Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, О рядах $\sum F(m)q^m$, где $F(m)$ – число нечетных классов бинарных квадратичных форм детерминанта $-m$,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, том 64, 69–79

https://www.mathnet.ru/znsl1873

Е.П.Голубева, О.М.Фоменко

О РЯДАХ $\sum F(m)q^m$, ГДЕ $F(m)$ – ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ КЛАССОВ БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ДЕТЕРМИНАНТА $-m$

§ I. Пусть $G(m)$, $m\geqslant 0$, – число классов целочисленных бинарных квадратичных форм

$$ax^2+2bxy+cy^2 = (a,b,c)$$

детерминанта $-m=b^2-ac<0$; $F(m)$ – число классов форм (a,b,c) детерминанта $-m$ с нечетным делителем (т.е. форм, у которых a и b не являются одновременно четными числами). Как обычно, классы форм $(a,0,a)$ и $(2a,a,2a)$ берутся соответственно с весами I/2 и I/3. Полагаем $G(0)=-\frac{1}{12}$, $F(0)=0$. Пусть $H(m)$ – число классов форм $ax^2+bxy+cy^2=(a,b,c)$ дискриминанта $-m=b^2-4ac<0$; классы форм $(a,0,a)$ и (a,a,a) берутся соответственно с весами I/2 и I/3; $H(0)$ = -I/I2. Имеем $G(m)=F(m)+H(m)$. Напомним также классический результат Гаусса: $r_3(m)=12[2F(m)-G(m)]$; здесь $r_3(m)$ – количество представлений целого числа $m\geqslant 0$ суммой трех квадратов.

Ниже мы воспользуемся следующей формулой для $F(m)$ (Морделл [I]): для всех $-m<0$

$$\frac{F(m)}{\sqrt{m}} = \frac{N_m(1)}{1} - \frac{N_m(3)}{3} + \frac{N_m(5)}{5} - \ldots,$$

где $N_m(n)$ – количество решений $\mathrm{mod}\, n$ сравнения $x^2\equiv m \pmod{n}$.

В работе [2] Морделл рассмотрел функцию

$$\chi(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} F(m)q^m, \quad q=e^{\pi i\omega}, \quad \mathrm{Im}\,\omega>0,$$

и исследовал ее поведение при инверсии $\omega\to-\frac{1}{\omega}$. Оказалось, что имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{te^{\pi i\omega t^2}}{e^{2\pi t}-1}\,dt = -2\chi(\omega)+\frac{2\sqrt{(-i\omega)}}{\omega^2}\chi(-1/\omega)+\frac{1}{4}\theta^3(\omega), \tag{I}$$

где

$$\theta(\omega)=\theta_3(0|\omega)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}.$$

Позднее другие доказательства формулы (I) нашли Зигель [3] и Айхлер [4].

Основная цель настоящей работы – дать еще одно доказательство формулы (I).

Наше доказательство инспирировано следующей формулой Морделла [I]:

$$8\chi(\omega)=\sum\sum i^{-\frac{1}{2}(b-1)}\left(\frac{a}{b}\right)\Big/\left[\sqrt{\{-i(a+b\omega)\}}\right]^3,$$

где двойной ряд (неабсолютно сходящийся!) суммируется в таком порядке: сначала по $a = 0,\pm 2,\pm 4,\ldots$, а затем по $b = 1,3,5,\ldots$. Символ $\left(\frac{a}{b}\right)$ есть символ Лежандра-Якоби, причем, если a и b не взаимно просты, то $\left(\frac{a}{b}\right)=0$; $\left(\frac{0}{1}\right)=1$. Мы представляем ряд $\chi(\omega)$ в виде

$$\chi(\omega) = \chi(\omega,0) - J(\omega), \tag{2}$$

где $\chi(\omega,0)$ - некоторый ряд Эйзенштейна веса 3/2, а $J(\omega)$ - функция, точное выражение для которой дается ниже. Формулу (2) мы доказываем двумя способами. Первый из них (§2) близок к известному доказательству Бейтмена [5] о представлении числа суммой трех квадратов. При изложении этого способа мы опускаем некоторые детали. Второй способ (§3) короче первого, но базируется на теории специальных функций. Этот способ излагается нами более подробно. Отметим, что рассуждениями §3 можно довольно коротко доказать теорему Гаусса о трех квадратах в форме Бейтмена.

Формула Морделла (I) следует из (2). Кроме того, с помощью (2) можно легко найти явное поведение функции $\chi(\omega)$ относительно действия конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(4)$. По соображениям удобства рассмотрим функцию $\chi(2\omega)$. Точная формулировка такова: функция $\chi(2\omega)$ преобразуется относительно действия $\Gamma_0(4)$ по формуле

$$\chi\left(2\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-1}{d}\right)^{1/2}(c\omega+d)^{3/2}\chi(2\omega)-\frac{1+i}{16\pi}\int_{-\frac{a}{c}}^{i\infty}\frac{\theta(2t)}{(t+\omega)^{3/2}}\,dt,$$

где

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4).$$

Эквивалентный результат для функции

$$\mathcal{H}(\omega)=\chi(2\omega)-\frac{1}{12}\theta^3(2\omega)=\sum_{m=0}^{\infty}H(m)e^{2\pi i m\omega}$$

недавно анонсировал Цагир [6] .

§ 2. Пусть $s=\sigma+it$, $\omega=x+iy$; ниже $\omega\in\mathcal{H}=\{\omega\in\mathbb{C}\,|\,y>0\}$. При рассмотрении квадратных корней $(ai-bi\omega)^{1/2}$ и $(a-b\omega)^{1/2}$, где a и b - целые числа и $\mathrm{Im}\,\omega>0$, мы берем ту ветвь, которая имеет значения с положительной вещественной частью при чисто мнимых ω . Под $(ai-bi\omega)^{\kappa/2}$ и $(a-b\omega)^{\kappa/2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, мы понимаем обычную κ-ую степень квадратного корня, специализированного выше. Отметим, кстати, что законность некоторых операций, производимых ниже в этом и следующем параграфах (перемена порядка суммирования и интегрирования и т.д.), легко обосновывается, и мы этим специально заниматься не будем.

Мы начинаем с введения величины (см.Бейтмен [5], p.73) $\eta(h,\kappa)$, где h – целое число, κ – натуральное число, а именно, пусть

$$\eta(h,\kappa) = \begin{cases} \left(\frac{h}{\kappa}\right) e^{-\pi i \frac{\kappa-1}{4}} & \text{, если } h \text{ четное, } \kappa \text{ нечетное;} \\ \left(\frac{\kappa}{|h|}\right) e^{\pi i \frac{h}{4}} & \text{, если } \kappa \text{ четное, } h \text{ нечетное.} \end{cases}$$

$\eta(h,\kappa)$ можно распространить на отрицательные значения κ (при условии, что $h \neq 0$), положив

$$\eta(h,\kappa) = \eta(-h,-\kappa) e^{(\operatorname{sign} h)\pi i/2} \qquad (h\neq 0,\ \kappa\neq 0).$$

Бейтмен показал, что

$$\frac{\eta(h,\kappa)}{(hi-\kappa i\omega)^{1/2}} = \frac{\eta(-h,-\kappa)}{\{(-h)i-(-\kappa)i\omega\}^{1/2}} \qquad (h\neq 0,\ \kappa\neq 0);$$

$$\frac{\eta(h,\kappa)}{(hi-\kappa i\omega)^{1/2}} = \frac{\eta(-\kappa,h)}{(h-\kappa\omega)^{1/2}} \qquad (h\neq 0,\ \kappa\neq 0).$$

Рассмотрим ряд

$$8\chi(\omega,s) = \sum_{a\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)} \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b\geq 1}} \frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^s};$$

он абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ и как функция от s аналитически продолжается в окрестность точки $s=0$ (Ломадзе [7], Воронецкий [8]). Можно показать, что наш ряд аналитически продолжается на всю s-плоскость (см.Сельберг [9] ; это же следует из полученного в §3 ниже разложения $\chi(\omega,s)$). Обозначим значение $\chi(\omega,s)$ в точке $s=0$ через $\chi(\omega,0)$. Отметим, что функция $\chi(2\omega,0)$ является рядом Эйзенштейна для группы $\Gamma_0(4)$ веса 3/2 с тета-мультипликатором.

Докажем сначала, что

$$2\left[\chi(\omega,0)+(-i\omega)^{-3/2}\chi\left(-\tfrac{1}{\omega},0\right)\right] = \tfrac{1}{4}\,\theta^3(\omega). \tag{3}$$

В сумме для $\chi(\omega,s)$ будем для простоты брать $s=\sigma>\frac{1}{2}$; имеем

$$8\chi(\omega,\sigma) = \frac{1}{(-i\omega)^{3/2}|-i\omega|^\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{a\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\ a\neq 0}} \sum_{b\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)} \frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^\sigma}.$$

С помощью приведенных выше формул Бейтмена для $\eta(h,k)$ получаем

$$(-i\omega)^{-3/2}|-i\omega|^{-\sigma}\ 8\chi\left(-\frac{1}{\omega},\sigma\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{a\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}\ \sum_{\substack{b\equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)\\ b\neq 0}} \frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^{\sigma}}.$$

Следовательно,

$$8\left[\chi(\omega,\sigma)+(-i\omega)^{-3/2}|-i\omega|^{-\sigma}\chi\left(-\frac{1}{\omega},\sigma\right)\right] =$$

$$= 1+\frac{1}{(-i\omega)^{3/2}|-i\omega|^{\sigma}} + \frac{1}{2}\sum_{a\neq 0}\sum_{b\neq 0}\frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^{\sigma}} = \Psi_{3,\sigma}(\omega)$$

(в обозначениях Бейтмена [5], p.79). Бейтмен показал, что двойной ряд в выражении для $\Psi_{3,\sigma}(\omega)$ сходится при $\sigma>0$ и что

$$\lim_{\sigma\to 0}\Psi_{3,\sigma}(\omega) = \Psi_3(\omega) = \theta^3(\omega).$$

Следовательно, формула (3) доказана. Покажем теперь, что

$$\chi(\omega,0) = \chi(\omega) + J(\omega), \tag{4}$$

где

$$J(\omega) = \frac{1}{16\pi\sqrt{y/2}}\sum_{f=-\infty}^{\infty}\alpha\left(f^2\frac{y}{2}\right)e^{-\pi i\omega f^2}, \quad \alpha(v) = \int_1^{\infty} e^{-4\pi uv}u^{-3/2}du.$$

Вычислим $\chi(\omega,0)$, разлагая функцию $\chi(\omega,\sigma)$, $\sigma>\frac{1}{2}$, в ряд Фурье и переходя затем к пределу при $\sigma\to 0$. Итак, пусть $(\sigma>\frac{1}{2})$

$$8\chi(\omega,\sigma) = \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b\geqslant 1}}\ \sum_{a\equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)}\frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^{\sigma}}.$$

Применим к внутренней сумме

$$\sum_{a\equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)}\frac{\eta(a,b)^3}{(ai-bi\omega)^{3/2}|ai-bi\omega|^{\sigma}}$$

обобщенную формулу Липшица (лемма 5.7 работы [5]): если $\sigma\geqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\tau=\beta>0$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mi-i\tau)^{3/2}|2mi-i\tau|^{\sigma}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{I(\sigma,n\beta)}{2i\beta^{1/2+\sigma}}e^{\pi i\tau n},$$

где

$$I(\sigma,p) = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{\pi p u}}{u^{(3+\sigma)/2}(2-u)^{3/2}}du.$$

Применяя эту формулу, имеем

$$8\,\chi(\omega,\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\omega n}\,\frac{I(\sigma,n\beta)}{2i\beta^{1/2+\sigma}} \sum_{\substack{b\equiv 1 \pmod 2\\ b\geqslant 1}} B_b(n)\, b^{-\sigma},$$

где

$$B_b(n) = b^{-3/2} \sum_{\substack{a \bmod 2b\\ a\equiv 0 \pmod 2}} \eta(a,b)^3\, e^{-\pi i a n/b}.$$

С помощью соображений, приведенных у Бейтмена [5] , и пользуясь указанной выше формулой Морделла для $\frac{F(m)}{\sqrt{m}}$, мы доказываем, что при $n>0$

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{I(\sigma,n\beta)}{2i\beta^{1/2+\sigma}} \sum_{\substack{b\geqslant 1\\ b\equiv 1 \pmod 2}} B_b(n)\, b^{-\sigma} = 8\,F(n).$$

Детали мы опускаем. В сумме

$$\sum_{n=-\infty}^{0} e^{\pi i\omega n}\,\frac{I(\sigma,n\beta)}{2i\beta^{1/2+\sigma}} \sum_{\substack{b\equiv 1 \pmod 2\\ b\geqslant 1}} B_b(n)\, b^{-\sigma}$$

члены с $n\neq 0\,,-f^2$ при $\sigma\to 0$ стремятся к 0. Прямой подсчет показывает, что вся сумма при $\sigma\to 0$ стремится к $J(\omega)$. Тем самым, (4) доказано. Для получения формулы Морделла (I) остается показать, что

$$2\left[J(\omega)+(-i\omega)^{-3/2} J\left(-\tfrac{1}{\omega}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{\pi i\omega t^2}}{e^{2\pi t}-1}\, dt. \qquad (5)$$

Для простоты вычислений ограничимся случаем $\omega = iy$.

ЛЕММА I. Пусть

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{\pi i\omega t^2}}{e^{2\pi t}-1}\, dt.$$

Тогда

$$\Phi(iy) = 2\left[J(iy) + y^{-3/2} J\left(i\tfrac{1}{y}\right)\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$J(iy) = \frac{1}{16\pi\sqrt{y/2}} \sum_{f=-\infty}^{\infty} e^{\pi y f^2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2\pi f^2 y u}}{u^{3/2}}\, du =$$

$$= \frac{1}{16\pi\sqrt{y/2}} \int_1^{\infty} \sum_{f=-\infty}^{\infty} e^{-\pi f^2 y(2u-1)}\,\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{16\pi\sqrt{y/2}} \int_1^{\infty} \frac{\theta(iy(2u-1))}{u^{3/2}}\, du =$$

$$= \frac{(2y)^{3/2}}{16\pi\sqrt{y/2}\cdot 2y} \int_y^\infty \frac{\theta(iu)}{(u+y)^{3/2}}\,du = \frac{1}{8\pi}\int_y^\infty \frac{\theta(iu)}{(u+y)^{3/2}}\,du .$$

Далее,

$$\frac{1}{y^{3/2}} J(i\tfrac{1}{y}) = \frac{1}{8\pi y^{3/2}} \int_{1/y}^\infty \frac{\theta(iu)}{(u+1/y)^{3/2}}\,du = \frac{1}{8\pi}\int_{1/y}^\infty \frac{\theta(iu)}{(uy+1)^{3/2}}\,du ,$$

и, используя модулярность $\theta(\omega)$, имеем

$$J(iy) + \frac{1}{y^{3/2}} J(i\tfrac{1}{y}) = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty \frac{\theta(iy)}{(u+y)^{3/2}}\,du . \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$\Phi(iy) = \int_0^\infty \frac{t e^{-\pi y t^2 - 2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}\,dt + \int_0^\infty \frac{t e^{-\pi y t^2}}{1-e^{-2\pi t}}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty t e^{-\pi y t^2 - 2\pi t} \sum_{K=0}^\infty e^{-2\pi t K}\,dt + \int_0^\infty t e^{-\pi y t^2} \sum_{K=0}^\infty e^{-2\pi t K}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty t e^{-\pi y t^2}\,dt + 2\sum_{K=1}^\infty \int_0^\infty t e^{-\pi y t^2 - 2\pi t K}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi y} + \sum_{K=1}^\infty \frac{1}{\pi y}\, e^{\frac{\pi K^2}{2y}}\, D_{-2}\left(\frac{\sqrt{2\pi}\cdot K}{\sqrt{y}}\right),$$

где $D_{-2}(z)$ – функция параболического цилиндра (см. [10], с.135, ф-ла (24)). Последнее выражение легко преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi y} + \frac{1}{\pi y}\sum_{K=1}^\infty e^{\frac{\pi K^2}{2y}}\cdot 2^{-3/4}\cdot \frac{y^{1/4}}{2^{1/4}\pi^{1/4}K^{1/2}}\, W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi K^2}{y}\right),$$

где W – функция Уиттекера (см. [11], с.143)

$$W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{-\frac{3}{4}} \int_0^\infty \left(1+\frac{t}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-t}\,dt .$$

Таким образом,

$$\Phi(iy) = \frac{1}{2\pi y} + \frac{1}{\pi y}\sum_{K=1}^\infty e^{\frac{\pi K^2}{2y}}\cdot \frac{y^{1/4}}{2\pi^{1/4}K^{1/4}}\cdot \frac{\pi^{-3/4}K^{-3/2}}{y^{-3/4}} \int_0^\infty \left(1+\frac{ty}{\pi K^2}\right)^{-3/2} e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi y} + \frac{1}{2\pi y} \sum_{K=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^{3/2}} e^{-\frac{t\pi K^2}{y}} dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi y}\left(2 + {\sum_{K=-\infty}^{\infty}}' \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t\pi K^2}{y}}}{(1+t)^{3/2}} dt\right) = \frac{1}{4\pi y} \int_0^{\infty} \frac{\theta(i\frac{t}{y})}{(1+t)^{3/2}} dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi y} \int_0^{\infty} \frac{\theta(it)}{(1+ty)^{3/2}} dt \overset{(\text{в силу } (6))}{=} \frac{2}{y^{3/2}}\left[J(i\tfrac{1}{y}) + y^{3/2} J(iy)\right] =$$

$$= 2\left[J(iy) + \frac{1}{y^{3/2}} J(i\tfrac{1}{y})\right],$$

и лемма I (а с ней и формула (5)) доказана. Результат Морделла (I) непосредственно вытекает из формул (3),(4),(5).

§ 3. ЛЕММА 2. Пусть m **– целое число,** $b>0$ **– нечетное число;** $s=\sigma+it$, $\sigma>0$. $N_m(b)$ **– число решений сравнения** $x^2\equiv m \pmod b$, $0\leqslant x<b-1$ **. Тогда функция**

$$F(s,m) = \sum_{\substack{b\equiv 1 \pmod 2 \\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} N_m(b)}{b^{1+2s}}$$

аналитически продолжается в окрестность точки $s=0$ **, регулярна в** $s=0$ **, если** $m\neq -K^2$ (K = 0,I,...), **и имеет там простой полюс в противном случае. Кроме того,**

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s,m) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} & \text{при } m=0; \\ \frac{1}{2\pi} & \text{при } m=-K^2,\ K\neq 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением.

ЛЕММА 3. При $s\to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+iu)^{3/2}(1+u^2)^s} \backsim 2\sqrt{2}\pi s .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Пусть $s=\sigma+it$, $\sigma>\frac{1}{4}$ **. Положим**

$$2\pi X(\omega,2s) =$$

$$= \sum_{\substack{b\equiv 1 \pmod 2\\ b>0}} \sum_{a\equiv 0 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a f^2}{b}}}{\sqrt{b}\,(-biw-ai)^{3/2}|-biw-ai|^{2s}} .$$

Положим далее $\omega = iy$, $y>0$; тогда

$2\pi\, X(iy,2s) =$

$$= \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{четное}}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(by-a_0 i+2bai)^{3/2}|by-a_0 i+2bai|^{2s}}$$

По формуле суммирования Пуассона имеем

$2\pi\, X(iy,2s) =$

$$= \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{четное}}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m u}\, du}{(by-a_0 i+2biu)^{3/2}|by-a_0 i+2biu|^{2s}} =$$

$$= \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{ четное}}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(by+2biu)^{3/2}|by+2biu|^{2s}} +$$

$$+ \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{четное}}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i m a_0}{2b}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m u}\, du}{(by+2biu)^{3/2}|by+2biu|^{2s}} +$$

$$+ \sum_{\substack{b\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{четное}}} \sum_{f=0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi i m a_0}{2b}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m u}\, du}{(by+2biu)^{3/2}|by+2biu|^{2s}} .$$

В обозначениях леммы 2

$$\sum_{f=0}^{b-1} \sum_{\substack{a_0 (\mathrm{mod}\, 2b)\\ a_0 \text{ четное}}} e^{-\frac{\pi i a_0 f^2}{b} + \frac{2\pi i l a_0}{2b}} = b N_l(b)$$

для любого l .

Таким образом,

$$2\pi X(iy,2s) =$$

$$= \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} N_0(b)\, b}{\sqrt{b}\,(2b)^{3/2+2s}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2} \left|\frac{y}{2}+iu\right|^{2s}} =$$

$$+ \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b}{2^{3/2+2s}\, b^{2+2s}} \sum_{m=1}^{\infty} N_{-m}(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2+s} \left(\frac{y}{2}-iu\right)^{s}} +$$

$$+ \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b}{2^{3/2+2s}\, b^{2+2s}} \sum_{m=1}^{\infty} N_{m}(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2} \left|\frac{y}{2}+iu\right|^{2s}} =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 .$$

В силу лемм 2 и 3

$$\sum\nolimits_1 (\text{при } s=0) = \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(y/2)^{1/2}}\, 2\sqrt{2}\,\pi = \frac{1}{2^{3/2} y^{1/2}} .$$

По лемме 2

$$\sum\nolimits_3 (\text{при } s=0) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m u}}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2}}\, du \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} N_m(b)}{2^{3/2}\, b} = \frac{1}{2^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2}} ,$$

где

$$A_m = \sum_{\substack{b\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} N_m(b)}{b} .$$

В силу формулы (4) из книги [IO], с.II3, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2}} = \frac{2\pi (2\pi m)^{1/2} e^{y/2(-2\pi m)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} .$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_3 (\text{при } s=0) = \sum_{m=1}^{\infty} F(m)\, e^{-\pi y m} \frac{2\cdot 2^{1/2}\pi^{3/2}}{2^{3/2}\cdot \frac{\pi^{1/2}}{2}} = 2\pi X(iy),$$

ибо $A_m \sqrt{m} = F(m)$.

Вычислим $\sum_2$.

$$\sum_2 = \frac{1}{2^{3/2+2s}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2+s}\left(\frac{y}{2}-iu\right)^{s}} \sum_{\substack{b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ b>0}} \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}} N_{-m}(b)}{b^{1+2s}}.$$

В силу формулы (I2) из книги [I0], с.II4, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m u}\, du}{\left(\frac{y}{2}+iu\right)^{3/2+s}\left(\frac{y}{2}-iu\right)^{s}} = \frac{2\pi}{\Gamma(s)} \frac{(2\pi m)^{-\frac{1}{4}+s}}{y^{3/4+s}} W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}-s}(2\pi m y),$$

где $W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}-s}(z)$ – функция Уиттекера (см. [II]).

Итак, в обозначениях леммы 2

$$\sum_2 = \frac{1}{2^{3/2+2s}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\Gamma(s)} \frac{(2\pi m)^{-\frac{1}{4}+s}}{y^{3/4+s}} W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}-s}(2\pi m y)\, F(s,m).$$

По лемме 2

$$\sum_2 (\text{при } s=0) = \frac{(2\pi)^{3/4}}{2^{3/2} y^{3/4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2}} W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}(2\pi m^2 y) \cdot \frac{1}{2\pi}.$$

Поскольку

$$W_{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}(2\pi m^2 y) = e^{-\pi m^2 y}(2\pi m^2 y)^{-3/4} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t}{2\pi m^2 y}\right)^{-3/2} e^{-t} dt,$$

имеем

$$\sum_2 (\text{при } s=0) =$$

$$= \frac{2\pi y}{y^{3/2} \cdot 2\pi \cdot 2^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 y} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi m^2 y t}\, dt}{(1+t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{y^{1/2} 2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi m^2 y t - \pi m^2 y} \frac{dt}{(1+t)^{3/2}}.$$

Собирая вместе результаты для $\sum_1$ и $\sum_2$, получаем

$$\left(\sum_1 + \sum_2\right) (\text{при } s=0) =$$

$$= \frac{1}{2^{3/2} y^{1/2}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2} y^{1/2}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{-2\pi m^2 y t - \pi m^2 y}}{(1+t)^{3/2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2^{5/2} y^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\theta(iy(2t+1))}{(1+t)^{3/2}} dt = 2\pi \frac{1}{16\pi\sqrt{y/2}} \int_1^{\infty} \frac{\theta(iy(2t-1))}{t^{3/2}} dt =$$

$$= 2\pi\, J(iy) \text{ (см. доказательство леммы I).}$$

Собирая выражения для $\sum_1 + \sum_2$ (при $s=0$) и $\sum_3$ (при $s=0$) и используя лемму I, получаем

$$\chi(iy,0) + \frac{1}{y^{3/2}}\chi(i\frac{1}{y},0) = \chi(iy) + \frac{1}{y^{3/2}}\chi(i\frac{1}{y}) + \frac{1}{2}\Phi(iy).$$

Левая часть последнего тождества равна $\frac{1}{8}\theta(iy)$. Все функции аналитичны в $\mathcal{H}$, поэтому формула Морделла (I) снова доказана.

Литература

1. M o r d e l l L.J. On the generating function of the series $\sum F(n)q^n$, where F(n) is the number of uneven classes of binary quadratics of determinant -n. - Messenger of Math.,1920, vol.50, N 8, p.113-128.
2. M o r d e l l L.J. On some series whose n^{th} term involves the number of classes of binary quadratics of determinant -n.- - Messenger of Math., 1919, vol.49, N 5, p.65-72.
3. S i e g e l C.L. Uber die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. - Math.Zeit., 1938, Bd.43, N 5, S.682-708.
4. E i c h l e r M. On the class number of imaginary quadratic fields and the sums of divisors of natural numbers. - J. Indian Math.Soc., 1955, vol.19, N 3-4, p.153-180.
5. B a t e m a n P.T. On the representations of a number as the sum of three squares. - Trans.Amer.Math.Soc., 1951, vol.71, N 1, p.70-101.
6. Z a g i e r D. Nombres de classes et formes modulaires de poids 3/2. - C.r.Acad.sci.,1975, t.281, N 21, p.A883-A886.
7. Л о м а д з е Г.А. О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами, I-II. - Acta arithm., 1971, vol.19, N 3, p.267-305; N 4, p.387-407.
8. В о р о н е ц к и й А.Б. Ряды Эйзенштейна веса -3/2 и особые ряды Харди-Литтлвуда для тернарных квадратичных форм. - Записки научн.семинаров Ленингр.отд.Матем.ин-та АН СССР, 1975, т.50, с.156-168.
9. S e l b e r g A. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. "Theory Numbers". Providence, R.I., Amer. Math.Soc., 1965, p.1-15.
10. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Таблицы интегральных преобразований, т.I. М., "Наука", 1969. 343 с.
11. У и т т е к е р Е.Т., В а т с о н Г.Н. Курс современного анализа, ч.II. М.-Л., ГТТИ, 1934. 468 с.