl, c \in [a, b]\}$, $x, l \in X$, $a, b \in R^1$ назовем отрезком, параллельным вектору l ; в этом случае будем использовать обозначение $\Delta \| l$. Отрезки $\Delta_n = \{x_n + cl_n, c \in [a_n, b_n]\}$ сходятся к отрезку Δ , если $x_n \rightarrow x$, $l_n \rightarrow l$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$. Положим для функционала f и отрезка $\Delta = \{x + cl, c \in [a, b]\}$: $f_\Delta(c) = f(x + cl)$, $c \in [a, b]$.

Определение 4. Будем говорить, что функционал f принадлежит классу $\mathcal{M}(x, l, (l_n))$, $x, l \in X, l_n \rightarrow l$, если найдется такая окрестность V точки x , что для \mathbf{P} -почти каждого $y \in V$ и для любого отрезка $\Delta = \{y + cl, c \in [a, b]\}$, $\Delta \subset U$, из условия $\Delta_n \parallel l_n, \Delta_n \rightarrow \Delta$ вытекает сходимость

$$\lambda f_{\Delta_n}^{-1 \text{ var}} \rightarrow \lambda f_{\Delta}^{-1}. \quad (13.8)$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 13.4. Предположим, что $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$, $\mathbf{Q}_n \Rightarrow \mathbf{Q}$. Пусть W — открыто и $\mathbf{P}(\partial W) = 0$. Предположим также, что для \mathbf{P} -почти каждого $x \in W$ существуют вектор $l \in X$ и последовательность (l_n) , $l_n \in X$, обладающие свойствами: 1) последовательность разбиений Γ_n , порожденная направлениями l_n , регулярна; 2) семейства условных распределений (\mathbf{P}_y^n) , (\mathbf{Q}_y^n) для мер \mathbf{P}_n и \mathbf{Q}_n относительно разбиений Γ_n асимптотически стабильны; 3) $f \in \mathcal{M}(x, l, (l_n))$.

Тогда $\|\mathbf{P}_{n,W} f^{-1} - \mathbf{Q}_{n,W} f^{-1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть X_0 — множество \mathbf{P} -полной меры, о котором говорится в условии теоремы, и пусть V_x — такой открытый шар с центром в x , существование которого для $x \in X_0$ гарантируется условием 3). Можно считать, что $\mathbf{P}(\partial V_x) = 0$. Мы покажем, что система $\mathcal{D} = (V_x)_{x \in X_0}$ образует допустимый класс. Тогда требуемое заключение будет вытекать из теоремы 13.3. Заметим, что поскольку условия теоремы симметричны относительно (\mathbf{P}_n) и (\mathbf{Q}_n) , то достаточно проверить соотношение (13.5). В дальнейшем фиксируем точку x и индекс x у V_x опускаем: $V_x = V$. В качестве регулярной последовательности разбиений берем ту, которая фигурирует в условии теоремы.

Мы установим справедливость (13.5) в случае, когда $V \in \mathcal{D}$ и $W = X$. В общем случае все рассуждения вполне аналогичны.

Обозначим через Γ разбиение X на прямые, параллельные вектору l , и положим

$$\gamma_y = \{y + cl, c \in R^1\}, \quad \gamma_y^n = \{y + cl_n, c \in R^1\}.$$

Множество $U = \{y \in Y \mid \gamma_y \cap V \neq \emptyset\}$ открыто и без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{P}_{\Gamma}(\partial U) = 0$. Если $y \in Y \setminus U$, то найдется такая Y -окрестность U_y точки y , что $\forall z \in U_y$ при всех достаточно больших n множество $\gamma_z^n \cap V$ будет пусто. Следовательно, для таких z и n меры $v_{z,V}^n$ и $v_{z,y,V}^n$ будут нулевыми и (13.5) выполняется очевидным образом.

Пусть теперь $y \in U$ и U_y — некоторый открытый Y -шар с центром в y . Очевидно, что

$$\mathbf{P}_{\Gamma_n}^n \{z \in U_y \mid \|v_{z,V}^n - v_{z,y,V}^n\| \geq \varepsilon\} \leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

где

$$\delta_1 = P_{\Gamma_n}^n \left\{ z \in U_y \mid \|v_{z,V}^n - \alpha_{z,V}^n\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$\delta_2 = P_{\Gamma_n}^n \left\{ z \in U_y \mid \|v_{z,y,V}^n - \alpha_{z,y,V}^n\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$\delta_3 = P_{\Gamma_n}^n \left\{ z \in U_y \mid \|\alpha_{z,V}^n - \alpha_{z,y,V}^n\| > \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$\alpha_{z,V}^n = (\alpha_z^n I_{z,n}^{-1})_V f^{-1}; \quad I_{z,n}: R^1 \rightarrow Y_z^n, \quad I_{z,n}(c) = z + cl_n;$$

$A = \{\alpha_z^n\}$ — стабильное семейство, существование которого обеспечивается условием 2) теоремы;

$$\alpha_{z,y,V}^n = (\alpha_z^n I_{z,n}^{-1})_V I_{z,y,n}^{-1} f^{-1}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \|v_{z,V}^n - \alpha_{z,V}^n\| &\leq \|P_{z,V}^n - (\alpha_z^n I_{z,n}^{-1})_V\| \leq \\ &\leq \|P_z^n - \alpha_z^n I_{z,n}^{-1}\| = \|\tilde{P}_z^n - \alpha_z^n\|. \end{aligned}$$

Поэтому $\delta_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично получаем, что $\delta_2 \rightarrow 0$. Оценим δ_3 .

Лемма 13.1. Для P_Γ -почти каждого $y \in Y$ и для любого $\delta > 0$ существует такой Y -шар U_y с центром в y , что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in U_y} \|\alpha_{z,V}^n - \alpha_{z,y,V}^n\| < \delta. \quad (13.9)$$

Доказательство леммы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 4.6.

Выберем теперь U_y в соответствии с леммой 13.1 при $\delta = \varepsilon/6$. Тогда при достаточно больших n будем иметь $\delta_3 = 0$. Таким образом (13.5) установлено, и теорема доказана ■

Классы \mathcal{M}_P и $\mathcal{M}_P^{(a)}$. В этом пункте мы приведем определение двух классов функционалов и установим некоторые их свойства:

Определение 5. а) Будем говорить, что функционал f принадлежит классу \mathcal{M}_P , если для P -почти каждого $x \in X$ найдется такой вектор $l \in H_P$, что $f \in \mathcal{M}(x, l, (l_n))$ для всякой последовательности (l_n) , сходящейся к l . б) Через $\mathcal{M}_P^{(a)}$ обозначим класс тех f из \mathcal{M}_P , для которых кроме соотношения (13.8) для соответствующих отрезков Δ выполняется также следующее соотношение

$$\lambda f_{\Delta}^{-1} \ll \lambda. \quad (13.10)$$

Классы \mathcal{M}_P и $\mathcal{M}_P^{(a)}$ весьма обширны.

Теорема 13.5. [18, Предложение 1]. Предположим, что $H_P \neq \{0\}$. Тогда для любого P -почти всюду непрерывного функционала f и для любого $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in \mathcal{M}_P^{(a)}$ такой, что

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon. \quad (13.11)$$

Теорема 13.6. Пусть $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$. Тогда $P f^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство. Из покрытия множества P -полной меры, о котором говорится в определении класса $\mathcal{M}_P^{(a)}$, выбираем счетное подпокрытие $\{V_k\}$. Так как $P f^{-1} \ll \sum P_k f^{-1}$, где $P_k = P_{V_k}$, то достаточно установить абсолютную непрерывность мер $P_k f^{-1}$. Зафиксируем k и рассмотрим разбиение Γ пространства X на прямые, параллельные допустимому направлению l_k , соответствующему V_k . Тогда по (3.4)

$$P_k f^{-1} = \int_{X/\Gamma} P_{\gamma, k} f^{-1} P_{\Gamma} (d\gamma),$$

здесь $P_{\gamma, k} = P_{\gamma, V_k}$.

В силу теоремы 4.1, для P_{Γ} -почти всех γ мера P_{γ} абсолютно непрерывна. Поэтому из условия (13.10) следует, что $P_{\gamma, k} f^{-1} \ll \lambda$ для P_{Γ} -почти всех γ . Значит и $P_k f^{-1}$, как смесь абсолютно непрерывных мер, будет абсолютно непрерывна ■

Рассмотрим гладкие функционалы. Ниже предполагается, что X — сепарабельное банахово пространство. Будем говорить, что функционал f непрерывно дифференцируем по Фреше в области $G \subset X$, если отображение $x \rightarrow Df(x)$ из G в X^* непрерывно в слабой- $*$ топологии.

Теорема 13.7. Предположим, что для P -почти каждого x выполняется условие: 1) существует окрестность V_x точки x , в которой функционал f непрерывно дифференцируем по Фреше; 2) $Df(x)(H_P) \neq \{0\}$. Тогда $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$.

Доказательство. Пусть x принадлежит множеству P -полной меры, о котором говорится в условии, и пусть V_x — соответствующая окрестность. Из условий теоремы следует, что $\exists l_0 \in H_P$, такой что

$$\langle l_0, Df(x) \rangle = D_{l_0} f(x) = \delta \neq 0.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\delta > 0$. Уменьшая, если надо, окрестность V_x , получим (см. рассуждения, использованные в примере 4 § 6), что для y , близких к x , и направлений l , близких к l_0 , имеет место неравенство: $Df(y) \geq \geq \delta/2$. Возьмем какой-либо отрезок $\Delta_0 = \{y_0 + cl_0, c \in [a_0, b_0]\}$, параллельный l_0 и лежащий в V_x , и покажем, что

$$\lambda f_{\Delta_n}^{-1 \text{ var}} \rightarrow \lambda f_{\Delta_0}^{-1} \quad (13.12)$$

всякий раз, когда $\Delta_n \rightarrow \Delta_0$.

Пусть $\Delta_n = \{y_n + cl_n, c \in [a_n, b_n]\}$. Так как $a_n \rightarrow a_0$, $b_n \rightarrow b_0$, то без потери общности можно считать, что все функции f_{Δ_n} определены на одном и том же отрезке $[a_0, b_0]$. Легко проверяется, что f_{Δ_n} и f'_{Δ_n} сходятся равномерно на $[a_0, b_0]$ соответственно к f_{Δ_0} и f'_{Δ_0} . В силу выбора V_x f'_{Δ_0} отделена от нуля.

Поэтому, применяя теорему 4.6, получим (13.12). Абсолютная непрерывность $\lambda f_{\Delta_0}^{-1}$ вытекает из теоремы 4.4 ■

В заключение этого параграфа укажем достаточные условия принадлежности выпуклых функционалов классу $\mathcal{M}_P^{(a)}$.

Мы предполагаем, что мера P имеет среднее a_P , а f — непрерывный выпуклый функционал (см. замечание 1 к теореме 7.1). Положим

$$a_0 = \inf_{x \in \text{supp } P} f(x).$$

Теорема 13.8. Предположим, что выполняются следующие условия:

- 1) $(a_P + H_P)^- = \text{supp } P$;
- 2) $P\{x \mid f(x) \leq a_0\} = 0$.

Тогда $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{supp } P$ таково, что $f(x) > a_0$. Так же, как и при доказательстве теоремы 7.1, найдем $l \in H_P$ и такую выпуклую окрестность V точки x , что $\forall \Delta \subset V, \Delta \parallel l$ функция f_Δ является строго монотонной и выпуклой. Поэтому $\lambda f_{\Delta}^{-1} \ll \lambda$. Далее, если $\Delta_n \rightarrow \Delta$, то $f_{\Delta_n}(c)$ будут поточечно сходиться к $f_\Delta(c)$. Поэтому соотношение (13.8) вытекает из теоремы 4.5 ■

§ 14. Функционалы от гауссовских процессов

Гауссовские меры обладают обширным запасом допустимых направлений и потому являются идеальным объектом для применения техники расслоений. В этом параграфе мы рассматриваем последовательности P_n гауссовских мер в сепарабельном банаховом пространстве X и показываем, что одна слабая сходимости $P_n \Rightarrow P_0$ без других дополнительных предположений влечет сильную сходимости $P_n f^{-1}$ к $P_0 f^{-1}$ для широкого класса функционалов f .

Предельное поведение условных распределений. Чтобы применять метод расслоений к получению локальных теорем, необходимо иметь информацию об асимптотическом поведении условных распределений. Для гауссовских мер естественно использовать разбиения на параллельные прямые, поскольку в этом случае мы имеем (см. § 5) полное описание условных распределений. Тем не менее, оказывается, что непосредственно в терминах корреляционных операторов характеристика поведения условных мер затруднительна. Следующее утверждение показывает, что условные распределения гауссовских мер по любому фиксированному направлению могут асимптотически вырождаться.

Теорема 14.1. Существует последовательность гауссовских мер (P_n) , $n=0, 1, \dots$, обладающая свойствами: 1) $P_n \Rightarrow P_0$;

2) корреляционные операторы K_{P_n} сильно сходятся к K_{P_0} ;

3) H_{P_n} совпадает (как множество) с H_{P_0} ; 4) $\forall h \in H_{P_0}$ дисперсия $\sigma_n^2(h)$ условных распределений на прямых, параллельных h , стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть P_0 — винеровская мера в $X = C[0, 1]$. Обозначим через Λ совокупность всех неубывающих автоморфизмов отрезка $[0, 1]$ с отделенной от нуля и бесконечности производной. С каждым $u \in \Lambda$ свяжем ограниченный и обратимый линейный оператор T_u :

$$T_u x(s) = x(u(s)), \quad s \in [0, 1], \quad x \in X.$$

Мера $P_0 T_u^{-1}$ будет гауссовской. Из описания допустимых сдвигов для винеровской меры (см. § 5, пример 3) следует, что если $h \in H_{P_0}$, то $T_u^{-1} h \in H_{P_0}$. Значит, h будет допустимым сдвигом и для $P_0 T_u^{-1}$. При этом дисперсия условных мер для $P_0 T_u^{-1}$ на прямых, параллельных h , будет равна дисперсии условных мер для P_0 относительно разбиения на прямые, параллельные $T_u^{-1} h$. Она будет вычисляться по формуле (см. § 5, пример 3)

$$\sigma_{P_u}^2(h) = \left(\int_0^1 |h'(v(s))|^2 |v'(s)|^2 ds \right)^{-1}, \quad (14.1)$$

где v — функция, обратная к u .

Выберем теперь автоморфизмы $u_n \in \Lambda$ так, чтобы 1) u_n равномерно на $[0, 1]$ сходились к $u(t) \equiv t$; 2) для любого борелевского подмножества E отрезка $[0, 1]$ положительной лебеговой меры при $n \rightarrow \infty$

$$\int_E \frac{1}{u_n'(s)} ds \rightarrow \infty.$$

Последовательность $P_n = P_0 T_{u_n}^{-1}$ является искомой ■

Теперь мы установим, что при надлежащем выборе направлений (своего направления для каждого n) вырождения условных распределений можно избежать.

Теорема 14.2. Пусть (P_n) — последовательность гауссовских мер в сепарабельном банаховом пространстве X , слабо сходящаяся к P_0 . Тогда $\forall h \in H_{P_0}$ существует последовательность (h_n) , $h_n \in H_{P_n}$, такая, что 1) $\|h_n - h_0\| \rightarrow 0$; 2) $\sigma_n^2(h_n) \rightarrow \sigma_0^2(h_0)$.

Доказательство. Обозначим через Π_1^* замкнутый единичный шар пространства X^* . Пусть Ψ_n — характеристический функционал меры P_n (определение см. в § 1 гл. 1).

Лемма 14.1. При $n \rightarrow \infty$ $\Psi_n(x^*) \rightarrow \Psi_0(x^*)$ равномерно по $x^* \in \Pi_1^*$.

Доказательство леммы. Семейство функций $\{\exp(i\langle \cdot, x^* \rangle)\}$, $x^* \in \Pi_1^*$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому требуемое заключение вытекает из теоремы 2.2 ■

Пусть a_n — среднее значение меры P_n .

Лемма 14.2. При $n \rightarrow \infty$ $a_n \rightarrow a_0$.

Доказательство леммы вытекает из предыдущей леммы и того факта, что

$$\inf_{n=0,1,\dots} \inf_{x^* \in \Omega_n^*} |\Psi_n(x^*)| > 0 \quad \blacksquare$$

Так как пространства H_{P_n} не меняются при сдвигах мер P_n , то можно считать, что средние значения мер P_n — нулевые. Слабая сходимость P_n к P_0 сохранится при этом в силу леммы 14.2.

Пусть i_n^* — вложение X^* в $H_{P_n}^* = H_{P_n}$, введенное в § 5.

Лемма 14.3. При $n \rightarrow \infty$

$$\gamma_n = \sup_{x^* \in \Omega_n^*} \|i_n(x^*) - i_0(x^*)\| \rightarrow 0. \quad (14.2)$$

Доказательство леммы. Так как $a_n = 0$, то

$$\Psi_n(x^*) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} |i_n^*(x^*)|_n^2 \right\},$$

где $|\cdot|_n$ — норма в H_{P_n} . Поэтому из леммы 14.1 следует, что

$$\sup_{x^* \in \Omega_n^*} \left| |i_n^*(x^*)|_n - |i_0^*(x^*)|_0 \right| \rightarrow 0. \quad (14.3)$$

Замечая, что $(x, y)_n = \frac{1}{2} (|x|_n^2 + |y|_n^2 - |x-y|_n^2)$, из (14.3) получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\delta_n = \sup_{x^*, y^* \in \Omega_n^*} |(i_n^*(x^*), i_n^*(y^*))_n - (i_0^*(x^*), i_0^*(y^*))_0| \rightarrow 0.$$

По определению вложения $i_n^* \forall h \in H_{P_n}$ и $\forall y^* \in X^*$

$$(h, i_n^*(y^*))_n = \langle h, y^* \rangle.$$

Следовательно, $\delta_n = \gamma_n$. Значит, $\gamma_n \rightarrow 0$ \blacksquare

Ясно, что в леммах 14.1 и 14.3 единичный шар может быть заменен шаром любого другого радиуса. Таким образом, если $h_0 \in H_{P_0}$ и имеет вид $h_0 = i_0^*(x^*)$, то, полагая $h_n = i_n^*(x^*)$, получим искомую последовательность. Действительно, сходимость h_n к h в норме X следует из леммы 14.3, а сходимость условных дисперсий — из (14.3). В случае произвольного $h_0 \in H_{P_0}$, требуемая последовательность выделяется диагональным процессом. При этом используется тот факт, что $i_0^*(X^*)$ всюду плотно в H_{P_0} \blacksquare

Замечание 1. Предположим, что $h_0 \in H_{P_0}$ имеет вид $h_0 = i_0^*(x^*)$ и $h_0 \neq 0$. Пусть $h_n = i_n^*(x^*)$ и пусть $\Gamma_n = (\gamma_n^n)$ — разбиения X на прямые, параллельные h_n . Так как

$$\langle h_n, x^* \rangle = |h_n|_n^2 \rightarrow |h_0|_0^2 > 0,$$

то факторпространство X/Γ_n можно отождествить с $Y = \text{Ker } x^*$.
 Зададим параметризацию на элементах разбиения (γ_y^n) , $y \in Y$,
 следующим образом:

$$\gamma_y^n = \{y + c h_n, c \in R^1\}.$$

Тогда из теоремы 5.1 п. 4) получим, что средние условных мер на прямой γ_y^n равны

$$\alpha_{P_n}(h_n, y) = -\frac{(y, h_n)_n}{|h_n|_n^2} = -\frac{\langle y, x^* \rangle}{|h_n|_n^2} = 0.$$

Таким образом, в этом случае центры условных распределений концентрируются на подпространстве Y .

Основная теорема. После проведенной подготовительной работы мы можем приступить к обсуждению и доказательству центрального результата этого параграфа.

Теорема 14.3. Предположим, что $P_n \Rightarrow P_0$, а $f \in \mathcal{M}_{P_0}$. Тогда $P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P_0 f^{-1}$.

Эта теорема в сочетании с теоремой 13.6 дает функциональную локальную предельную теорему:

Следствие 1. Если $P_n \Rightarrow P_0$, а $f \in \mathcal{M}_{P_0}^{(a)}$, то плотность абсолютно непрерывной компоненты распределения $P_n f^{-1}$ сходится в метрике L^1 к плотности распределения $P_0 f^{-1}$.

Укажем одно из возможных приложений теоремы 14.3. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная гауссовская последовательность, $E \xi_n = 0$.

Положим $S_n = \sum_1^n \xi_i$ и рассмотрим непрерывную случайную

ломаную $\delta_n(t)$, $t \in [0, 1]$, с вершинами в точках $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{DS_n}}\right)$, $k = 0, \dots, n$. Обозначим через P_n распределение в $C[0, 1]$, соответствующее гауссовскому процессу $(\delta_n(t))$, $t \in [0, 1]$. Предположим, что с ростом n дисперсия сумм S_n правильно меняется:

$$DS_n = n \nu \mathcal{L}(n),$$

где \mathcal{L} — медленно меняющаяся функция, а $\nu \in (0, 2)$.

В этом случае (см. [13]) $P_n \Rightarrow P_0$, где P_0 — мера в $C[0, 1]$, соответствующая полуустойчивому гауссовскому процессу w_t , описанному в примере 4 § 5.

Доказательство теоремы 14.3. Сначала мы докажем утверждение теоремы в предположении, что носитель N_{P_0} предельной меры совпадает с X .

Пусть x принадлежит множеству X_0 P_0 -полной меры, о котором говорится в условии $f \in \mathcal{M}_{P_0}$; V_x , l_x — соответствующие открытые шары и P_0 -допустимые векторы. Можно считать, что $P_0(\partial V_x) = 0 \forall x \in X_0$. Из покрытия $\{V_x\}$, $x \in X_0$, множества X_0 выбираем счетное подпокрытие $\{V_{x_k}\}$ и полагаем $V_k = V_{x_k}$.

$W_k = V_k \setminus \bigcup_1^{k-1} V_i$, $l_k = l_{x_k}$. Пусть Γ_k — разбиение X на прямые, параллельные l_k , π_k — каноническая проекция X на X/Γ_k . Легко видеть, что шары V_k можно выбрать так, чтобы

$$P_0(\partial\pi_k^{-1}(\pi_k(V_j))) = 0 \quad \forall k, j. \quad (14.4)$$

Стандартным рассуждением проверяется, что для доказательства сходимости по вариации $P_n f^{-1}$ к $P_0 f^{-1}$ достаточно установить, что при каждом k

$$\|P_{n, W_k} f^{-1} - P_{0, W_k} f^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (14.5)$$

Зафиксируем k и будем индекс k опускать: $W = W_k$, $l = l_k$, $\Gamma = \Gamma_k$. Пользуясь теоремой 14.2, выберем такую последовательность (h_n) , $h_n \in H_{P_n}$, что $h_n \rightarrow l$ и $\sigma_n^2(h_n) \rightarrow \sigma_0^2(l)$. Выберем линейные обратимые операторы $J_n: X \rightarrow X$ так, чтобы $J_n(l) = h_n$ при $n = 1, 2, \dots$ и чтобы $\forall x \in X \quad J_n(x) \rightarrow x$. Положим $Q_n = P_0 J_n^{-1}$ и покажем, что

$$\|P_{n, W} f^{-1} - Q_{n, W} f^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (14.6)$$

Для этого воспользуемся теоремой 13.4. Заметим следующее.

1. Последовательность разбиений (θ_n) пространства X на прямые, параллельные h_n , является регулярной для (P_n) и (Q_n) . Это следует из теоремы 13.2 и предположения, что $N_{P_0} = X$, так как в этом случае для любого конечного набора $\mathfrak{U} = (u_1^*, \dots, u_k^*)$ линейных непрерывных функционалов распределения $P_n \mathfrak{U}^{-1}$ и $Q_n \mathfrak{U}^{-1}$ сходятся по вариации к $P_0 \mathfrak{U}^{-1}$.

2. Условные меры для P_n и Q_n на прямых, параллельных h_n , являются гауссовскими. Их дисперсии, в силу выбора векторов h_n , в совокупности отделены от нуля. Следовательно, семейство этих условных мер асимптотически стабильны.

3. Если $x \in X_0 \cap W$, то, в силу выбора W и l , функционал f будет принадлежать $\mathcal{M}(x, l, (h_n))$.

Таким образом, теорема 13.4 применима и мы получаем (14.6).

Покажем теперь, что

$$\delta_n = \|Q_{n, W} f^{-1} - P_{0, W} f^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (14.7)$$

Это соотношение вместе с (14.6) дает (14.5) и, тем самым, доказательство теоремы будет в рассматриваемом случае завершено.

Заметим, что $Q_{n, W} f^{-1} = P_{0, J_n^{-1}(W)} f_n^{-1}$, где $f_n(x) = f(J_n(x))$.

Поэтому $\delta_n \leq \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}$, где

$$\delta_n^{(1)} = \|P_{0, J_n^{-1}(W)} f_n^{-1} - P_{0, W} f_n^{-1}\|, \quad \delta_n^{(2)} = \|P_{0, W} f_n^{-1} - P_{0, W} f^{-1}\|.$$

Поскольку

$$\delta_n^{(1)} \leq 2P_0(W \Delta J_n^{-1}(W)) \rightarrow 0,$$

то достаточно оценить $\delta_n^{(2)}$.

Отождествим X/Γ с подпространством Y коразмерности 1, не содержащим l . По формуле полной вероятности (3.4)

$$\delta_n^{(2)} \leq \int_Y \delta_n(y) P_\Gamma^0(dy),$$

где

$$\delta_n(y) = \|P_{y,W}^0 f_n^{-1} - P_{y,W}^0 f^{-1}\|.$$

Пересечение прямой $\{y + cl, c \in R^1\}$ с W есть объединение попарно дизъюнктивных отрезков Δ_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Поэтому

$$\delta_n(y) \leq \sum_{k=1}^N \|\tilde{P}_{y,W}^0 f_{\Delta_k}^{-1} - \tilde{P}_{y,W}^0 f_{\Delta_k,n}^{-1}\|, \quad (14.8)$$

здесь $\tilde{P}_{y,W}^0$ обозначает меру $P_{y,W}^0$, перенесенную на R^1 с помощью отображения $y + cl \rightarrow c$, а $\Delta_{k,n} = J_n(\Delta_k)$. Мера $\tilde{P}_{y,W}^0$ является гауссовской. Поэтому аппроксимируя ее плотность ступенчатыми функциями и пользуясь (14.4) и тем, что для любого $x \in X_0 \cap W$ и любой последовательности (z_n) , сходящейся к l , f принадлежит $\mathcal{M}(x, l, (z_n))$, получим, что для P_Γ^0 -почти всякого y каждое слагаемое в правой части (14.8) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Тем самым (14.7) доказано.

Перейдем к общему случаю. Пусть J — какой-либо проектор X на N_{P_0} , для которого $J(X) = N_{P_0}$. Положим $g(x) = f(J(x))$, $Q_n = P_n f^{-1}$. Ясно, что $Q_n \Rightarrow P_0$, и так как $N_{Q_n} \subset N_{P_0}$, то по первой части доказательства $Q_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P_0 f^{-1}$. Поэтому достаточно показать, что

$$\|P_n f^{-1} - Q_n f^{-1}\| = \|P_n f^{-1} - P_n g^{-1}\| \rightarrow 0.$$

Это делается с помощью рассуждений, вполне аналогичных использованным в первой части доказательства ■

Рассмотрим два конкретных класса функционалов, к которым применима теорема 14.3.

Интегральные функционалы. Пусть $X = C(T)$, где T — метрический компакт. Пусть (ξ_t) , $t \in T$, — непрерывный гауссовский процесс с распределением P и корреляционной функцией $K(t, s)$.

Рассмотрим интегральные функционалы вида

$$f(x) = \int_T q(x(t)) \mu(dt), \quad (14.9)$$

где μ — конечная мера на \mathfrak{B}_T , q — некоторая измеримая функция на R^1 .

Предположим, что выполнено следующее условие невырожденности:

$$\forall \varphi \in L^1(d\mu), \quad \varphi \neq 0, \quad \iint_T K(t, s) \varphi(t) \varphi(s) \mu(dt) \mu(ds) > 0. \quad (14.10)$$

Это условие означает, что любая смесь значений процесса ξ вида $\int_T \xi_t \varphi(t) \mu(dt)$, где $\varphi \in L^1(d\mu)$ и $\varphi \neq 0$, имеет невырожденное

распределение. Условия такого типа были использованы нами в § 6 для получения абсолютной непрерывности распределений интегральных функционалов.

Теорема 14.4. Предположим, что q' непрерывна и почти всюду отлична от нуля. Если выполнено условие невырожденности (14.10), то $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$.

Замечание 2. Для конкретных процессов условие на q' может быть ослаблено. Например, в случае винеровского процесса (или броуновского моста) достаточно предположить, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется открытый интервал $J \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, на котором q' непрерывна и отлична от нуля.

Доказательство. Аналогично примеру 5 из § 6, легко показать, что при сделанных предположениях $f \in \mathcal{M}(B, H)$, где $H = H_P^-$, а $B = \{x \in X \mid \mu\{t \in T \mid x(t) \in A\} = 0\}$, A — множество тех $c \in R^1$, для которых $q'(c) = 0$. В силу условия невырожденности (14.10) $P(B) = 1$. Поэтому по теореме 13.7 $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$. ■

Супремум непрерывного процесса. Рассмотрим случай, когда $X = C(T)$, T — метрический компакт, P — гауссовская мера, являющаяся распределением непрерывного процесса (ξ_t) , $t \in T$, а функционал f имеет вид

$$f(x) = \sup_T x(t).$$

Это непрерывный выпуклый функционал.

Теорема 14.5. Следующие условия эквиваленты: 1) $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$; 2) $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство. То, что из 1) следует 2), является следствием теоремы 13.6. Покажем, что 2) влечет 1). По теореме 7.1 из 2) следует, что выполняется условие 2) теоремы 13.9. Поскольку P — гауссовская мера, то выполнено и условие 1) теоремы 13.9. Таким образом, $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$. ■

§ 15. Локальный принцип инвариантности

В этом параграфе мы применяем развитую в § 13 технику к изучению сильной сходимости распределений функционалов от классического объекта — случайных ломаных, построенных по независимым одинаково распределенным величинам.

Условные распределения случайных ломаных. Пусть $\xi_n, n \in \mathcal{N}$, — последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, пусть

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ — соответствующие частичные суммы, $\sigma_n^2 = \mathbf{D}S_n$ — их дисперсии и пусть \mathbf{P}_n — распределения в пространстве $X = \mathbf{C}[0, 1]$ случайных элементов ξ_n , которые задаются равенством

$$\xi_n(t) = \sigma_n^{-1} (S_{[nt]} + (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1}). \quad (15.1)$$

При анализе асимптотического поведения условных распределений мер \mathbf{P}_n на параллельных прямых обнаруживается неожиданная связь с задачей изучения асимптотики некоторых процессов, играющих важную роль в математической статистике. Проиллюстрируем это на примере.

Пусть Γ — разбиение X на прямые, параллельные вектору l , $l(t) \equiv t$, и пусть J_n — отображение X в R^n , определяемое равенством

$$J_n(x) = \sigma_n \left(x\left(\frac{1}{n}\right), x\left(\frac{2}{n}\right) - x\left(\frac{1}{n}\right), \dots, x(1) - x\left(\frac{n-1}{n}\right) \right).$$

Обозначим для краткости $J_n(x)$ через \bar{x} .

Мера \mathbf{P}_n сконцентрирована на подпространстве E_n непрерывных ломанных с вершинами в точках $\frac{k}{n}$, $k=0, \dots, n$. Сужение J_n на E_n линейно и взаимно однозначно. Поэтому условное распределение для \mathbf{P}_n на прямой $\gamma_y = \{y + cl, c \in R^1\}$ совпадает с условным распределением для $\mathbf{P}_n J_n^{-1}$ на прямой $\{\bar{y} + c\bar{l}, c \in R^1\}$.

Плотность последнего $p_n(\bar{y}, c)$ в предположении, что $\frac{d\mathbf{P}_n J_n^{-1}}{d\lambda^n}$ существует и равна q_n , будет вычисляться по формуле

$$p_n(\bar{y}, c) = \frac{q_n(\bar{y} + c\bar{l})}{\int_{R^1} q_n(\bar{y} + c\bar{l}) dc}. \quad (15.2)$$

Рассмотрим теперь семейство статистических экспериментов $\mathcal{E}_n = \{\mathcal{H}_n, \mathcal{U}_n, \mathbf{P}_\theta^n, \theta \in \Theta\}$, в котором $\mathcal{H}_n = R^n$, $\mathcal{U}_n = \mathfrak{B}^n$, $\mathbf{P}_0^n = \mathbf{P}_n J_n^{-1}$, $\Theta = R^1$, $\mathbf{P}_\theta^n(A) = \mathbf{P}_0^n(A + \theta \mathbf{1}_n)$, $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1) \in R^n$. Наблюдением, соответствующим \mathcal{E}_n , будет вектор $\bar{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Пусть

$$Z_{n,\theta}(c) = \frac{d\mathbf{P}_{\theta+cn^{-1}\sigma_n}^n(\bar{\xi}_n)}{d\mathbf{P}_\theta^n}$$

— нормированное отношение правдоподобия.

При сделанном выше предположении о существовании плотности у меры $\mathbf{P}_n J_n^{-1}$ получим

$$Z_{n,\theta}(c) = \frac{q_n(\bar{\xi}_n + (\theta + c\sigma_n n^{-1}) \mathbf{1}_n)}{q_n(\bar{\xi}_n + \theta \mathbf{1}_n)}. \quad (15.3)$$

Подставляя в (15.2) $\bar{\xi}_n$ вместо \bar{y} , обнаруживаем, что

$$p_n(\bar{\xi}_n, c) = \frac{Z_{n,0}(c)}{\int_{R^1} Z_{n,0}(c) dc} \quad (15.4)$$

Таким образом, имея информацию о поведении процессов $Z_{n,0}$, можно сделать определенные выводы о свойствах последовательности $(p_n(y, c))$. Задача же изучения $Z_{n,0}$ является одной из центральных в асимптотической теории оценивания. В ряде случаев она хорошо исследована (см. [24]). Так, для независимых одинаково распределенных наблюдений ξ_1, ξ_2, \dots в предположении, что плотность p их общего распределения абсолютно непрерывна и соответствующее информационное количество Фишера $I_p = \int \frac{(p')^2}{p} d\lambda$ конечно, процесс $Z_{n,0}$ будет асимптотически гауссовским. Более того, из теоремы 4.4 [25] следует, что $\forall \varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\{\|\Delta_n\|_{L^1(R^1)} > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad (15.5)$$

где

$$\Delta_n(c) = p_n(\bar{\xi}_n, c) - \sqrt{\frac{I_p}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{I_p}{2}(\theta_n(\bar{\xi}_n) - c)^2\right\}, \quad (15.6)$$

а

$$\theta_n(\bar{y}) = \int_{R^1} c p_n(\bar{y}, c) dc. \quad (15.7)$$

Соотношение (15.5) означает, что условные плотности $p_n(\bar{y}, \cdot)$ по вероятности сближаются в метрике $L^1(R^1)$ с гауссовскими плотностями, имеющими среднее $\theta_n(\bar{y})$ и постоянную дисперсию I_p^{-1} . Тем самым семейство условных плотностей для мер P_n на прямых γ_n асимптотически стабильно в смысле определения 3 § 13. В то же время сходимость плотностей условных распределений к соответствующим предельным плотностям в рассматриваемом случае нет. Действительно, в силу принципа инвариантности Донскера—Прохрова [2, с. 100], меры P_n слабо сходятся к винеровской мере W . Для нее же условные распределения на прямых γ_n , хотя и гауссовские, но с дисперсией, равной 1. Поэтому сходимость условных плотностей может происходить лишь в случае $I_p = 1$. Последнее равенство справедливо (см. [27, с. 558]) только для гауссовской плотности p .

Отметим еще, что результаты и примеры, относящиеся к случаю, когда $I_p = \infty$, показывают, что тогда интересующие нас условные плотности асимптотически вырождаются (см. [24, гл. 2, 4]).

В более общей ситуации: когда направление l — произвольный вектор из H_W , уже не удастся воспользоваться готовыми статистическими результатами. Однако методы их доказательств оказываются вполне применимыми. Прежде чем давать

точную формулировку соответствующего утверждения, сделаем еще одно замечание.

Если $l \in H_W$, но $l \notin E_n$, то условные распределения для P_n на прямых, параллельных l , будут вырожденными. Поэтому мы будем проектировать l на E_n с помощью отображения $i_n: X \rightarrow E_n$, сопоставляющего функции x непрерывную ломаную с вершинами в точках $(\frac{k}{n}, x(\frac{k}{n}))$, $k=0, 1, \dots, n$, и следить за условными распределениями мер P_n на прямых, параллельных вектору $l_n = i_n(l)$. Обозначение $p_n(y, c)$ мы сохраняем для плотности условного распределения меры $P_n J_n^{-1}$ на прямой $\{\bar{y} + c\bar{l}_n, c \in R^1\}$.

Теорема 15.1. Предположим, что $l \in H_W$, т. е. $l(0) = 0$ и $l' \in L^2[0, 1]$. Предположим, что величины ξ_n независимы, одинаково распределены и что $I_p < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ имеет место (15.5), где Δ_n и θ_n определяются, соответственно, формулами (15.6) и (15.7).

Доказательство этой теоремы в случае, когда l кусочно-линейна, содержится в [19]. В полном объеме теорема доказана в [55]. Там же приводятся обобщения этой теоремы на многомерный и многопараметрический случаи.

Локальный принцип инвариантности. Пусть величины ξ_n независимы, одинаково распределены и $E\xi_n = 0$, $D\xi_n = \sigma^2 < \infty$. Распределения P_n случайных ломаных (15.1) в этом случае слабо сходятся к винеровской мере W и потому для любого W -почти всюду непрерывного функционала f распределения $P_n f^{-1}$ слабо сходятся к $W f^{-1}$. Налагая более жесткие условия на общее распределение величин ξ_n и сужая класс функционалов, можно получить более сильное утверждение.

Теорема 15.2. Предположим, что выполнены следующие условия: 1) плотность p общего распределения величин ξ_n абсолютно непрерывна и $I_p < \infty$; 2) функционал f принадлежит классу \mathcal{M}_W . Тогда

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} W f^{-1}.$$

Доказательство. Положим $Q_n = W_{i_n^{-1}}$ и покажем сначала, что

$$\|P_n f^{-1} - Q_n f^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (15.8)$$

Пусть $x \in X_0$, X_0 — множество W -полной меры, о котором говорится в определении принадлежности f классу \mathcal{M}_W , $l \in H_W$ — соответствующий W — допустимый вектор, а $l_n = i_n(l)$. Поскольку $f \in \mathcal{M}_W$, то $f \in \mathcal{M}(x, l, (l_n))$. Далее, из существования плотности у распределения величин ξ_n и локальной теоремы Прохорова [23, т. 4.2.2] следует, что конечномерные распределения процессов ξ_n сходятся по вариации к надлежащим распре-

делениям винеровского процесса. Сходимость по вариации конечномерных распределений мер очевидна. Тем самым по предложению 13.1 последовательность (Γ_n) разбиений X на прямые, параллельные l_n , будет регулярна.

Условие $I_p < \infty$, в силу теоремы 15.1, обеспечивает асимптотическую стабильность условных распределений $\{P_\gamma^n\}$. Меры Q_n совпадают с распределениями в X случайных ломаных, построенных с помощью (15.1) по независимым одинаково распределенным гауссовским величинам с параметрами $(0, 1)$. Информационное количество Фишера для таких величин равно 1. Поэтому семейство условных мер $\{Q_\gamma^n\}$ также будет асимптотически стабильно.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 13.4 и (15.8) доказано. Сходимость $Q_n \xrightarrow{\text{var}} Wf^{-1}$ вытекает из теоремы 14.3 ■

Пространство $D[0, 1]$. Наряду с непрерывными случайными ломаными ξ_n , часто рассматривают процессы вида

$$\xi_n(t) = \sigma_n^{-1} S_{[nt]}, \quad t \in [0, 1], \quad (15.9)$$

траектории которых являются непрерывными справа ступенчатыми функциями. Пространство $C[0, 1]$ непригодно для изучения слабой сходимости таких процессов, и обычно его заменяют пространством $D[0, 1]$ функций без разрывов второго рода, снабженным топологией Скорохода. При исследовании сильной сходимости распределений функционалов от траекторий процессов ξ_n возникает затруднение, связанное с тем обстоятельством, что пространство $D[0, 1]$ не является линейным топологическим пространством, и потому непосредственно пользоваться результатами § 13 мы не можем. Эту трудность можно преодолеть двумя путями. Первый состоит в том, чтобы получить аналоги основных теорем § 13 специально для пространства $D[0, 1]$. Просмотр соответствующих доказательств показывает, что никаких принципиальных изменений при этом не понадобится. Однако в данной ситуации проще поступить иначе, поскольку есть возможность заменить $D[0, 1]$ другим, более удобным для наших целей пространством.

Пусть \mathfrak{D} — σ -алгебра борелевских подмножеств $D[0, 1]$, а \mathfrak{U} — σ -алгебра подмножеств $D[0, 1]$, порожденная равномерной топологией. Пусть P_n — вероятностные меры на \mathfrak{D} , соответствующие процессам ξ_n , W — винеровская мера на \mathfrak{D} . Меры P_n и W продолжаются с \mathfrak{D} на \mathfrak{U} (см. [2, с. 210]). Мы сохраним обозначения P_n и W для этих продолжений. Если величины (ξ_n) , определяющие ξ_n , независимы, одинаково распределены, имеют нулевое среднее и конечную дисперсию, то аналогично принципу инвариантности в $C[0, 1]$ имеет место слабая сходимость

$$P_n \xrightarrow{\mathfrak{U}} W.$$

Обозначим через $E[0, 1]$ равномерное замыкание множества тех функций из $D[0, 1]$, которые имеют конечное число скачков, причем моменты этих скачков — рациональные точки. Множество $E[0, 1]$, снабженное равномерной нормой, будет сепарабельным банаховым пространством; σ -алгебра борелевских подмножеств пространства $E[0, 1]$ совпадает с σ -алгеброй $\mathcal{U}[E[0, 1]]$.

Поскольку $E[0, 1]$ является носителем мер P_n, W , то мы можем непосредственно применить результаты § 13. Дословно повторяя доказательство теоремы 15.2, получим следующее утверждение.

Теорема 15.3. Пусть P_n — распределения в $E[0, 1]$, соответствующие процессам ξ_n , построенным с помощью (15.9) по независимым одинаково распределенным величинам ξ_k . Пусть $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$, а плотность p распределения величин ξ_k абсолютно непрерывна. Если $I_p < \infty$, а функционал f на пространстве $E[0, 1]$ принадлежит классу \mathcal{M}_W , то $P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} W f^{-1}$.

Некоторые обобщения. Теоремы 15.2 и 15.3 допускают ряд обобщений.

Первое связано с увеличением размерности параметрического множества. Пусть $\{\xi_n\}$, $\bar{n} \in \mathcal{N}^d$, — массив независимых одинаково распределенных случайных величин. Определим случайные процессы ξ_n , полагая

$$\xi_n(\bar{t}) = \sigma_n^{-1} S_{[n\bar{t}]}, \quad \bar{t} \in [0, 1]^d, \quad (15.10)$$

где $S_n = \sum_{i < n} \xi_i$, σ_n — нормирующие постоянные, а $[n\bar{t}]$ — целочисленный вектор, j -я координата которого равна $[nt_j]$.

Формула (15.10) определяет случайный элемент пространства $E[0, 1]^d$ — d -параметрического аналога пространства $E[0, 1]$. Это пространство можно описать следующим образом. Пусть $\Delta_j = \{\delta_{j,s}\}$, $s = 1, \dots, k_j$; $j = 1, \dots, d$, — конечные разбиения интервала $[0, 1]$ на подынтервалы вида $[a, b]$ с рациональными концами, а $\Delta = \prod \Delta_j$ — разбиение $[0, 1]^d$, являющееся прямым произведением разбиений Δ_j . Пусть E_Δ — совокупность всех функций на $[0, 1]^d$, постоянных на элементах разбиения Δ , и пусть $E = \bigcup E_\Delta$, где объединение берется по всем разбиениям Δ вышеуказанного типа. Пространство $E[0, 1]^d$ — это замыкание E в равномерной метрике, снабженное равномерной нормой.

Если $E\xi_{\bar{n}} = 0$, $D\xi_{\bar{n}} = \sigma^2 < \infty$, а $\sigma_n = \sigma n^{d/2}$, то распределения P_n случайных элементов (15.10) сходятся слабо в $E[0, 1]^d$ к распределению W_d d -параметрического винеровского поля — так называется гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией (5.6). Доказательство этого факта можно извлечь из [70].

Асимптотическое поведение условных распределений для P_n на параллельных прямых изучалось в [55]. Так же, как и в слу-

чае $d=1$, оказывается, что конечность информационного количества Фишера I_p для распределения исходных величин влечет асимптотическую стабильность семейства условных распределений.

Сходимость по вариации конечномерных распределений следует, как и ранее, из теоремы Прохорова. Поэтому, не внося практически никаких изменений в рассуждения, мы придем к аналогу теоремы 15.3. Точная формулировка дословно совпадает с формулировкой теоремы 15.3.

Следующее обобщение — на многомерный случай, когда (ξ_n) — массив независимых одинаковораспределенных случайных векторов с нулевыми средними и конечными вторыми моментами. Соответствующий результат формулируется вполне аналогично, только вместо конечности информационного количества Фишера нужно предполагать конечность информационной матрицы. Доказательство этого результата содержится в [55].

Еще один путь для обобщений — рассмотрение взвешенных сумм независимых одинаково распределенных величин. Пусть (ξ_n) , $n \in \mathbb{Z}$, — последовательность таких величин, $E\xi_n = 0$, $D\xi_n = 1$. Пусть (\bar{a}_j^n) , $j = 1, \dots, n$; $n \in \mathcal{N}$, — семейство последовательностей $\bar{a}_j^n = (a_{jk}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, для которых $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_{jk}^n)^2 = 1$. Положим

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k a_{[nt], k}^n, \quad t \in [0, 1]. \quad (15.11)$$

В силу известных результатов о сходимости рядов из независимых величин эта формула определяет случайный элемент пространства $E[0, 1]$. В частности, если $a_{jk}^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $1 \leq k \leq j$ и $a_{jk}^n = 0$ при $k > j$ или $k < 0$, мы получим процессы (15.9).

В [54] показано, что если $I_p < \infty$, то при определенных дополнительных условиях на коэффициенты a_{jk}^n для процессов (15.11) будет выполняться аналог теоремы 15.3. Сформулируем здесь только один результат из [54], относящийся к схеме скользящего суммирования.

Пусть (c_k) , $k \in \mathbb{Z}$, — суммируемая с квадратом последовательность, пусть

$$\eta_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-n} \xi_k, \quad S_n = \sum_1^n \eta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{n,k} \xi_k,$$

где $u_{n,k} = \sum_{i=1}^n c_{k-i}$.

Положим $a_{jk}^n = \frac{u_{jk}}{\sqrt{DS_n}}$. Тогда (15.11) преобразуется к виду

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{DS_n}} S_{[nt]}, \quad t \in [0, 1]. \quad (15.12)$$

Обозначим через P_n распределение ξ_n в $E[0, 1]$.

Теорема 15.4. Предположим, что выполнены условия:

1) $DS_n = n^\gamma h(n)$, где $\gamma \in (0, 2)$, а h — медленно меняющаяся функция; 2) для некоторого $s > (2\gamma)^{-1}$ $E|\xi_{11}|^{2s} < \infty$; 3) информационное количество Фишера, соответствующее распределению величин ξ_n , конечно; 4)

$$\sum_{k=1}^n c_k = \alpha n^{\frac{\gamma-1}{2}} h^{1/2}(n) (1 + o(1)),$$

$$\sum_{k=-n}^0 c_k = \beta n^{\frac{\gamma-1}{2}} h^{1/2}(n) (1 + o(1)),$$

причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$; 5) функционал f принадлежит классу \mathcal{M}_{W_γ} , где W_γ — распределение в $E[0, 1]$ гауссовского процесса с нулевым средним и корреляционной функцией (5.9). Тогда $P f^{-1 \text{ var}} \rightarrow W_\gamma f^{-1}$.

Замечание 1. Условие 4) появляется при исследовании условных распределений мер P_n . Для доказательства слабой сходимости к W_γ достаточно лишь условий 1) и 2) (см. [13]).

В случае, когда $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ и $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k = \sigma \neq 0$, условие 4) выполняется автоматически, поскольку $DS_n = \sigma^2 n (1 + o(1))$. Поэтому $\gamma = 1$ и предельная мера совпадает с винеровской: $W_1 = W$.

Линейные функционалы. В теоремах 15.1—15.4, устанавливающих локальный принцип инвариантности, имеется весьма жесткое условие конечности информационного количества Фишера. Вопрос о том, можно ли его заменить более слабым (например, условием существования плотности p распределения величин ξ_n), остается открытым. Однако для некоторых подклассов класса \mathcal{M}_W ослабление условия $I_p < \infty$ оказывается возможным. Рассмотрению одного такого подкласса — функционалов типа супремума — посвящен § 16. Здесь мы укажем другой подкласс.

Пусть P_n — распределение в $X = E[0, 1]$ случайного элемента (15.9), построенного по последовательности независимых одинаково распределенных величин (ξ_n) с нулевыми средними и единичными дисперсиями, пусть W — винеровская мера в $E[0, 1]$ и пусть $f: X \rightarrow R^m$ — m -мерный функционал вида $f = (f_1, \dots, f_m)$.

$$f_k(x) = \int_0^1 x(t) \mu_k(dt), \quad \mu_k \text{ — конечный заряд на } \mathfrak{B}_{[0,1]}.$$

Теорема 15.5. Предположим, что для некоторого n_0 плотность абсолютно непрерывной компоненты распределения суммы $\sum_1^{n_0} \xi_k$ отлична от нуля. Предположим также, что распределение $\mathbf{W}f^{-1}$ невырождено. Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{W}f^{-1}$.

Доказательство легко выводится из теоремы 2 [14].

§ 16. Функционалы типа супремума

В этом параграфе мы будем рассматривать функционалы вида

$$f(x) = \sup_{t \in [0,1]} \Psi(x(t)), \quad x \in \mathbf{D}[0,1], \quad (16.1)$$

где Ψ — выпуклая вниз функция.

Структура этих функционалов позволяет использовать теорему 13.1. В применении к случайным ломаным полученные результаты оказываются существенно сильнее тех, которые можно вывести из локального принципа инвариантности, а именно, условие конечности информационного количества Фишера заменятся просто условием существования плотности.

Функционалы от процессов с независимыми приращениями. Пусть $(\xi_n(t)), t \in [0,1], n=0,1,\dots$, — одномерные стохастически непрерывные процессы с независимыми приращениями, определенные на $[0,1]$. Переходя, если нужно, к модификациям, можно считать, что с вероятностью 1 траектории этих процессов принадлежат пространству $\mathbf{D}[0,1]$ (см. [9], т. 2, с. 401). Обозначим через \mathbf{P}_n соответствующие процессам ξ_n распределения.

Теорема 16.1. Предположим, что выполняются условия 1) $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$; 2) распределение $\mathcal{P}_{\xi_n(0)}$ величины $\xi_n(0)$ сходится по вариации к $\mathcal{P}_{\xi_0(0)}$; 3) $\mathcal{P}_{\xi_0(0)} \ll \lambda$; 4) $\Psi'(t) \neq 0$ для почти всех $t \in \mathcal{R}^1$. Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$.

Следующий результат относится к часто встречающемуся случаю, когда значение предельного процесса в начальный момент фиксировано.

Теорема 16.2. Предположим, что выполняются условия: 1) $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$; 2) $\xi_0(0) = c$ с вероятностью 1; 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (0, \varepsilon)$ такое, что $\mathcal{P}_{\xi_n(t)} \xrightarrow{\text{var}} \mathcal{P}_{\xi_0(t)}$; 4) $\forall t \in (0,1] \mathcal{P}_{\xi_0(t)} \ll \lambda$; 5) $\Psi'(t) \neq 0$ для почти всех $t \in \mathcal{R}^1$; 6) $\mathbf{P}_n \{x \mid f(x) > \Psi(c)\} \rightarrow \mathbf{P}_0 \{x \mid f(x) > \Psi(c)\}$. Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$.

Заметим, что условие 6) не вытекает, вообще говоря, из слабой сходимости \mathbf{P}_n к \mathbf{P}_0 . Нижеследующий пример показывает, что возможна ситуация, когда свойства 1) — 5) для процессов ξ_n выполнены, свойство 6) — не выполнено и сильной сходимости $\mathbf{P}_n f^{-1}$ к $\mathbf{P}_0 f^{-1}$ нет.

Пример 1. Пусть $(\omega(t), t \in [0, 1])$ — стандартный винеровский процесс. Положим

$$\begin{aligned}\xi_n(t) &= \omega(t), \quad t \in [0, n^{-1}], \\ \xi_n(t) &= \omega(t) + h(n^{-1}) - h(t), \quad t \in (n^{-1}, 1], \\ \xi_0(t) &= \omega(t) - h(t),\end{aligned}$$

где $h(t) = t^{1/3}$.

В качестве Ψ возьмем функцию $\Psi(t) = t$.

Легко видеть, что свойства 1) — 5) теоремы 16.2 выполнены. Из закона повторного логарифма для винеровского процесса ([26, с. 52]) следует, что распределение $\mathbf{P}_0 f^{-1}$ имеет атом в нуле. В то же время распределения $\mathbf{P}_n f^{-1}$ абсолютно непрерывны.

Поэтому сходимость $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$ невозможна.

Приведем одно следствие теоремы 16.2 для случайных ломаных.

Пусть η_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона \mathcal{L}_α с показателем $\alpha \in (0, 2]$. Положим

$S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$ и пусть σ_n — те нормирующие постоянные, для которых распределение $\sigma_n^{-1} S_n$ сходится к \mathcal{L}_α . Процессы ξ_n , $n \geq 1$, определим формулой (15.9), а в качестве ξ_0 возьмем устойчивый процесс, для которого $\mathcal{P}_{\xi_0(1)} = \mathcal{L}_\alpha$.

Пусть $h_0 \in \mathbf{D}[0, 1]$, $h_n \rightarrow h_0$. Положим

$$\begin{aligned}f_{1,n}(x) &= \sup_{[0,1]} \{x(t) + h_n(t)\}, \\ f_{2,n}(x) &= \sup_{[0,1]} |x(t) + h_n(t)|, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Теорема 16.3. Предположим, что выполняются условия: 1) для некоторого m распределение \mathcal{P}_{S_m} имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту; 2) $\mathbf{P}_n \{x | f_{1,n}(x) > h_0(0)\} \rightarrow \rightarrow \mathbf{P}_0 \{x | f_{1,0}(x) > h_0(0)\}$ (соответственно, $\mathbf{P}_n \{x | f_{2,n}(x) > |h_0(0)|\} \rightarrow \rightarrow \mathbf{P}_0 \{x | f_{2,0}(x) > |h_0(0)|\}$). Тогда $\mathbf{P}_n f_{1,n}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f_{1,0}^{-1}$ (соответственно, $\mathbf{P}_n f_{2,n}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f_{2,0}^{-1}$).

Перейдем к доказательствам.

Доказательство теоремы 16.1. Рассмотрим разбиение Γ пространства $\mathbf{D}[0, 1]$ на прямые $\gamma = \{x + c1, c \in \mathbb{R}^1\}$, где $1(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$. Факторпространство отождествим с подпространством тех x , для которых $x(0) = 0$.

Так как процессы ξ_n , $n \geq 0$, имеют независимые приращения, то условные распределения \mathbf{P}_{x^n} мер \mathbf{P}_n на прямой $\{x + c1, c \in \mathbb{R}^1\}$ совпадают с распределением $\mathcal{P}_{\xi_n(0)}$. Поэтому

$$\|P_{x^n} f^{-1} - P_{x^0} f^{-1}\| \leq \|P_{\xi_n(0)} - P_{\xi_0(0)}\| \rightarrow 0$$

по условию 2). Таким образом, условие 1) теоремы 13.1 выполнено.

Рассмотрим функцию $f_x(c) = f(x+c1)$, $x \in D[0, 1]/\Gamma$. Ее можно представить в виде $f_x(c) = \sup_{t \in [0, 1]} \Psi_t(c)$, где $\Psi_t(c) = \Psi(x(t)+c)$. Так как Ψ выпукла и $\Psi'(c) \neq 0$ почти всюду, то и f_x будет обладать такими же свойствами.

Пусть $x_n \in D[0, 1]/\Gamma$, $x_n \rightarrow x$. Это означает, что существует последовательность u_n неубывающих автоморфизмов отрезка $[0, 1]$, равномерно сходящаяся к тождественному отображению, и такая, что функции $\tilde{x}_n(t) = x_n(u_n(t))$ равномерно на $[0, 1]$ сходятся к $x(t)$. Поскольку $f_{\tilde{x}_n} = f_{x_n}$, то в дальнейшем можно считать, что сами x_n сходятся к x в равномерной метрике.

Полагая $\Psi_t^n(c) = \Psi(x_n(t)+c)$, будем иметь:

$$|f_{x_n}(c) - f_x(c)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |\Psi_t^n(c) - \Psi_t(c)|. \quad (16.2)$$

Пусть $\delta_n = \sup |x_n(t) - x(t)|$, а M таково, что $\sup |x_n(t)| \leq M$ при всех n . Из (16.2) следует, что для любого конечного интервала $[a, b]$

$$\sup_{c \in [a, b]} |f_{x_n}(c) - f_x(c)| \leq \sup_{\substack{s, t \in [a-M, b+M] \\ |t-s| \leq \delta_n}} |\Psi(t) - \Psi(s)|.$$

Так как Ψ непрерывна на R^1 , то отсюда следует, что f_{x_n} сходится к f_x равномерно на конечных интервалах. Применяя теорему 4.5, получаем, что $P_{x_n}^0 f^{-1} = P_{\xi_n(0)} f_{x_n}^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P_{\xi_0(0)} f_x^{-1} = P_{x^0} f^{-1}$. Это означает, что имеет место условие 2) теоремы 13.1. Следовательно, $\|P_n f^{-1} - P_0 f^{-1}\| \rightarrow 0$ ■

Доказательство теоремы 16.2 мы не приводим, так как оно с помощью аппроксимации функционала f функционалами $f_\varepsilon(x) = \sup_{t \in [0, 1]} \Psi(x(t))$ выводится из теоремы 16.1 почти точно так же, как доказательство теоремы 12.2 выводится из теоремы 12.1. Близкие рассуждения использованы в [19, т. 4.1].

Доказательство теоремы 16.3. Положим

$$\hat{\xi}_n(t) = \xi_n(t) + h_n(t), \quad n=0, 1, \dots,$$

и пусть $\Psi(t) = t$ (соответственно, $\Psi(t) = |t|$). Покажем, что для процессов $\hat{\xi}_n$ выполняются условия теоремы 16.2.

Сильная сходимость одномерных распределений (условие 3)), вытекает из локальной теоремы Ю. В. Прохорова (см. [23, с. 159]). Условие 4) следует из того, что распределение величины $\xi(t)$ устойчиво. Условие 6) превращается в условие 2) доказываемой теоремы. Условия 2) и 5) выполняются очевидным образом. Для проверки слабой сходимости $\bar{\xi}_n$ к $\bar{\xi}_0$ по

теореме 2.1 достаточно установить \mathbf{P}_0 -почти всюду непрерывность отображения $x \rightarrow x+h$. Это вытекает из того, что сложение в $\mathbf{D}[0, 1]$ непрерывно в точке (x, y) , если функции x и y не имеют общих скачков, и из стохастической непрерывности процесса ξ_0 ■

Функционалы от процессов со значениями в R^m . Предположим, что значения процессов $(\xi_n(t))$, $t \in [0, 1]$, $n=0, 1, 2, \dots$, принадлежат R^m . Предположим, также, что приращения этих процессов независимы и что их траектории с вероятностью 1 принадлежат пространству $\mathbf{D}^m[0, 1]$. Обозначим через \mathbf{P}_n распределения в $\mathbf{D}^m[0, 1]$, соответствующие этим процессам. Рассмотрим функционал

$$f(x) = \sup_{[0, 1]} \|x(t)\|, \quad x \in \mathbf{D}^m[0, 1], \quad (16.3)$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^m .

Мы встречались с функционалами этого типа в § 12, где изучался вопрос об абсолютной непрерывности их распределений.

Теорема 16.4. Предположим, что выполняются условия:

1)–3) теоремы 16.1. Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$.

Теорема 16.5. Предположим, что выполнены условия 1)–4) теоремы 16.2. Предположим также, что

$$\mathbf{P}_n \{x \mid f(x) = \|c\|\} \rightarrow \mathbf{P}_0 \{x \mid f(x) = \|c\|\}. \quad (16.4)$$

Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$.

Из теоремы 16.5 можно получить различные следствия для случайных ступенчатых процессов, построенных по независимым случайным векторам. Мы не будем этим заниматься.

Доказательства теорем 16.4 и 16.5 вполне аналогичны доказательствам теорем 16.1 и 16.2.

Функционалы от полей с независимыми приращениями. Метод, основанный на применении теоремы 13.1, малочувствителен к размерности временного параметра и позволяет получить аналоги предшествующих результатов для полей с независимыми приращениями.

Под случайным полем мы подразумеваем случайный процесс $\xi_{\bar{t}}$, $\bar{t} \in T$, для которого $T \subset R^d$. В дальнейшем, в рамках этого раздела, будет предполагаться, что $T = [0, 1]^d$.

Как обычно, для \bar{t} , $s \in T$, мы пишем $\bar{t} \leq s$, если $\bar{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $s = (s_1, \dots, s_d)$ и $t_i \leq s_i$ при $i=1, \dots, d$.

Поле $\xi = (\xi_{\bar{t}})$, $\bar{t} \in T$, мы называем полем с независимыми приращениями, если для любых $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_m \in T$, $\bar{t}_1 \leq \dots \leq \bar{t}_m$, $\bar{t}_i \in T_0 = T \setminus (0, 1]^d$, величины $\xi_{\bar{t}_1}$, $\xi_{\bar{t}_2} - \xi_{\bar{t}_1}, \dots, \xi_{\bar{t}_m} - \xi_{\bar{t}_{m-1}}$ независимы.

Замечание 1. Существует другое определение поля с независимыми приращениями, в котором постулируется незави-

симость приращений $\Delta_{\xi}(\Pi_1), \dots, \Delta_{\xi}(\Pi_m)$ для любых попарно непересекающихся параллелепипедов $\Pi_k \subset T$. Под приращением поля ξ на параллелепипеде $\Pi = \prod_1^d [t_i, t_i + h_i)$ понимается величина $\Delta_{\xi}(\Pi) = \Delta_1^{h_1} \dots \Delta_d^{h_d} \xi_{\bar{t}}$, где Δ_i^h — оператор взятия разности по i -й координате:

$$\Delta_i^h g(\bar{t}) = g(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + h, t_{i+1}, \dots, t_d) - g(\bar{t}).$$

В случае, когда значения поля $\xi_{\bar{t}}$ при $\bar{t} \in T_0$ фиксированы с вероятностью 1 (т. е. неслучайны), это определение выделяет более узкий класс полей, чем определение, принятое нами.

Пусть (ξ_n) , $n=0, 1, \dots$, — последовательность полей с независимыми приращениями и с реализациями, почти наверное принадлежащими пространству $\mathbf{D}(T)$ — многопараметрическому аналогу пространства $\mathbf{D}[0, 1]$. Пусть \mathbf{P}_n — распределение поля ξ_n в $\mathbf{D}(T)$ и пусть f — функционал вида

$$f(x) = \sup \Psi(x(t)), \quad x \in \mathbf{D}(T),$$

где Ψ — выпуклая функция.

Приведем аналог теоремы 16.2. Что касается аналога теоремы 16.1, то его формулировка дословно совпадает с формулировкой теоремы 16.1.

Теорема 16.6. Предположим, что выполнены условия:

- 1) $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}_0$;
- 2) для $\bar{t} \in T_0$ $\xi_0(\bar{t}) = c(\bar{t})$ с вероятностью 1, $c: T_0 \rightarrow R^1$;
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{t} \in [0, \varepsilon)^d$ такое, что $\mathcal{P}_{\xi_n(\bar{t})} \xrightarrow{\text{var}} \mathcal{P}_{\xi_0(\bar{t})}$;
- 4) $\forall \bar{t} \in T \setminus T_0 \mathcal{P}_{\xi_0(\bar{t})} \ll \lambda$;
- 5) $\Psi'(s) \neq 0$ для почти всех $s \in R^1$;
- 6) $\mathbf{P}_n \{x | f(x) > c\} \rightarrow \mathbf{P}_0 \{x | f(x) > c\}$, где $c = \sup_{\bar{t} \in T_0} \Psi(c(\bar{t}))$.

Тогда $\mathbf{P}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{P}_0 f^{-1}$.

Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству теоремы 16.2.

Применим теорему 16.6 к полям (15.10), построенным по независимым одинаково распределенным величинам, лежащим в зоне притяжения устойчивого закона \mathcal{L}_α с показателем $\alpha \in (0, 2]$.

Пусть $\sigma_n = \sigma(n)$ — те нормирующие постоянные, для которых распределение величины $\sigma_n^{-1} S_{(n, \dots, n)}$ сходится к \mathcal{L}_α . В этом случае, как показано в [70], распределения \mathbf{P}_n полей ξ_n сходятся слабо в $\mathbf{D}(T)$ к распределению \mathbf{P}_0 , соответствующему полю с независимыми приращениями V_α , для которого:

- 1) $V_\alpha(\bar{t}) = 0 \quad \forall \bar{t} \in T_0$;

2) для любого параллелепипеда $\Pi \subset T$ распределение приращения $\Delta V_\alpha(\Pi)$ совпадает с распределением случайной величины $(\lambda^d(\Pi))^{1/\alpha} \xi$, где $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{L}_\alpha$.

Пусть $h \in D(T)$ и

$$M_n = \max_{\bar{k} \leq (n, \dots, n)} \left\{ S_{\bar{k}} \sigma_n^{-1} + h\left(\frac{\bar{k}}{n}\right) \right\}, \quad n = 1, \dots,$$

$$M = \sup_{\bar{t} \in T} \{ V_\alpha(\bar{t}) + h(\bar{t}) \}.$$

Теорема 16.7. Предположим, что выполнены условия 1) для некоторого \bar{n}_0 абсолютно непрерывная компонента распределения $S_{\bar{n}_0}$ отлична от нуля; 2) $\mathbf{P}\{M=c\}=0$, где $c = \sup_{\bar{t} \in T_0} h(\bar{t})$. Тогда плотность абсолютно непрерывной компоненты распределения величины M_n сходится в метрике $L^1(R^1)$ к плотности распределения величины M .

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 16.6, если положить

$$\xi_0(\bar{t}) = V_\alpha(\bar{t}) + h(\bar{t}), \quad \xi_n(\bar{t}) = V_n(\bar{t}) + h_n(\bar{t}),$$

$$h_n(\bar{t}) = h\left(\frac{\bar{k}}{n}\right) \text{ при } \bar{t} \in \prod_1^d \left[\frac{k_i}{n}, \frac{k_i+1}{n} \right),$$

а в качестве Ψ взять $\Psi(s) = s$.

Решетчатый случай. Рассмотрим предельное поведение распределений функционалов

$$f(x) = \sup_{t \in [0,1]} x(t), \quad g(x) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

в том случае, когда значения процессов $\xi_n(t)$ имеют решетчатые распределения.

Говоря более точно, мы будем предполагать, что $\forall t \in [0, 1]$ значения величины $\xi_n(t)$ принадлежат решетке $A_n = \{a_{nk}\}$, $a_{nk} = kh_n$, $k \in \mathcal{Z}$, причем $h_n \rightarrow 0$. Обозначим через D_n подмножество пространства $D[0, 1]$, состоящее из тех x , для которых $x([0, 1]) \subset A_n$. Обозначим через j_n отображение R^1 в A_n , сопоставляющее точке s ближайшую к ней справа точку вида a_{nk} .

Положим

$$\pi_n = \mathbf{P}_n f^{-1}, \quad \sigma_n = (\mathbf{P}_0 f^{-1}) j_n^{-1}.$$

Здесь \mathbf{P}_n — распределение в $D[0, 1]$, соответствующее процессу ξ_n . Заметим, что распределение σ_n сосредоточено на решетке A_n и

$$\sigma_n(a_{nk}) = \mathbf{P}\{f(\xi) \in (a_{n,k-1}, a_{n,k}]\}.$$

Теорема 16.8 [17]. Предположим, что процессы ξ_n имеют независимые приращения и что $\xi_0(0) = c$ с вероятностью 1. Предположим также, что выполнены условия:

- 1) $\forall t \in (0, 1] \mathcal{P}_{\xi_0(t)} \ll \lambda;$
- 2) $\forall t \in (0, 1] \|\mathcal{P}_{\xi_n(t)} - \mathcal{P}_{\xi_0(t)} j_n^{-1}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$
- 3) $\pi_n(c_n) - \sigma_n(c_n) \rightarrow 0$, где $c_n = j_n(c)$. Тогда $\|\pi_n - \sigma_n\| \rightarrow 0$.

Если предельное распределение $\mathbf{P}_0^{f^{-1}}$ имеет достаточно регулярную плотность p , то сближение по вариации π_n и σ_n , устанавливаемое в теореме, будет эквивалентно следующему равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum |\pi_k(a_{nk}) - h_n p(a_{nk})| = 0,$$

которое имеет форму локальной предельной теоремы.

Аналогичное утверждение имеет место и для функционала g .

Оценка скорости сходимости. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, $\mathbf{E}|\xi_k|^3 < \infty$. Пусть \mathbf{P}_n — распределение в $\mathbf{D}[0, 1]$ случайного элемента (15.9), построенного по величинам ξ_1, \dots, ξ_n . Пусть \mathbf{W} — винеровская мера в $\mathbf{D}[0, 1]$. Положим

$$\Psi_1(t) = \left(t \ln \frac{e}{t}\right)^{1/2}, \quad \Psi_2(t) = t^{1/2} |\ln t|^{-1}, \quad t \in [0, 1];$$

$$H_i(L) = \{x \in \mathbf{D}[0, 1] \mid \omega_x(t) \leq L \Psi_i(t), \forall t \in [0, 1]\}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим функционалы:

$$f_\varepsilon(x) = \sup_{[e, 1]} \{x(t) + h(t)\}, \quad g_\varepsilon(x) = \sup_{[e, 1]} |x(t) + h(t)|,$$

здесь $x \in \mathbf{D}[0, 1]$, h — фиксированная функция из $\mathbf{D}[0, 1]$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$.

Теорема 16.9 [19]. Предположим, что для некоторого n_0 абсолютно непрерывная компонента распределения суммы $\sum_1^{n_0} \xi_k$ отлична от нуля. Тогда найдется постоянная c_1 , зависящая лишь от L и $\mathbf{E}|\xi_k|^3$ такая, что $\forall n \geq \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon > 0$, имеет место оценка

$$\sup_{h \in H_1(L)} \|\mathbf{P}_n f_\varepsilon^{-1} - \mathbf{W} f_\varepsilon^{-1}\| \leq c_1 \varepsilon^{-3/8} (\ln n)^{3/8} n^{-1/8}. \quad (16.5)$$

Теорема 16.10 (М. А. Лифшиц). Предположим, что для некоторого n_0 распределение суммы $\sum_1^{n_0} \xi_k$ имеет ограниченную плотность. Тогда найдутся постоянные c_2 и c_3 , зависящие только от L и $\mathbf{E}|\xi_k|^3$ и такие, что

$$\sup_{h \in H_2(L)} \|\mathbf{P}_n f_0^{-1} - \mathbf{W} f_0^{-1}\| \leq c_2 n^{-1/8} (\ln n)^6 \exp(c_3 \sqrt{\ln n}). \quad (16.6)$$

В точности такие же оценки справедливы и для функционалов g^ε .

ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ДИФFUЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 17. Допустимые группы преобразований для мер,
отвечающих диффузионным процессам.
Результаты об абсолютной непрерывности

Пусть Q — распределение в пространстве $C = C[0, T]$ процесса, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t b(s, \xi(s)) d\omega(s) \quad (17.1)$$

В уравнении (17.1) ω — винеровский процесс, а $\xi(0)$ — случайная величина, не зависящая от ω . Введем новый процесс $\bar{\omega}(t) = \omega(t) + \xi(0)$. Ясно, что $d\bar{\omega} = d\omega$ и всюду в дальнейшем мы под ω будем понимать именно процесс $\bar{\omega}$, нигде этого специально не оговаривая.

Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $a(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x , а функция $b(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t , причем все перечисленные производные непрерывны по (t, x) и ограничены на $[0, T] \times R^1$.

2. Для любых (t, x) $b(t, x) \neq 0$.

Обозначим через P распределение процесса ω в C . Для меры P допустимыми являются группы операторов сдвига. Точное описание таких групп дается в следующих двух леммах.

Лемма 17.1. Для любого $h \in L^2[0, T]$ группа сдвигов

$G_c^h(x) = x + cl$, $l(t) = \int_0^t h(s) ds$ допустима для P , причем условные меры на элементах разбиения суть гауссовские с дисперсией $\sigma^2 = (\|h\|_2^2)^{-1}$.

Лемма 17.2. Если $\mathcal{P}_{\xi(0)} \ll \lambda$, то группа сдвигов $F_c(x) = x + cl$, $l(t) \equiv 1$ допустима для P , причем условные меры на элементах разбиения P_Γ -почти везде совпадают с $\mathcal{P}_{\xi(0)}$. (P_Γ — фактормера разбиения на орбиты групп).

Для доказательства леммы 17.1 достаточно заметить, что условные распределения процесса ω при фиксированном $\xi(0) = x$ не зависят от x и совпадают с распределением стандартного броуновского движения, выпущенного из точки x . Соответствующий факт об условных распределениях установлен в § 5, пример 3. Лемма 17.2 очевидна ■

Будем теперь искать допустимые группы преобразований для меры \mathbf{Q} . Идея состоит в том, чтобы рассматривать меру \mathbf{Q} как образ меры \mathbf{P} под действием измеримого отображения

$$\Xi: \omega(\omega, \cdot) \rightarrow \xi(\omega, \cdot)$$

(Измеримость этого отображения вытекает из свойств стохастического интеграла, см. [34]).

Заметим, что из условия отличности от нуля коэффициента диффузии сразу же следует, что отображение Ξ обратимо. Действительно, обратное отображение Ξ^{-1} задается формулой

$$\omega(t) = \xi(0) + \int_0^t \frac{d\xi(s)}{b(s, \xi(s))} - \int_0^t \frac{a(s, \xi(s))}{b(s, \xi(s))} ds.$$

В пространстве $\Xi(\mathbf{C})$ определим группы преобразований Φ_c^h и Ψ_c , полагая

$$\Phi_c^h = \Xi G_c^h \Xi^{-1}, \quad \Psi_c = \Xi \circ F_c \circ \Xi^{-1}.$$

(Мы используем обозначения, введенные в леммах 17.1 и 17.2; $h \in L^2[0, T]$).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.1. Инфинитезимальные операторы групп преобразований Φ_c^h , $h \in L^2[0, T]$, и Ψ_c определены как непрерывные отображения $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ и задаются формулами

$$L^h y(t) = b(t, y(t)) \varphi(t) \int_0^t \varphi(s)^{-1} h(s) ds \quad (17.2)$$

$$Ly(t) = \frac{b(t, y(t))}{b(0, y(0))} \varphi(t), \quad (17.3)$$

где

$$\varphi(t) = \exp \int_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial x}(s, y(s)) - \frac{\partial b}{\partial t}(s, y(s)) - \frac{\partial b}{\partial x}(s, y(s)) \frac{a(s, y(s))}{b(s, y(s))} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(s, y(s)) \frac{a(s, y(s))}{b(s, y(s))} \right) ds.$$

Замечание 1. Из теоремы 17.1 сразу же следует, что для \mathbf{Q} -почти всех x отображение $c \rightarrow \Phi_c^h(x)$ задает гладкую несамопересекающуюся кривую в \mathbf{C} , причем касательный вектор к этой кривой в точке $y \in \mathbf{C}$ есть $L^h(y)$ (соответственно $L(y)$).

Замечание 2. Рассмотрим разбиение \mathbf{C} на орбиты группы Φ_c^h . Тогда условные меры на элементах разбиения суть гауссовские с дисперсией $\sigma^2 = (\|h\|_2^2)^{-1}$. Это следует из того, что Ξ обратимо, а элементы разбиения $\{\Phi^h(x)\}$ суть образы траекторий групп сдвигов. Аналогично, условные меры на траекториях групп Ψ_c совпадают с $\mathcal{P}_{\xi(0)}$.

Замечание 3. Из формулы 17.2 и непрерывности коэффициентов уравнения следует, что отображение $y \rightarrow L^h(y)$ непре-

равно и, кроме того, легко видеть, что множество $H_0(y) = \{L^h(y), h \in L^2[0, T]\}$ плотно в пространстве $C^0 = \{x \in C \mid x(0) = 0\}$. Таким образом из теоремы 17.1 вытекает, что мера \mathbf{Q} имеет (C, H_0) -достаточное число допустимых сдвигов.

Замечание 4. Если $a(t, x) \equiv 0$, $b(t, x) = b(x)$, то условие $b(x) \neq 0$ можно заменить условием $\mathcal{P}_{\xi(0)}(\{x \in R^1 \mid b(x) = 0\}) = 0$. В этом случае с вероятностью 1 $b(\xi(t)) \neq 0$ для всех t .

Доказательство теоремы 17.1. Докажем (17.2). Без ограничения общности, можно считать, что процесс w реализован на вероятностном пространстве (C, \mathcal{B}, P) . Для $c \in R^1$ определим процесс ξ_c , полагая

$$\xi_c(t) = \xi_c(t, \omega) = \xi(t, \omega + cl) = [\mathbb{E}(\omega + cl)](t). \quad (17.4)$$

Нетрудно показать, что процесс $\xi_c(t)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\begin{aligned} \xi_c(t) = \omega(0) + \int_0^t a(s, \xi_c(s)) ds + \int_0^t b(s, \xi_c(s)) d\omega(s) + \\ + c \int_0^t b(s, \xi_c(s)) h(s) ds. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Будем рассматривать $\{\xi_c\}$ как семейство диффузионных процессов, зависящих от параметра c . При сделанных относительно коэффициентов уравнения (17.1) предположениях из результатов [3] следует, что для P -п.ч. всех ω существует непрерывная по (t, c) производная $\frac{\partial \xi_c}{\partial c}(t)$, удовлетворяющая стохастическому уравнению, которое может быть получено из (17.5) формальным дифференцированием по c . Обозначим через $\tilde{L}(t) = \tilde{L}(t, \omega)$ значение этой производной при $c=0$. Тогда $\tilde{L}(t)$ есть решение следующего стохастического уравнения (уже со случайными коэффициентами):

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t) = \int_0^t \tilde{L}(s) \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega(s) + \int_0^t \tilde{L}(s) \frac{\partial a}{\partial x}(s, \xi(s)) ds + \\ + \int_0^t b(s, \xi(s)) h(s) ds. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Из (17.4) следует, что для P -почти всех ω при всех t

$$\frac{\partial}{\partial c} ([\mathbb{E}(\omega + cl)](t)) \Big|_{c=0} = \tilde{L}(\omega, t). \quad (17.7)$$

Кроме того, так как функция $\tilde{L}(t, \omega + cl)$ непрерывна по (t, c) , из (17.7) следует более сильное утверждение: при $c \rightarrow 0$

$$\|c^{-1}(\mathbb{E}(\omega + cl) - \mathbb{E}(\omega)) - c\tilde{L}(\omega, \cdot)\| \rightarrow 0.$$

Заметим, что непосредственно воспользоваться результатами [3] мы здесь не имели права, поскольку в [3] доказательство ведется в предположении, что двухпараметрический процесс $\xi_c(t)$ сепарабелен. Просто заменить наш процесс на эквивалентный ему сепарабельный мы не можем, так как для нового процесса может не выполняться (17.4). Тем не менее, можно показать, что отображение Ξ можно изменить на множестве \mathbf{R} -меры нуль так, что реализации нового процесса $\xi_c(t)$ будут иметь нужную нам гладкость. Кроме того, относительно функции h мы предполагаем только, что она из $L^2[0, 1]$, но не накладываем условие ограниченности, как это требуется в [3]. Доказательство при отсутствии предположения об ограниченности проводится вполне аналогично.

Уравнение (17.6) линейное, его решение явно выписывается (см. [10, с. 37])

$$\tilde{L}(t) = x(t) \int_0^t (x(s))^{-1} b(s, \xi(s)) h(s) ds, \quad (17.8)$$

где

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial a}{\partial x}(s, \xi(s)) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) \right]^2 ds + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega(s) \right\}.$$

Такая запись решения еще недостаточна для наших целей, так как сюда входит выражение $\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega(s)$. Мы же должны уметь находить это решение, зная только траекторию $\xi(\cdot)$ и не имея информации о процессе ω . Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся следующим тождеством, которое легко проверяется с помощью леммы Ито.

$$\begin{aligned} b(t, \xi(t)) &= b(0, \xi(0)) \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega(s) + \right. \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial b}{\partial t}(s, \xi(s)) \right) \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) \\ &+ \left. \frac{\partial b}{b(s, \xi(s))} + \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) a(s, \xi(s)) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(s, \xi(s)) b(s, \xi(s)) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) \right]^2 ds \right\}. \quad (17.9) \end{aligned}$$

Далее, в (17.8) вместо члена $\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega(s)$ подставим

его выражение, полученное из (17.9). Теперь остается только положить $L^h(y) = \bar{L}(\cdot, \Xi^{-1}(y))$ и заметить, что полученное из (17.8) и (17.9) выражение для $L^h(y)$ в точности совпадает с тем, которое фигурирует в условии теоремы.

Доказательство п. 2 проводится совершенно аналогично. Соответствующее линейное уравнение для $\bar{L}(t) = \left. \frac{\partial \xi_c(t)}{\partial c} \right|_{c=0}$ будет иметь вид

$$\bar{L}(t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial a}{\partial x}(s, \xi(s)) \bar{L}(s) ds + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) \bar{L}(s) d\omega(s).$$

Его решение явно выписывается:

$$\bar{L}(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left[\frac{\partial a}{\partial x}(s, \xi(s)) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) \right)^2 \right] ds + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(s, \xi(s)) d\omega \right\}.$$

Опять остается лишь воспользоваться тождеством (17.9) ■

Теперь в нашем распоряжении имеется целое семейство допустимых групп преобразований и мы можем, используя технику, развитую в предыдущих параграфах, получить результат об абсолютной непрерывности распределений функционалов от траекторий процесса ξ .

Справедливы следующие два утверждения.

Теорема 17.2. Пусть функционал $f: \mathbb{C} \rightarrow R^1$ локально удовлетворяет условию Липшица (в равномерной метрике) и для \mathbf{Q} -почти всех $s \in \mathbb{C}$ существует такое $l_s \in \mathbb{C}^0$, что ненулевая производная $D_l f(y)$ по направлению l в точке y существует и непрерывна в некоторой окрестности (s, l_s) . Тогда $\mathbf{Q}f^{-1} \ll \lambda$.

Теорема 17.3. Предположим, что величина $\xi(0)$ имеет абсолютно непрерывное распределение $\mathcal{P}_{\xi(0)} \ll \lambda$, а функционал f локально удовлетворяет условию Липшица и для \mathbf{Q} -почти всех s существует $D_{L(s)} f(s) \neq 0$ ($L(s)$ определяется формулой (17.3)). Тогда $\mathbf{Q}f^{-1} \ll \lambda$.

Теоремы 17.2 и 17.3 вытекают (с учетом замечаний 17.2 и 17.3) из теорем 6.1 и 17.1 ■

§ 18. Сильная сходимость распределений функционалов от диффузионных процессов

Пусть ξ_n ($n=1, 2, \dots$), ξ — решения стохастических уравнений (с непрерывными коэффициентами)

$$\xi_n(t) = \xi_n(0) + \int_0^t a_n(s, \xi_n(s)) ds + \int_0^t b_n(s, \xi_n(s)) d\omega(s), \quad (18.1)$$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t b(s, \xi(s)) d\omega(s). \quad (18.2)$$

Обозначим через \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q} распределения в \mathbf{C} процессов ξ_n, ξ , соответственно. Хорошо известно (см., например, [10]), что если коэффициенты (18.1) сближаются с соответствующими коэффициентами (18.2), то величина $\sup_{0 \leq t < T} |\xi_n(t) - \xi(t)|$ стремится по вероятности к нулю и, следовательно, \mathbf{Q}_n слабо сходится к \mathbf{Q} . Целью настоящего параграфа будет доказательство сильной сходимости $\mathbf{Q}_n f^{-1}$ к $\mathbf{Q} f^{-1}$ для достаточно широкого класса функционалов f .

Будем предполагать, что коэффициенты уравнений (18.1) и (18.2) удовлетворяют следующим трем условиям:

1. Функции $a_n(t, x), a(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x ; $b_n(t, x), b(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x и один раз по t , и все перечисленные производные ограничены на $[0, T] \times R$.

2. Последовательность

$$\begin{aligned} r_n = \sup_{t, x} (& |a_n(t, x) - a(t, x)| + |b_n(t, x) - b(t, x)| + \\ & + \left| \frac{\partial a_n}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^2 a_n}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(t, x) \right| + \\ & + \left| \frac{\partial b_n}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial b}{\partial x}(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^2 b_n}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t, x) \right| \end{aligned}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

3. Для всех t, x, n $b_n(t, x) \neq 0, b(t, x) \neq 0$.

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 18.1. Пусть последовательность случайных величин $\xi_n(0)$ сходится по распределению к $\xi(0)$, а коэффициенты (18.1), (18.2) удовлетворяют условиям 1—3. Предположим также, что функционал f локально удовлетворяет условию Липшица и для некоторого $X_0 \subset \mathbf{C}, \mathbf{Q}(X_0) = 1$, принадлежит классу $\mathcal{M}(X_0, \mathbf{C}^0)$. Тогда

$$\mathbf{Q}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{Q} f^{-1}. \quad (18.3)$$

Доказательство. Предположим сначала, что начальные распределения вырожденные: $\xi_n(0) = x_n, \xi(0) = x$ п. н., причем $x_n \rightarrow x$. В силу этого, можно считать, что винеровский процесс, фигурирующий в уравнениях (18.1) и (18.2), начинается в нуле. Будем также предполагать, что он реализован как координатный процесс на вероятностном пространстве $(\mathbf{C}^0, \mathfrak{B}_{\mathbf{C}^0}, \mathbf{P})$.

Обозначим через \mathbb{E}_n измеримое отображение $\omega(\cdot) \rightarrow \xi_n(\omega, \cdot)$, через $\Phi_c^{n, h}$ — группу преобразований, построенную по процессу ξ_n , как в § 17, и через L_n^h — ее инфинитезимальный оператор.

Следующее утверждение показывает, что при возрастании n орбиты групп $\Phi_c^{n, h}$ и Φ_c^h в некотором смысле сближаются.

Лемма 18.1. Для \mathbf{P} -почти всех ω , любого $h \in L^2 [0, T]$ и произвольного конечного интервала $\Delta \subset R^1$ выполняются соотношения:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{c \in \Delta} \|\Xi_n(\omega + cl) - \Xi(\omega + cl)\| = 0, \quad (18.4)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{c \in \Delta} \|L_n^h(\Xi_n(\omega + cl)) - L^h(\Xi(\omega + cl))\| = 0. \quad (18.5)$$

Замечание 1. Для доказательства сходимости $\mathbf{Q}_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{Q} f^{-1}$ достаточно установить, что из любой последовательности $\{n'\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{n''\}$ так, чтобы $\mathbf{Q}_{n''} f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} \mathbf{Q} f^{-1}$. Это простое соображение дает нам возможность считать, не умаляя общности, что

$$r_n \leq n^{-4}, \quad |x_n - x_0| \leq n^{-4}. \quad (18.6)$$

(Подобное рассуждение мы будем использовать и в дальнейшем.)

Доказательство леммы. Зафиксируем открытый интервал $J \subset [0, 1]$ и определим функцию $\bar{a}(\theta, t, x)$, $\theta \in J$, обладающую следующими свойствами

а) $\bar{a}(0, t, x) = a(t, x)$, $\bar{a}(n^{-1}, t, x) = a_n(t, x)$;

б) \bar{a} непрерывно дифференцируема по θ и $\sup_{\theta, t, x} \frac{\partial \bar{a}}{\partial \theta} < \infty$.

(Дифференцируемость при $\theta = 0$ достигается за счет условия (18.6)).

Определим аналогичным образом функции $\bar{b}(\theta, t, x)$ и $x(\theta)$ и рассмотрим стохастическое уравнение

$$\xi_{9,0}(t) = x(\theta) + \int_0^t \bar{a}(\theta, s, \xi_{9,0}(s)) ds + \int_0^t \bar{b}(\theta, s, \xi_{9,0}(s)) d\omega(s).$$

Тогда случайный процесс $\xi_{9,c}$, определяемый равенством $\xi_{9,c}(\omega, \cdot) = \xi_{9,0}(\omega + cl, \cdot)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \xi_{9,c}(t) = & x(\theta) + \int_0^t \bar{a}(\theta, s, \xi_{9,c}(s)) ds + \int_0^t \bar{b}(\theta, s, \xi_{9,c}(s)) d\omega(s) + \\ & + c \int_0^t \bar{b}(\theta, s, \xi_{9,c}(s)) h(s) ds. \end{aligned}$$

Рассматривая $\{\xi_{9,c}(\cdot)\}$ как семейство диффузионных процессов, зависящих от векторного параметра (θ, c) , нетрудно убедиться, что для этого семейства выполнены условия теоремы 2 [3]. Применяя указанную теорему, получаем, что для \mathbf{P} -почти всех ω функция $\xi_{9,c}(t)$ непрерывна по (θ, c, t) . Отсюда, разумеется, следует утверждение леммы. ■

Вернемся к доказательству теоремы 18.1. Соотношение

$$\|Q_n f^{-1} - Q f^{-1}\| = \|(P_n \Xi^{-1}) f^{-1} - (P \Xi^{-1}) f^{-1}\| = \|P g_n^{-1} - P g^{-1}\|,$$

где $g_n = f \circ \Xi_n$, $g = f \circ \Xi$, показывает, что для доказательства (18.3) достаточно установить, что

$$P_n g_n^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P g^{-1}. \quad (18.7)$$

Пусть X_0 — множество Q -полной меры, о котором говорится в условии теоремы. Принадлежность классу $\mathcal{M}(X_0, C^0)$ означает, что $\forall s \in X_0 \exists l_s \in C^0$ такое, что в некоторой окрестности $V \subset C \times C^0$ точки (s, l_s) производная $D_l f(y)$ существует, отлична от нуля и непрерывна по (y, l) . Из непрерывности следует, что найдется такая функция $\delta_V: R_+ \rightarrow R_+$, $\delta_V(c) \xrightarrow{c \rightarrow 0} 0$, что для любых $(y_1, l_1), (y_2, l_2) \in V$

$$|D_{l_1} f(y_1) - D_{l_2} f(y_2)| \leq \delta_V(\|y_1 - y_2\| + \|l_1 - l_2\|).$$

Без ограничения общности, можно считать, что $V = U \times W$, где U и W — открытые шары с центрами, соответственно, в s и l , и $Q(\partial U) = 0$. В силу замечания 3 § 17, можно считать, что $l = L^h(s)$, где $h \in L^2[0, 1]$. Так как отображение $y \rightarrow L^h(y)$ непрерывно, то, уменьшая, если надо, радиус шара U , можно также считать, что $\forall y \in U L^h(y) \in W$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем точки $s_1, \dots, s_N \in X_0$ так, чтобы $Q\left(\bigcup_1^N U_j\right) > 1 - \varepsilon$. Пусть U_j (а также W_j) и l_j — шары и направления, построенные для s_j описанным выше способом. Положим $U_j' = \left(U_j \setminus \bigcup_1^{j-1} U_k\right)^0$, $B_j = \Xi^{-1}(U_j')$. Для доказательства (18.7), очевидно, достаточно показать, что для каждого j

$$P_{B_j} g_n^{-1} \xrightarrow{\text{var}} P_{B_j} g^{-1}, \quad (18.8)$$

где P_{B_j} — сужение меры P на множество B_j .

Зафиксируем j и будем индекс j опускать: $s_j = s$, $B_j = B$, $U_j' = U'$, $W_j = W$, $l_j = l$.

Рассмотрим разбиение Γ пространства C на прямые, параллельные вектору $\bar{l}(t) = \int_0^t h(u) du$, где h — тот элемент $L^2[0, 1]$, для которого $l = L^h(s)$. Факторпространство C/Γ отождествим с подпространством T коразмерности 1, которое не содержит \bar{l} . Пусть I — линейный функционал, для которого $I(\bar{l}) = 1$, $\ker I = T$. Пусть I_γ — сужение I на прямую $\{\gamma + c\bar{l}, c \in R^1\}$;

$$\tilde{P}_{\gamma, B} = P_{\gamma, B} I_\gamma^{-1}; \quad g_{n, \gamma} = g_n \circ I^{-1}; \quad g_\gamma = g \circ I_\gamma^{-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \|P_B g_n^{-1} - P_B g^{-1}\| &\leq \int_T \|P_{\gamma, B} g_n^{-1} - P_{\gamma, B} g^{-1}\| P_T(d\gamma) = \\ &= \int_T \|\tilde{P}_{\gamma, B} g_{n, \gamma}^{-1} - \tilde{P}_{\gamma, B} g_{\gamma}^{-1}\| P_T(d\gamma). \end{aligned}$$

По теореме о мажорируемой сходимости для доказательства (18.8) достаточно показать, что P_T -почти всюду

$$\|\tilde{P}_{\gamma, B} g_{n, \gamma}^{-1} - \tilde{P}_{\gamma, B} g_{\gamma}^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (18.9)$$

Заметим, что

$$\tilde{P}_{\gamma, B}(\cdot) = P_{\gamma}(I_{\gamma}^{-1}(\cdot) \cap B) = P_{\gamma}(I_{\gamma}^{-1}(\cdot) \cap \Xi^{-1}(U')) = \tilde{P}_{\gamma}(\cdot \cap A), \quad (18.10)$$

где $A = I_{\gamma}(\Theta^{-1}(U') \cap \{\gamma + c\bar{l}, c \in R^1\})$.

Так как отображение $\tau_{\gamma}: c \rightarrow \Xi(\gamma + c\bar{l})$ непрерывно, а множество U' открыто и так как $A = \tau_{\gamma}^{-1}(U')$, то A представляется в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся открытых интервалов: $A = \bigcup_k \Delta_k$.

Обозначим через μ_k сужение меры \tilde{P}_{γ} на Δ_k . Тогда, в силу (18.10), $\tilde{P}_{\gamma, B} = \sum_k \mu_k$ и для доказательства (18.9) достаточно установить, что для каждого k при $n \rightarrow \infty$

$$\|\mu_k g_{n, \gamma}^{-1} - \mu_k g_{\gamma}^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (18.11)$$

Пользуясь леммой 18.1, будем иметь

$$\begin{aligned} \sup_{c \in \Delta_k} |g_{n, \gamma}(c) - g_{\gamma}(c)| &= \sup_{c \in \Delta_k} |f(\Xi_n(\gamma + c\bar{l})) - f(\Xi(\gamma + c\bar{l}))| \leq \\ &\leq C \sup_{c \in \Delta_k} \|\Xi_n(\gamma + c\bar{l}) - \Xi(\gamma + c\bar{l})\|_{\infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее

$$\sup_{c \in \Delta_k} |g'_{n, \gamma}(c) - g'_{\gamma}(c)| = \sup_{c \in \Delta_k} |D_{e_n} f(\Xi_n(\gamma + c\bar{l})) - D_e f(\Xi(\gamma + c\bar{l}))|,$$

где $e_n = L_n^h(\Xi_n(\gamma + c\bar{l}))$, $e = L^h(\Xi(\gamma + c\bar{l}))$.

В силу леммы 18.1, по любому $\varepsilon' > 0$ можно найти интервал $\Delta_k' \subset \Delta_k$ такой, что, во-первых, $\mu_k(\Delta_k \setminus \Delta_k') < \varepsilon'$, а во-вторых, при всех достаточно больших n одновременно для всех $c \in \Delta_k'$ вектор $\Xi_n(\gamma + c\bar{l})$ будет лежать в U , а вектор e_n — в W .

Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{c \in \Delta_k'} |D_{e_n} f(\Xi_n(\gamma + c\bar{l})) - D_e f(\Xi(\gamma + c\bar{l}))| &\leq \\ &\leq \sup_{c \in \Delta_k'} \delta(\|\Xi_n(\gamma + c\bar{l}) - \Xi(\gamma + c\bar{l})\| + \|e_n - e\|), \end{aligned}$$

здесь δ — функция из условия теоремы.

Применяя теорему 4.6, видим, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mu_k g_{n,\nu}^{-1} - \mu_k g_\nu^{-1}\| \leq \varepsilon'.$$

В силу произвольности ε' , получаем (18.11).

Таким образом, наша теорема доказана при дополнительном предположении о вырожденности начальных распределений.

Переход к общему случаю легко осуществляется с помощью теоремы Скорохода (см., например, [52, с. 62], благодаря которой можно считать, что $\xi_n(0) \rightarrow \xi(0)$ почти наверное ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллев Ю. К.* Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 1, 128—131 (РЖМат, 1961, 1В33)
2. *Биллингсли П.*, Сходимость вероятностных мер. М., Наука, 1977, 351 с. (РЖМат, 1978, 3В23К)
3. *Благовещенский Ю. Н., Фрейдлин М. И.*, Некоторые свойства диффузионных процессов, зависящих от параметра. Докл. АН СССР, 1961, 138, № 3, 508—511 (РЖМат, 1962, 2В41)
4. *Борисов И. С.*, О скорости сходимости распределений функционалов интегрального типа. Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, № 2, 293—308 (РЖМат, 1976, 12В71)
5. —, О скорости сходимости в условном принципе инвариантности. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 1, 67—79 (РЖМат, 1978, 11В72)
6. *Боровков А. А.*, О скорости сходимости в принципе инвариантности. Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, № 2, 217—234 (РЖМат, 1973, 11В2)
7. *Вахания Н. Н.*, Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси, Мецниереба, 1971, 155 с. (РЖМат, 1971, 12В11)
8. *Вершик А. М.* Двойственность в теории меры в линейных пространствах. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 3, 497—500 (РЖМат, 1967, 2В595)
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.*, Теория случайных процессов. I. II. III. М., Наука, 1971, 663 с.; 1973, 639 с.; 1975, 494 с. (РЖМат, 1972, 3В36К; 1974, 2В38К; 1976, 5В38К)
10. —, —, Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1968, 354 с. (РЖМат, 1969, 5В65К)
11. —, —, Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1982, 611 с. (РЖМат, 1983, 2В1К)
12. *Го Х.-С.*, Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., Наука, 1975, 175 с. (РЖМат, 1979, 9В92К)
13. *Городецкий В. В.*, О сходимости к полуустойчивым гауссовским процессам. Теория вероятностей и ее применения. 1977, 22, № 3, 513—522 (РЖМат, 1978, 2В69)
14. —, Локальные предельные теоремы для линейно порожденных случайных векторов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та, АН СССР, 1982, 119, 62—76 (РЖМат, 1982, 11В25)
15. *Давыдов Ю. А.*, Об абсолютной непрерывности распределений функционалов от случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 1, 228—229
16. —, О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 2, 429
17. —, Локальные предельные теоремы для функционалов типа супремума в решетчатом случае. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, 97, 51—61 (РЖМат, 1981, 4В40)

18. —, Локальный принцип инвариантности I, II. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, 97, 45—50; 1983, 130, 69—77 (РЖМат, 1981, 4В39)
19. —, О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов I, II. Теория вероятностей и ее применения, 1980, 25, № 4, 782—799; 1981, 26, № 2, 266—286 (РЖМат, 1981, 5В51; 11В50)
20. —, *Розин А. Л.*, О временах пребывания для функций и случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 3, 650—654 (РЖМат, 1979, 2В165)
21. Дадли Р. М., Выборочные функции гауссовского процесса. Случайные процессы. М., 1978, 7—62 (РЖМат, 1978, 10В71)
22. *Джапаридзе К. О., Никулин М. С.*, Распределение вероятностей статистики Колмогорова и омега-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1979, 85, 46—75 (РЖМат, 1979, 9В169)
23. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.*, Независимые и стационарно связанные величины. М., Наука, 1965, 524 с. (РЖМат, 1966, 6В14К)
24. —, *Хасьминский Р. З.*, Асимптотическая теория оценивания. М., Наука, 1979, 528 с. (РЖМат, 1979, 6В143К)
25. —, —, Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок I, II. Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 3, 469—486; 1973, 18, № 1, 78—93 (РЖМат, 1972, 12В93; 1973, 6В113)
26. *Ито К., Маккин Г.*, Диффузионные процессы и их траектории. М., Мир, 1968, 394 с. (РЖМат, 1968, 8В56К)
27. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М., Наука, 1972, 656 с. (РЖМат, 1972, 8В224К)
28. *Лифшиц М. А.*, Некоторые задачи теории случайных процессов, связанные с отображением мер. Канд. дисс. Л., 1981, 149 с.
29. —, Об абсолютной непрерывности распределений функционалов от случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1982, 27, № 3, 559—566 (РЖМат, 1983, 3В139)
30. —, Абсолютная непрерывность функционалов типа «супремум» от гауссовских процессов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, 119, 154—166 (РЖМат, 1982, 11В141)
31. —, Метод расслоений и его применение к изучению функционалов от случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1982, 27, № 1, 67—80 (РЖМат, 1982, 7В54)
32. —, Метод расслоений для процессов с независимыми приращениями. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН ССР, 1983, 130, 109—121
33. —, Применение метода расслоений к изучению функционалов от процессов с независимыми приращениями. Теория вероятностей и ее применения (в печати)
34. *Маккин Г.*, Стохастические интегралы. М., Мир, 1972, 182 с. (РЖМат, 1973, 1В124К)
35. *Мартинов Г. В.*, Критерии омега-квадрат. М., Наука, 1978, 80 с. (РЖМат, 1978, 11В198)
36. *Мозульский А. А.*, Малые отклонения в пространстве траекторий. Теория вероятностей и ее применения. 1974, 19, № 4, 755—765 (РЖМат, 1975, 4В64)
37. *Молчан Г. М., Голосов Ю. Н.*, Гауссовские стационарные процессы с асимптотически степенным спектром. Докл. АН ССР, 1969, 184, № 3, 546—549 (РЖМат, 1969, 7В68)
38. *Паргасарати К.*, Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М., Мир, 1983, 336 с. (РЖМат, 1983, 7В1К)
39. *Паулаускас В.*, О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах. Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, № 4, 775—791 (РЖМат, 1977, 7В20)
40. —, Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в $C(S)$. Лит. мат. сб., 1976, 16, № 4, 168—201

41. —, О плотности нормы гауссовского вектора в банаховом пространстве. В сб., «Резюме докладов IV Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей и мат. статистике». Тбилиси, 1982, 145—146
42. —, О плотности распределения нормы гауссовского вектора в банаховых пространствах. Докл. АН СССР, 1982, 266, № 6, 1301—1302. (РЖМат, 1983, 2В141)
43. *Питербарг В. И.*, Гауссовские случайные процессы. В сб. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. Т. 19. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР». М., 1982, 155—199 (РЖМат, 1982, 7В117)
44. *Розанов Ю. А.* Гауссовские бесконечномерные распределения. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1968, 108, 1—135 (РЖМат, 1970, 2В111).
45. *Рохлин В. А.*, Об основных понятиях теории меры. Мат. сб., 1949, 15 (67), № 1, 107—150
46. *Саханенко А. И.*, Одно условие существования ограниченной плотности у распределений функционалов интегрального типа. «Тезисы докл. 2-й Вильнюсской конф. по теории вероятностей и мат. статистике», 1977, 2, 149—150
47. —, Одна оценка для плотности распределения функционалов интегрального типа. Тр. ин-та матем. СО АН СССР, 1982, 1, 180—186 (РЖМат, 1982, 7В162)
48. *Скорород А. В.*, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам I. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 4, 417—443 (РЖМат, 1959, 4934)
49. —, Случайные процессы с независимыми приращениями. М., Наука, 1964, 280 с. (РЖМат, 1967, 7В31К)
50. —, О допустимых сдвигах мер в гильбертовом пространстве. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 4, 577—598 (РЖМат, 1971, 5В36)
51. —, Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1975, 232 с. (РЖМат, 1976, 4В894К)
52. —, *Слободенюк Н. П.*, Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев, Наукова думка, 1970, 304 с. (РЖМат, 1971, 4В25К)
53. *Смородина Н. В.* Абсолютная непрерывность распределений функционалов от диффузионных процессов. Успехи мат. наук, 1982, 37, № 6, 185—192 (РЖМат, 1983, 4В166)
54. —, Локальный принцип инвариантности для процессов, линейно порожденных независимыми случайными величинами. Теория вероятностей и ее применения. В печати.
55. —, Локальные предельные теоремы для функционалов от случайных полей. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1984.
56. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, 141, 1—191 (РЖМат, 1977, 2В47)
57. *Хмаладзе Э. В.* Применение критериев ω^2 для проверки параметрических гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 2, 280—297
58. *Цирельсон Б. С.*, Плотность распределения максимума гауссовского процесса. Теория вероятностей и ее применения, 1975, 20, № 4, 865—873 (РЖМат, 1976, 6В115)
59. —, Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига I. Теория вероятностей и ее применения, 1982, 27, № 2, 388—395 (РЖМат, 1982, 10В187)
60. *Billingsley P., Topsoe F.*, Uniformity in weak convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1967, 7, № 1, 1—16 (РЖМат, 1967, 9В3)
61. *Cirelson B. S., Ibragimov I. A., Sudakov V. N.*, Norms of Gaussian sample functions. Proc. of the 3-th Japan-USSR Symp., Lect. Notes Math., 1976, 550, 20—41 (РЖМат, 1977, 10В86)
62. *Dudley R. M., Feldman J., Le Cam L.*, On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces. Ann. Math., 1971, 93, № 2, 390—408 (РЖМат, 1970, 12В2)
63. *Geman D., Horowitz J.*, Occupation times for smooth stationary processes. Ann. Probab., 1973, 1, 131—137

64. *Grosh L.*, Abstract Wiener spaces. Proc. 5-th Berkeley symp. Math. Stat. Prob., 1965, 2, 31—42
 65. *Kallianpur G.*, Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, 17, № 2, 113—123 (PЖMat, 1971, 8B132)
 66. *Kuelbs J., Kurtz T.*, Berry—Esseen estimates in Hilbert space and applications to the law of the iterated logarithm. Ann. Probab., 1974, 2, № 3, 387—407 (PЖMat, 1975, 2B17)
 67. *Marcus M. B., Shepp L. A.*, Sample behavior of Gaussian process, Proc. 6-th Berkeley Symp., 1970, 2, 423—442
 68. *Ranga Rao R.*, Relations between weak and uniform convergence of measures with applications. Ann. Math. Stat., 1962, 33, № 2, 659—680 (PЖMat, 1963, 4B91)
 69. *Sawyer S.*, Rates of convergence for some functionals in probability. Ann. Math. Stat., 1972, 43, № 1, 273—284 (PЖMat, 1972, 11B29)
 70. *Straj M. L.*, Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. 6-th Berkeley Symp., 1970, 2, 187—221
 71. *Ylvisaker N. D.*, The expected number of zeros of a stationary Gaussian process. Ann. Math. Stat., 1965, 36, № 3, 1043—1046 (PЖMat, 1966, 3B83)
-