Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. П. Копылов, Устойчивость в C^1-норме классов гармонических отображений,
Сиб. матем. журн., 1998, том 39, номер 1, 49–66

https://www.mathnet.ru/smj295

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
6 декабря 2025 г., 00:38:33

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1998. Том 39, № 1

УДК 517.54:517.57:517.95

УСТОЙЧИВОСТЬ В C^1-НОРМЕ КЛАССОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ*)

А. П. Копылов

В настоящей статье мы исследуем на устойчивость в C^1-норме пучки $\mathcal{N}_{n,m}$ (всех) гармонических функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$ ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$), т. е. пучки бесконечно дифференцируемых отображений $g = (g_1, \dots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ открытых множеств U пространства $\mathbb{R}^n$, у которых каждая скалярная функция-компонента $g_s : U \to \mathbb{R}$ представляет собой решение уравнения Лапласа

$$\triangle g_s = \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} g_s = 0.$$

Для того чтобы охарактеризовать основную из решаемых нами в данной работе задач, введем понятие квазигармонического отображения.

Определение 1. Отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ открытого множества U пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ε-квазигармоническим*, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, если оно непрерывно дифференцируемо, принадлежит классу

$$W^2(U, \mathbb{R}^m) = \bigcup_{p>n} W^2_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m) \tag{1}$$

и удовлетворяет почти всюду в U дифференциальному неравенству

$$|\triangle f(x)| \leqslant \varepsilon \left\{ n \sum_{j,s=1}^{n} |\partial_{js} f(x)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Отображение f называется *квазигармоническим*, если оно является ε-квазигармоническим для некоторого $\varepsilon \in [0, 1[$.

В правой части соотношения (1) $W^2_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ представляет собой пространство Соболева функций $h : U \to \mathbb{R}^m$, которые обладают в U обобщенными частными производными [1] $\partial_{js} h = (\partial_{js} h_1, \dots, \partial_{js} h_m)$ второго порядка, локально суммируемыми в степени p, и объединение строится по множеству всех чисел p, бóльших n.

Обозначим символом $\mathfrak{G}_{n,m}(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, класс всех ε-квазигармонических отображений в $\mathbb{R}^m$ областей (открытых связных множеств) пространства $\mathbb{R}^n$ и символом $\mathfrak{G}^\circ{}_{n,m}(\varepsilon)$ — его подкласс, который состоит из отображений $h : B \to \mathbb{R}^m$ единичного шара

$$B = B(0,1) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2} < 1 \right\}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01769).

© 1998 Копылов А. П.

пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in B}\|h'(x)\| \leqslant 1$, где $\|h'(x)\|$ — операторная норма производной (дифференциала) $h'(x) = dh(x)$ отображения h в точке x.

Замечание. В силу свойства гипоэллиптичности эллиптических линейных дифференциальных операторов [2] класс $\mathfrak{G}_{n,m}(0)$ 0-квазигармонических отображений совпадает с классом $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений, т. е. с классом, порожденным посредством следующего ниже соотношения (4) пучком $\mathcal{N}_{n,m}$ гармонических функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Упомянутую выше задачу можно представить в виде следующей проблемы (устойчивости в C^1-норме классов $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений).

Проблема А. *Пусть* $0 < \rho \leqslant 1$ *и* $\varepsilon \to 0$. *Верно ли, что*

$$\sup_{f\in\mathfrak{G}^\circ{}_{n,m}(\varepsilon)} \{ \inf_{\substack{g:B\to\mathbb{R}^m,\ |x|<\rho \\ g\in\mathfrak{G}_{n,m}}} [\sup(|f(x)-g(x)|/2\rho + \|(f-g)'(x)\|)]\} \to 0? \tag{3}$$

Вопросы устойчивости в C^1-норме классов гармонических отображений мы рассматриваем в данной статье с точки зрения предлагаемой ниже концепции ξ^1-устойчивости классов отображений. Эта концепция находится в тесной связи с концепцией ξ-устойчивости в C-норме классов отображений [3] и является очередным этапом в дальнейшем развитии лежащих в ее основе идей. В случае классов гармонических отображений концепция ξ^1-устойчивости естественным образом приводит нас к проблеме А, причем если $0 < \rho < 1$, то теорема 8 статьи (вместе с теоремой 9) дает утвердительный ответ на вопрос (3).

Переходя к подробному обсуждению результатов статьи, мы начнем с изложения основных положений концепции ξ^1-устойчивости в C^1-норме классов отображений.

Итак, пусть n и m — произвольные натуральные числа, и пусть $\mathfrak{G}$ означает непустой класс непрерывно дифференцируемых отображений областей пространства $\mathbb{R}^n$, порожденный некоторым пучком $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(U)\}$ функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, т. е.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathcal{N}) = \bigcup_V \mathcal{N}(V), \tag{4}$$

где объединение справа строится по множеству всех областей V пространства $\mathbb{R}^n$.[1] Предположим также, что выполнены следующие условия.

(i) *Класс* $\mathfrak{G}$ *и класс* $\mathfrak{G}'$ *производных отображений из класса* $\mathfrak{G}$ *инвариантны относительно преобразований гомотетии пространств* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *и пространств* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *соответственно.* Здесь под производной непрерывно дифференцируемого отображения $g : V \to \mathbb{R}^m$, где V — область в $\mathbb{R}^n$, мы понимаем отображение $g' : V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ такое, что $g'(x)$ есть производная отображения g в точке x ($\in V$); преобразование гомотетии линейного пространства X — это отображение $h : X \to X$ вида $h(x) = cx + x_0$, $x \in X$, где $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, и $x_0 \in X$; наконец, инвариантность относительно преобразований гомотетии класса $\mathfrak{Y}$ отображений $g : V \to X$ областей $V \subset \mathbb{R}^n$ в линейное пространство X означает, что из принадлежности отображения $h : V \to X$ классу $\mathfrak{Y}$ вытекает также принадлежность этому классу и отображения $T_2 \circ h \circ [T_1|_{T_1^{-1}(V)}]$, где $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $T_2 : X \to X$ — гомотетии.

[1] Так как пучок $\mathcal{N}$ однозначно восстанавливается по порождаемому им классу $\mathfrak{G}(\mathcal{N})$, то мы, как правило, отождествляем ниже пучок $\mathcal{N}$ с классом $\mathfrak{G}(\mathcal{N})$.

(ii) *Если семейство $G = \{g : V \to \mathbb{R}^m\}$ отображений из класса $\mathfrak{G}$, где V — область пространства $\mathbb{R}^n$, таково, что множество $G' = \{g' : V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid g \in G\}$, составленное из производных отображений семейства G, равномерно ограничено, то отображения семейства G' в совокупности своей равностепенно непрерывны на каждом компактном подмножестве E области V, т. е. $\psi_{G,E}(t) \to 0$, когда $t \to 0$.* Здесь

$$\psi_{G,E}(t) = \sup_{g \in G}\{\sup_{x,y \in E,\, |x-y| \leqslant t} \|g'(x) - g'(y)\|\}, \quad t > 0, \tag{5}$$

и равномерная ограниченность семейства G' означает существование вещественного неотрицательного числа c, удовлетворяющего неравенству $\|g'(x)\| \leqslant c$ ($\|l\|$ — операторная норма линейного отображения $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) для каждого отображения $g \in G$ и каждой точки $x \in V$.

(iii) *Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локальной сходимости в C^1-норме.* Это означает, что если последовательность $\{g_\nu : V \to \mathbb{R}^m\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ области V пространства $\mathbb{R}^n$, принадлежащих классу $\mathfrak{G}$, сходится равномерно на каждом компактном подмножестве E области V к непрерывно дифференцируемому отображению $f : V \to \mathbb{R}^m$, а последовательность $\{g'_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ производных $g'_\nu : V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ отображений g_ν на такого же рода множествах сходится равномерно к производной $f' : V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ отображения f (т. е. $\sup\limits_{x \in E} \|g'_\nu(x) - f'(x)\| \to 0$, когда $\nu \to \infty$), то f также принадлежит классу $\mathfrak{G}$.

Отметим, что основной объект нашего внимания в данной работе — классы $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, доставляет нам наиболее характерные примеры классов отображений, удовлетворяющих условиям (i)–(iii).

Определение 2. Пусть n и m — пара произвольных натуральных чисел и ρ — положительное вещественное число, меньшее либо равное 1. Класс $\mathfrak{G}$ непрерывно дифференцируемых отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$, порожденный некоторым пучком функций и удовлетворяющий условиям (i)–(iii), называется *ξ^1_ρ-устойчивым* (относительно класса $W^2 = \bigcup\limits_{U \subset \mathbb{R}^n} W^2(U, \mathbb{R}^m)$, где $W^2(U, \mathbb{R}^m)$ определяется соотношением (1) и при построении объединения используются все области U пространства $\mathbb{R}^n$), если существует неотрицательная функция $\alpha_\rho = \alpha_{\rho,\mathfrak{G}} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ такая, что

1) $\alpha_\rho(\varepsilon) \to \alpha_\rho(0) = 0$, когда $\varepsilon \to 0$;

2) если для непрерывно дифференцируемого отображения $f : V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, из класса W^2 выполнено неравенство $\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, то оно удовлетворяет также неравенству

$$\xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \alpha_\rho(\varepsilon).$$

Здесь функционалы $\xi^1_\rho(\cdot, \mathfrak{G})$ и $\Xi^1_\rho(\cdot, \mathfrak{G})$ определяются равенствами

$$\xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) = \sup_{B \subset V} \xi^1_{\rho,B}(f, \mathfrak{G})$$

и

$$\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in V} \Xi^1_\rho(x, f, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in V}\{\overline{\lim_{r \to 0}}\, \xi^1_{\rho,B(x,r)}(f, \mathfrak{G})\},$$

где в свою очередь $B = B(x, r)$ — шар с центром в точке x и радиуса r пространства $\mathbb{R}^n$ и

$$\xi^1_{\rho,B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g : B \to \mathbb{R}^m,\, g \in \mathfrak{G}} c^1_\rho(f, g),$$

причем величина $c_\rho^1(f,g)$ в правой части последнего соотношения представляет собой нижнюю грань множества всех вещественных неотрицательных чисел c, удовлетворяющих для каждой точки y шара $B(x,\rho r)$ неравенству

$$|f(y)-g(y)|/2\rho r+\|f'(y)-g'(y)\|\leqslant c\operatorname{diam}f'(B),$$

$\operatorname{diam}f'(B)=\sup\limits_{y^1,y^2\in B}\|f'(y^1)-f'(y^2)\|$ (ср. левую часть соотношения (3) с левой частью последнего неравенства).

При $0<\rho<1$ функционал $\xi_\rho^1(\cdot,\mathfrak{G})$ позволяет оценить близость в C^1-норме рассматриваемого отображения $f:V\to\mathbb{R}^m$, где V — область в $\mathbb{R}^n$, на компактных подмножествах каждого шара $B\subset V$, функционал же Ξ_ρ^1 $(0<\rho\leqslant 1)$ — в бесконечно малых шарах. В то же время функционал $\xi_1^1(\cdot,\mathfrak{G})$ измеряет близость отображения в C^1-норме в каждом шаре $B\subset V$, причем во всем таком шаре, а не только на его компактных подмножествах (ср. функционалы ξ_ρ^1 и Ξ_ρ^1 с функционалами близости в C-норме ξ_ρ и Ξ_ρ из [3, гл. 1]). Мы будем говорить далее, что ξ_ρ^1 и Ξ_ρ^1 являются *функционалами глобальной* и соответственно *локальной близости в C^1-норме отображений к классу $\mathfrak{G}$*. При этом классы $\mathfrak{G}$, порожденные пучками непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющие условиям (i)–(iii), мы будем называть *ξ^1-нормальными*.

Таким образом, ξ^1-нормальный класс $\mathfrak{G}$ называется ξ_ρ^1-устойчивым, если для каждого отображения $f\in W^2$ локальная ξ_ρ^1-близость (т. е. Ξ_ρ^1-близость) f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ влечет глобальную его ξ_ρ^1-близость к ним.

Замечание. Легко показать, что из совокупности условий, состоящей из условия дифференцируемости отображений $g:V\to\mathbb{R}^m$ класса $\mathfrak{G}$ и локальной ограниченности их производных $g':V\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, и из условий нормальности (i)–(iii), вытекает непрерывная дифференцируемость каждого отображения $g\in\mathfrak{G}$. Следовательно, совокупность этих условий может быть положена в основу определения понятия ξ^1-нормальности класса $\mathfrak{G}$ (ср. с условиями нормальности $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$ из [3, гл. 1]). Не вдаваясь в подробности, отметим также, что исследование ξ_ρ^1-устойчивости можно вести не только относительно класса W^2, но и относительно других классов функций (например относительно классов C^l).

В терминах введенных понятий основную задачу теории ξ^1-устойчивости классов отображений можно сформулировать следующим образом. *Пусть $\mathfrak{G}$ — ξ^1-нормальный класс отображений и ρ — вещественное число из полуинтервала* $]0,1]$. *Выяснить, является ли класс $\mathfrak{G}$ ξ_ρ^1-устойчивым.*

Прежде чем перейти к непосредственному обсуждению проблем устойчивости классов $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отбражений, отметим ряд свойств общего характера ξ^1-нормальных классов и ξ_ρ^1-близких к ним отображений.

Лемма 1. *Предположим, что $\mathfrak{G}$ — непустой класс непрерывно дифференцируемых отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда условие* (i) *для этого класса эквивалентно следующему условию: если $g:V\to\mathbb{R}^m$, где V — область в $\mathbb{R}^n$, — отображение из класса $\mathfrak{G}$, $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — аффинное отображение, c_1 и c_2 — вещественные положительные числа и a — точка пространства $\mathbb{R}^n$, то отображение*

$g_0 : V_0 \to \mathbb{R}^m$ *такое, что* $V_0 = c_1^{-1}(V - a) = \{c_1^{-1}(x - a) \mid x \in V\}$ *и*

$$g_0(x) = c_2 g(c_1 x + a) + A(x), \tag{6}$$

$x \in V_0$, *также принадлежит классу* $\mathfrak{G}$. *Далее, если класс* $\mathfrak{G}$ *удовлетворяет условиям* (i) *и* (iii), *то он содержит каждое аффинное отображение* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — ξ^1-*нормальный класс отображений в* $\mathbb{R}^m$ *областей пространства* $\mathbb{R}^n$. *И пусть* $f : V \to \mathbb{R}^m$ — *непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда если отображение* A *и параметры* c_1, c_2 *и* a *имеют тот же смысл, что и в лемме* 1, *то для отображения* f_0, *построенного на основе отображения* f *посредством соотношения* (6), *имеют место равенства*

$$\xi_\rho^1(f_0, \mathfrak{G}) = \xi_\rho^1(f, \mathfrak{G})$$

и

$$\Xi_\rho^1(f_0, \mathfrak{G}) = \Xi_\rho^1(f, \mathfrak{G}),$$

$0 < \rho \leqslant 1$.

Лемма 3. *Если* $\mathfrak{G}$ — ξ^1-*нормальный класс отображений и число* ρ *больше* 0 *и меньше либо равно* 1, *то непрерывно дифференцируемое отображение* f *принадлежит классу* $\mathfrak{G}$ *тогда и только тогда, когда* $\xi_\rho^1(f, \mathfrak{G}) = 0$.

Лемма 4. *Предположим, что* $\mathfrak{G}$ — ξ^1-*нормальный класс отображений в* $\mathbb{R}^m$ *областей пространства* $\mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}^m$, *где* V — *область в* $\mathbb{R}^n$, — *непрерывно дифференцируемое отображение и* $B = B(x, r)$ — n-*мерный шар, содержащийся в области* V. *Тогда функция* $\rho \mapsto \xi_{\rho,B}^1(f, \mathfrak{G})$, $0 < \rho \leqslant 1$ (*а вместе с ней и функции* $\rho \mapsto \xi_\rho^1(f, \mathfrak{G})$ *и* $\rho \mapsto \Xi_\rho^1(f, \mathfrak{G})$), *ограничена сверху числом* 2.

Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $f : V \to \mathbb{R}^m$ области V пространства $\mathbb{R}^n$ дважды дифференцируемо в точке $x \in V$ (последнее эквивалентно тому, что каждая из частных производных $\partial_j f : V \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$, дифференцируема в этой точке). Отправляясь от второй производной $f''(x)$ отображения f в точке x, построим отображение $w = w_{x,f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$w(y) = w(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{2}[f''(x)](y) = \frac{1}{2}\sum_{j,s=1}^{n} y_j y_s \partial_{js} f(x), \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Заметим, что, как это и принято в дифференциальном исчислении, мы естественным образом отождествляем вторую производную f'' отображения f в точке x с $\mathbb{R}^m$-значной квадратичной формой

$$\sum_{j,s=1}^{n} y_j y_s \partial_{js} f(x).$$

Напомним также, что из условия дифференцируемости в точке x частных производных $\partial_j f : V \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$, вытекает равенство смешанных производных второго порядка в этой точке: $\partial_{js} f(x) = \partial_{sj} f(x)$; $j, s = 1, \ldots, n$ $(j \neq s)$.

Лемма 5. *Если непрерывно дифференцируемое отображение* $f : V \to \mathbb{R}^m$ *области* $V \subset \mathbb{R}^n$ *дважды дифференцируемо в точке* $x \in V$, *причем* $\sum_{j,s=1}^{n} |\partial_{js} f(x)|^2 > 0$, *то для каждого* $\rho \in]0, 1]$ *и каждого* ξ^1-*нормального класса* $\mathfrak{G}$

$$\Xi_\rho^1(x, f, \mathfrak{G}) = \Xi_\rho^1(w_{x,f}, \mathfrak{G}).$$

Лемма 6. *Пусть отображение $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ представляет собой $\mathbb{R}^m$-значную квадратичную форму*

$$h(y) = h(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j,s=1}^{n} y_j y_s a_{js},$$

где $a_{js} \in \mathbb{R}^m$. Тогда для каждого ξ^1-нормального класса $\mathfrak{G}$

$$\Xi^1_\rho(h, \mathfrak{G}) = \xi^1_\rho(h, \mathfrak{G}),$$

если $0 < \rho \leqslant 1$, и всякий раз, когда $0 < \rho < 1$,

$$\xi^1_\rho(h, \mathfrak{G}) \geqslant \rho \xi^1_1(h, \mathfrak{G}).$$

Леммы 1–6 соответствуют утверждению, содержащемуся в замечании 1.1.2 из [3, гл. 1], а также леммам 1.1.1, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.2 и 1.2.1 той же монографии и утверждению из сноски 3 статьи [4], представляющему собой уточненный вариант леммы 1.2.2 из [3, гл. 1]. Доказательства этих лемм достаточно элементарны, поэтому мы остановимся только лишь на обсуждении доказательства одной из них, а именно, леммы 4.

Доказательство леммы 4. Итак, пусть $0 < \rho \leqslant 1$, $\mathfrak{G}$ — ξ^1-нормальный класс отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}^m$, V — область в $\mathbb{R}^n$, — непрерывно дифференцируемое отображение и $B = B(x, r)$ — n-мерный шар, содержащийся в V. Нам нужно установить, что

$$\xi^1_{\rho,B}(f, \mathfrak{G}) \leqslant 2. \tag{8}$$

Если $\operatorname{diam} f'(B) = 0$, т. е. если ограничение $\widehat{f} = f|_B$ отображения f на шар B является сужением на этот шар некоторого аффинного отображения, то из леммы 1 вытекает, что $\widehat{f} \in \mathfrak{G}$. Но тогда лемма 3 позволяет заключить, что $\xi^1_{\rho,B}(f, \mathfrak{G}) = 0$ (< 2).

Пусть теперь $\operatorname{diam} f'(B) > 0$. Если при этом $\operatorname{diam} f'(B) = +\infty$, то неравенство (8) следует непосредственно из определения функционала $\xi^1_{\rho,B}$. В случае же, когда $0 < \operatorname{diam} f'(B) < +\infty$, рассмотрим произвольное отображение $g : B \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ и, отправляясь от него, построим новое отображение $\tilde{g} : B \to \mathbb{R}^m$ следующим образом. Пусть y^0 — фиксированная точка шара $B(x, \rho r)$. Положим

$$\tilde{g}(y) = g(y) + [f(y^0) - g(y^0)], \quad y \in B.$$

Из условия (i) ξ^1-нормальности класса $\mathfrak{G}$ вытекает принадлежность $\tilde{g}$ классу $\mathfrak{G}$. Следуя далее рассуждениям, используемым ниже при выводе неравенства (14) в доказательстве леммы 7, мы приходим к неравенству

$$\sup_{y \in B(x,\rho r)} \{|f(y) - \tilde{g}(y)|/2\rho r + \|f'(y) - \tilde{g}'(y)\|\} \leqslant 2 \sup_{y \in B(x,\rho r)} \|f'(y) - g'(y)\|,$$

из которого в силу определения функционала $\xi^1_{\rho,B}$ и произвола в выборе отображения g $(\in \mathfrak{G})$ вытекает в свою очередь, что

$$\xi^1_{\rho,B}(f, \mathfrak{G}) \leqslant 2\xi_{\rho,B}(f', \mathfrak{G}'). \tag{9}$$

Здесь

$$\xi_{\rho,B}(f', \mathfrak{G}') = \inf_{\substack{g: B \to \mathbb{R}^m, \\ g \in \mathfrak{G}}} \left\{ \sup_{y \in B(x,\rho r)} \frac{\|f'(y) - g'(y)\|}{\operatorname{diam} f'(B(x, r))} \right\}, \tag{10}$$

причем этот (вспомогательный) функционал близости представляет собой разновидность функционала $\xi_{\rho,B}$ из [3, гл. 1] (см. также [4]). И так как класс $\mathfrak{G}'$ производных отображений класса $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_5$ из [3, гл. 1], то легко убедиться в том, что доказательство леммы 1.1.2 в [3, гл. 1] сохраняет свою силу и в обсуждаемом нами случае, т. е. для функционала, определяемого формулой (10). Следовательно, применяя эту лемму, мы приходим к соотношению

$$\xi_{\rho,B}(f', \mathfrak{G}') \leqslant 1,$$

что с учетом неравенства (9) завершает доказательство леммы 4.

Согласно определению 2, если $\mathfrak{G}$ — ξ^1_ρ-устойчивый класс отображений, то для каждого отображения $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, из класса W^2 малость значения величины $\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G})$ влечет близость f в C^1-норме к отображениям класса $\mathfrak{G}$ на каждом шаре $B \subset U$. Следующая теорема показывает, что в подобном случае близость отображения f в C^1-норме к отображениям класса $\mathfrak{G}$ имеет место не только в шарах, но и на «компактно» расположенных в U областях.

Теорема 1. *Пусть ξ^1-нормальный класс $\mathfrak{G}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$ является ξ^1_ρ-устойчивым, $0 < \rho \leqslant 1$. И пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, а V — компактная ее подобласть (т. е. V — ограниченная область, содержащаяся в U вместе со своим замыканием $\operatorname{cl} V$). Тогда существует неотрицательная функция $\beta_\rho(\varepsilon) = \beta_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}(\varepsilon)$, $\varepsilon \geqslant 0$, такая, что*

1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta_\rho(\varepsilon) = \beta_\rho(0) = 0$;

2) *для каждого непрерывно дифференцируемого отображения $f : U \to \mathbb{R}^m$ из класса W^2, для которого выполнены условия $\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, и $\operatorname{diam} f'(U) < +\infty$, в классе $\mathfrak{G}$ можно указать отображение $g : U \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее неравенству*

$$(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1} |f(x) - g(x)| + \|f'(x) - g'(x)\| \leqslant \beta_\rho(\varepsilon) \operatorname{diam} f'(U),$$

если $x \in V$.

Здесь

$$\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V = \sup\{d^V_{\mathrm{inn}}(x, y) \mid x, y \in V\}$$

— диаметр области V, подсчитанный во внутренней ее метрике d^V_{inn} ($d^V_{\mathrm{inn}}(x, y)$, $x \in V$, $y \in V$, равно нижней грани длин непрерывных кривых, содержащихся в V и соединяющих точки x и y). Заметим также, что если $\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V = +\infty$, то мы полагаем $(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1}$ равным нулю.

Теорема 1 вытекает непосредственно из определения 2 и следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — ξ^1-нормальный класс отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$, U — область в $\mathbb{R}^n$, V — ее компактная подобласть и ρ — число из полуинтервала $]0, 1]$. Тогда существует неотрицательная функция $\gamma_\rho(\varepsilon) = \gamma_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}(\varepsilon)$, $\varepsilon \geqslant 0$, обладающая свойствами 1 и 2 функции β_ρ из теоремы 1, во втором из которых при этом неравенство $\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$ заменяется неравенством $\xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$.*

Для доказательства теоремы 2 — а вместе с ней и теоремы 1 — нам потребуется

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{G}$ — ξ^1-нормальный класс отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$. И пусть U — область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и V — ее компактная подобласть. Тогда для каждого $\rho \in]0, 1]$ выполняются неравенства*

$$\gamma^1_\rho(\varepsilon) \leqslant \gamma^0_\rho(\varepsilon) \leqslant 2\gamma^1_\rho(\varepsilon), \tag{11}$$

$\varepsilon \geqslant 0$, где функция $\gamma_\rho^0 = \gamma_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}^0$ определяется соотношением

$$\gamma_\rho^0(\varepsilon) = \sup_{\substack{f:U\to\mathbb{R}^m,\\ f\in C^1\cap W^2,\\ \xi_\rho^1(f,\mathfrak{G})\leqslant\varepsilon,\\ 0<\operatorname{diam} f'(U)<+\infty}} \left\{ \inf_{\substack{g:U\to\mathbb{R}^m,\\ g\in\mathfrak{G}}} \left[\sup_{x\in V} \left(\frac{(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1}|f(x)-g(x)|}{\operatorname{diam} f'(U)} + \frac{\|f'(x)-g'(x)\|}{\operatorname{diam} f'(U)} \right) \right] \right\} \quad (12)$$

($C^1 = C^{1,n,m} = \bigcup_{U\subset\mathbb{R}^n} C^1(U,\mathbb{R}^m)$ — класс всех непрерывно дифференцируемых отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$), а функцию $\gamma_\rho^1 = \gamma_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}^1$ можно построить, исходя из определения функции γ_ρ^0 и отбрасывая первое слагаемое $\frac{(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1}|f(x)-g(x)|}{\operatorname{diam} f'(U)}$ в правой части равенства (12).

Доказательство. Левое из неравенств (11) вытекает очевидным образом из определений функций γ_ρ^0 и γ_ρ^1.

Для доказательства же правого из этих неравенств рассмотрим произвольные отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ из класса W^2, удовлетворяющее неравенствам $\xi_\rho^1(f,\mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$ и $0 < \operatorname{diam} f'(U) < +\infty$, и положительное число ν и подберем отображение $g = g_{\nu,f} : U \to \mathbb{R}^m$, $g \in \mathfrak{G}$, так, чтобы

$$\|f'(x) - g'(x)\| < \left[\gamma_\rho^1(\varepsilon) + \nu\right] \operatorname{diam} f'(U), \quad (13)$$

если $x \in V$. Заметим, что последнее возможно в силу определения функции γ_ρ^1.

Фиксируя точку $x^0 \in V$ и исходя из отображения g, построим новое отображение $\tilde{g} : U \to \mathbb{R}^m$, полагая $\tilde{g}(x) = g(x) + [f(x^0) - g(x^0)]$, $x \in U$. В силу условия (i) ξ^1-нормальности класса $\mathfrak{G}$ отображение $\tilde{g}$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$. К тому же если $x \in V$, то выполняются соотношения

$$\|f'(x) - \tilde{g}'(x)\| = \|f'(x) - g'(x)\|$$

и

$$|f(x) - \tilde{g}(x)| = |(f-g)(x) - (f-g)(x^0)| \leqslant \{\sup_{y\in\Gamma_{x^0x}} \|(f-g)'(y)\|\} l(\Gamma_{x^0x})$$

для каждой непрерывной кривой $\Gamma_{x^0x} \subset V$, соединяющей точки x^0 и x. Здесь $l(\Gamma_{x^0x})$ — длина кривой Γ_{x^0x}. Но тогда для $x \in V$ справедливо неравенство

$$(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1}|f(x) - \tilde{g}(x)| \leqslant \sup_{y\in V} \|f'(y) - g'(y)\|.$$

Тем самым, учитывая неравенство (13), мы можем утверждать, что

$$\sup_{x\in V}\{(\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} V)^{-1}|f(x) - \tilde{g}(x)| + \|(f-\tilde{g})'(x)\|\} \leqslant 2\left[\gamma_\rho^1(\varepsilon) + \nu\right] \operatorname{diam} f'(U). \quad (14)$$

И так как $\tilde{g} \in \mathfrak{G}$, то в силу произвола в выборе отображения f и числа ν последнее соотношение приводит нас к правому из неравенств (11). Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 2. Мы утверждаем, что искомой может быть, например, следующая функция:

$$\Gamma_\rho(\varepsilon)\,(=\Gamma_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}(\varepsilon)) = \begin{cases} \gamma_\rho^0(\varepsilon), & \text{если } \varepsilon > 0, \\ 0, & \text{если } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

где $\gamma_\rho^0 = \gamma_{\rho,U,V,\mathfrak{G}}$ — функция, определенная соотношением (12).

В самом деле, из определения функции γ_ρ^0 и леммы 3 непосредственно вытекает, что функция Γ_ρ обладает свойством 2 из формулировки теоремы. Остается доказать, что $\Gamma_\rho(\varepsilon) \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Допустим, что для некоторого $\rho_0 \in]0,1]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Gamma_{\rho_0}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_{\rho_0}^0(\varepsilon) = c > 0. \tag{15}$$

Тогда из леммы 7 следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_{\rho_0}^1(\varepsilon) \geqslant \frac{c}{2}. \tag{16}$$

Здесь γ_ρ^1, $\rho \in]0,1]$, — функция из формулировки этой леммы. Заметим также, что рассматриваемые в соотношениях (15) и (16) пределы существуют в силу неубывания функций γ_ρ^0 и γ_ρ^1.

Пусть далее $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность непрерывно дифференцируемых отображений $f_j : U \to \mathbb{R}^m$ таких, что $0 < \operatorname{diam} f_j'(U) < +\infty$, $\xi_{\rho_0}^1(f_j, \mathfrak{G}) < 1/j$ и

$$\sup_{x\in V} \frac{\|f_j'(x) - g'(x)\|}{\operatorname{diam} f_j'(U)} \geqslant \frac{c}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

для каждого отображения $g : U \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ (в силу леммы 2 можно также полагать, что $0 \in V$, $f_j(0) = 0$, $f_j'(0) = 0$ и $\operatorname{diam} f_j'(U) = 1$, $j \in \mathbb{N}$). Исчерпаем область U расширяющейся последовательностью $\{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ «компактно» расположенных в U областей. При этом можно считать, что $V_1 = V$ и $V_{l+1} \supset \operatorname{cl} V_l$, $l \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим пару областей V_1 и V_2. Семейство $\{f_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничено (для каждых точки $x \in U$ и натурального числа $j \in \mathbb{N}$ $\|f_j'(x)\| \leqslant 1$). В то же время несложный анализ позволяет заключить, что в рамках обсуждаемой нами сейчас концепции ξ_ρ^1-устойчивости классов отображений имеет место следующий аналог теоремы 1.1.1 из [3, гл. 1].

Теорема 3. *Предположим, что $\mathfrak{G}$ — ξ^1-нормальный класс отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$, число ρ принадлежит полуинтервалу $]0,1]$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f : B(x^0, r) \to \mathbb{R}^m$ шара $B(x^0, r)$ пространства $\mathbb{R}^n$ обладает ограниченной производной $f' : B(x^0, r) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ($\sup\limits_{x\in B(x^0,r)} \|f'(x)\| < +\infty$) и удовлетворяет условию*

$$\xi_\rho(f', \mathfrak{G}') = \sup_{B\subset B(x^0,r)} \xi_{\rho,B}(f', \mathfrak{G}') < \frac{1}{2},$$

где величина $\xi_{\rho,B}(f', \mathfrak{G}')$ определяется соотношением (10) и верхняя грань подсчитывается по всем шарам B, содержащимся в шаре $B(x^0, r)$.

Тогда для каждой пары чисел $a \in]0,1[$ *и* $\tau \in]0,(\rho/\kappa)(1-a)r[$ *выполняется неравенство*

$$\omega_{f',B(x^0,ar)}(\tau) := \sup_{x,y\in B(x^0,ar),\,|x-y|\leqslant\tau} \|f'(x)-f'(y)\|$$
$$\leqslant \{[1+2\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')]\psi^1_{B(0,1/2)}(1/\kappa)+2\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')\}^u \operatorname{diam} f'(B(x^0,r)),$$
$$u=\frac{\ln\{(1-a)r/\tau\}}{\ln(\kappa/\rho)}-1.$$

Здесь $\psi^1_{B(0,1/2)}=\psi_{G,E}$, *причем* $E=\operatorname{cl}B(0,1/2)$ *и*

$$G=\{(g:B(0,1)\to\mathbb{R}^m)\in\mathfrak{G} \mid \sup_{x\in B(0,1)}\|g'(x)\|\leqslant 1\}$$

и функция $\psi_{G,E}$ *определяется соотношением* (5), *а число* κ *больше* 2 *и удовлетворяет неравенству* $[1+2\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')]\psi^1_{B(0,1/2)}(1/\kappa)+2\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')<1$.

Доказательство теоремы 3 осуществляется по тому же плану и основывается на тех же идеях, что и доказательство теоремы 1.1.1 из [3, гл. 1] (при этом используются условия ξ^1-нормальности и леммы 1–4). По этой причине подробное обсуждение доказательства теоремы 3 мы опускаем.

Непосредственно из теоремы 3 вытекает такое

Следствие. *Пусть класс* $\mathfrak{G}$ *и число* ρ *удовлетворяют условиям теоремы* 3, *а* $\mathscr{F}$ *есть семейство непрерывно дифференцируемых отображений, определенных в фиксированной области* U *пространства* $\mathbb{R}^n$, *обладающее следующими свойствами*: 1) *семейство* $\mathscr{F}'$, *составленное из производных* $f':U\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *отображений* $f:U\to\mathbb{R}^m$ *семейства* $\mathscr{F}$, *равномерно ограничено* (*т. е. существует число* $c\geqslant 0$ *такое, что* $\|f'(x)\|\leqslant c$, *если* $f\in\mathscr{F}$ *и* $x\in U$), 2) *существует число* $\chi\in]0,1/2[$, *удовлетворяющее условию*

$$\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')\leqslant\chi \tag{18}$$

для каждого отображения $f\in\mathscr{F}$. *Тогда семейство* $\mathscr{F}'$ *равностепенно непрерывно на каждом компактном множестве* $E\subset U$.

Заметим, что величина $\xi_\rho(f',\mathfrak{G}')$ в левой части неравенства (18) определяется так же, как и в формулировке теоремы 3, но при этом шар $B(x^0,r)$ следует заменить областью U.

Возвращаясь к последовательности $\{f_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ (в прерванном доказательстве теоремы 2) и учитывая ее равномерную ограниченность, мы в силу отмеченного следствия теоремы 3 можем утверждать, что семейство $\{f_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ равностепенно непрерывно на множестве $\operatorname{cl}V_1$. А из равномерной ограниченности последовательности $\{f_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ производных f_j' отображений f_j и из условия $f_j(0)=0$, $j\in\mathbb{N}$, вытекает равномерная ограниченность последовательности $\{f_j|_{V_2}\}_{j\in\mathbb{N}}$ сужений отображений f_j на область V_2 (в последнем легко убедиться, если рассмотреть, например, конечное покрытие области V_2 шарами $B_1,\dots,B_\nu$, такое, что $\operatorname{cl}V_2\subset E=\bigcup_{\theta=1}^{\nu}B_\theta\subset\bigcup_{\theta=1}^{\nu}\operatorname{cl}B_\theta\subset V_3$, и существующее в силу способа построения последовательности $\{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, и затем учесть, что

$$|f_j(x)|=|f_j(x)-f_j(0)|\leqslant\{\sup_{y\in U}\|f'(y)\|\}\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}}E\leqslant\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}}E<+\infty,$$

$x\in\operatorname{cl}V_2$, $j\in\mathbb{N}$). Применяя теорему Арцела — Асколи к последовательности $\{f_j'|_{\operatorname{cl}V_1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ сужений $f_j'|_{\operatorname{cl}V_1}$ производных f_j' на множество

$\operatorname{cl} V_1$, мы приходим к заключению о существовании подпоследовательности $\{f'_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ последовательности $\{f'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, сходящейся равномерно на множестве $\operatorname{cl} V_1$ к некоторому отображению $h : \operatorname{cl} V_1 \to \mathbb{R}^m$. Используя еще раз теорему Арцела — Асколи, мы можем утверждать, что и у последовательности $\{f_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность $\{f_{j_{l_q}}\}_{q\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно на множестве $\operatorname{cl} V_1$ к некоторому отображению $a_1 : \operatorname{cl} V_1 \to \mathbb{R}^m$. Но тогда ограничение $a_1|_{V_1}$ отображения a_1 на область V_1 непрерывно дифференцируемо, причем $h(x) = a'_1(x)$, $x \in V_1$.

Рассматривая вместо пары областей V_1 и V_2 пару V_2 и V_3 и вместо исходной последовательности $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ее подпоследовательность $\{f_{j_{l_q}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ и используя еще раз только что изложенные соображения, мы построим новую подпоследовательнеость исходной последовательности (точнее, подпоследовательность последовательности $\{f_{j_{l_q}}\}_{q\in\mathbb{N}}$), сходящуюся в C^1-норме $\|\cdot\|_{C^1(V_2,\mathbb{R}^m)}$ в области V_2 к непрерывно дифференцируемому отображению $a_2 : V_2 \to \mathbb{R}^m$. Повторяя этот процесс по индукции, мы построим в итоге счетный набор $\{f^l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $l = 1, 2, \ldots$, последовательностей таких, что первая из них совпадает с исходной последовательностью $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, каждая следующая является подпоследовательностью предыдущей, наконец l-я последовательность сходится в C^1-норме в области V_l к C^1-гладкому отображению $a_l : V_l \to \mathbb{R}^m$. Из сказанного вытекает, что $a_{l+1}|_{V_l} = a_l$, $l \in \mathbb{N}$. Это позволяет нам построить непрерывно дифференцируемое отображение $a : U \to \mathbb{R}^m$ так, что $a(x) = a_l(x)$, если $x \in V_l$, $l \in \mathbb{N}$. Применяя диагональный метод Кантора к набору последовательностей $\{f^l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $l = 1, 2, \ldots$, мы получим последовательность $\{f^j_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, которая на каждом множестве $\operatorname{cl} V_l$ (и, следовательно, на каждом компактном множестве $E \subset U$) сходится в C^1-норме к отображению a. Мы утверждаем, что $a \in \mathfrak{G}$.

В самом деле, пусть шар $B = B(x^0, r)$ содержится в области U вместе со своим замыканием $\operatorname{cl} B$. В силу условия $\xi^1_{\rho_0}(f_j, \mathfrak{G}) < 1/j$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\xi^1_{\rho_0}(f^j_j, \mathfrak{G}) < \lambda_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $\lambda_j \to 0$, когда $j \to \infty$. Следовательно, для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует отображение $g_j : B \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ такое, что

$$\begin{aligned}\left|f^j_j(x) - g_j(x)\right|/2\rho_0 r + \left\|(f^j_j - g_j)'(x)\right\| &\leqslant \lambda_j \operatorname{diam}\left[(f^j_j)'(B)\right] \\ &\leqslant \lambda_j \operatorname{diam}\left[(f^j_j)'(U)\right] = \lambda_j\end{aligned}$$

для $x \in B(x^0, \rho_0 r)$. Тем самым для этих же x

$$\begin{aligned}|a(x) - g_j(x)| &\leqslant \left|a(x) - f^j_j(x)\right| + \left|f^j_j(x) - g_j(x)\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in\operatorname{cl} B(x^0,\rho_0 r)} \left|a(x) - f^j_j(x)\right| + 2\rho_0\lambda_j \qquad (19)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|(a - g_j)'(x)\| &\leqslant \left\|(a - f^j_j)'(x)\right\| + \left\|(f^j_j - g_j)'(x)\right\| \\ &\leqslant \sup_{x\in\operatorname{cl} B(x^0,\rho_0 r)} \left\|(a - f^j_j)'(x)\right\| + \lambda_j. \qquad (20)\end{aligned}$$

И так как из соотношений (19) и (20) вытекает сходимость в C^1-норме в шаре $B(x^0, \rho_0 r)$ последовательности $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ к отображению $a|_{B(x^0,\rho_0 r)}$, то последнее в силу условия нормальности (iii) принадлежит классу $\mathfrak{G}$. Произвол в выборе шара B и то обстоятельство, что класс $\mathfrak{G}$ порожден

пучком, приводят нас к заключению о принадлежности отображения a классу $\mathfrak{G}$. Но тогда сходимость в C^1-норме на каждом компактном множестве $E \subset U$ последовательности $\{f_j^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ к a противоречит соотношению (17). Теорема 2 доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 доставляют один из возможных типов оценок отклонения в C^1-норме непрерывно дифференцируемого отображения f от отображений ξ^1-нормального класса $\mathfrak{G}$ на подобластях области определения f. Не вдаваясь в детали, отметим, что теми же методами можно получить еще один тип подобных оценок, восходящий к теореме 1.1.2 из [3, гл. 1].

Теорема 4. *Предположим, что число ρ принадлежит полуинтервалу $]0,1]$ и (ξ^1-нормальный) класс $\mathfrak{G}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$ $(m,n = 1,2,\ldots)$ является ξ^1_ρ-устойчивым. Тогда существует неотрицательная вещественная функция $\delta_\rho = \delta_{\rho,\mathfrak{G}} : [0,2[\times]0,1[\to [0,+\infty[$, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\delta_\rho(\varepsilon,\rho_1) \to \delta_\rho(0,\rho_1) = 0$, когда $\rho_1 \in]0,1[$ и $\varepsilon \to 0$;*

2) *если $f : U \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение области $U \subset \mathbb{R}^n$ с $\Xi^1_\rho(f,\mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon$, где $0 \leqslant \varepsilon < 2$, то для каждого числа $\rho_1 \in]0,1[$ и каждой ограниченной области V, содержащейся в области U вместе со своей φ-окрестностью $O_\varphi(V) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf\limits_{t\in V}|x-t| < \varphi\}$, $\varphi = \varphi(\rho_1,V) = \{(1-\rho_1)/2\rho_1\}\operatorname{diam} V$, в классе $\mathfrak{G}$ найдется отображение $g : V \to \mathbb{R}^m$ такое, что*

$$(\operatorname{diam}_{\operatorname{inn}} V)^{-1}|f(x)-g(x)| + \|f'(x)-g'(x)\| \leqslant \delta_\rho(\varepsilon,\rho_1)\operatorname{diam} f'(O_\varphi(V))$$

для $x \in V$.

Приступая к непосредственному обсуждению проблем устойчивости в C^1-норме классов гармонических отображений, мы начнем с такого утверждения.

Теорема 5. *Пусть n $(\geqslant 2)$ и m $(\geqslant 1)$ — натуральные числа и ρ — вещественное число, большее 0 и меньшее либо равное 1. Тогда если непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — область пространства $\mathbb{R}^n$, принадлежит классу W^2 и удовлетворяет условию $\varepsilon^0 = 16n^{1/2}\rho^{-1}\Xi^1_\rho(f,\mathfrak{G}_{n,m}) < 1$, то оно является ε^0-квазигармоническим в смысле определения 1.*

Доказательство. В силу неравенства (2), которое характеризует ε-квазигармонические отображения, нам достаточно доказать, что в тех точках x, где f дважды дифференцируемо (а таковыми по определению класса W^2 являются почти все точки области U), имеет место неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^n \partial_{jj} f(x)\right| \leqslant 16n\rho^{-1}\Xi^1_\rho(f,\mathfrak{G}_{n,m})\left\{\sum_{j,s=1}^n |\partial_{js} f(x)|^2\right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Если в такой точке все частные производные второго порядка равны нулю, то неравенство (21) в ней выполняется очевидным образом. Предположим теперь, что $\sum\limits_{j,s=1}^n |\partial_{js} f(x)|^2 > 0$. Тогда леммы 5 и 6 позволяют нам утверждать, что

$$\varepsilon = \Xi^1_\rho(f,\mathfrak{G}_{n,m}) = \Xi^1_\rho(w,\mathfrak{G}_{n,m}) = \xi^1_\rho(w,\mathfrak{G}_{n,m}),$$

где $w = w_{x,f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — отображение, определяемое на основе отображения f соотношением (7). Определение функционала ξ^1_ρ легко позволяет убедиться также в том, что

$$\varepsilon = \xi^1_{\rho,B}(w, \mathfrak{G}_{n,m})$$

(B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$). Поэтому, рассматривая произвольное положительное число λ, мы можем подобрать гармоническое отображение $g = g_\lambda : B \to \mathbb{R}^m$ так, чтобы

$$|w(y) - g(y)|/2\rho + \|w'(y) - g'(y)\| \leqslant (\varepsilon + \lambda)\operatorname{diam} w'(B),$$

если $y \in B(0,\rho)$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$|w(y) - g(y)| \leqslant 2\rho(\varepsilon + \lambda)\operatorname{diam} w'(B), \quad |y| \leqslant \rho. \tag{22}$$

Перепишем неравенство (22) в виде равенства

$$w(y) = g(y) + 2\rho(\varepsilon + \lambda)\{\operatorname{diam} w'(B)\}v(y), \tag{23}$$

где $|v(y)| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant \rho$. Учитывая, что

$$0 = w(0) = g(0) + 2\rho(\varepsilon + \lambda)\{\operatorname{diam} w'(B)\}v(0),$$

придадим равенству (23) следующий вид:

$$w(y) = \tilde{g}(y) + 4\rho(\varepsilon + \lambda)\{\operatorname{diam} w'(B)\}\tilde{v}(y), \tag{24}$$

$\tilde{g}(y) = g(y) - g(0)$, $|\tilde{v}(y)| \leqslant 1$, $|y| \leqslant \rho$. Интегрируя равенство (24) почленно по сфере $S(0,\rho) = \operatorname{fr} B(0,\rho)$ (относительно поверхностной меры Лебега), приходим к равенству

$$\int\limits_{S(0,\rho)} w(y)\,ds = \int\limits_{S(0,\rho)} \tilde{g}(y)\,ds + 4\rho(\varepsilon + \lambda)\{\operatorname{diam} w'(B)\} \int\limits_{S(0,\rho)} \tilde{v}(y)\,ds. \tag{25}$$

Оценим каждый из интегралов, участвующих в его построении.

Из определения отображения w непосредственно вытекает, что

$$\int\limits_{S(0,\rho)} \psi(y)\,ds = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,l=1}^{n} \int\limits_{S(0,\rho)} y_j y_l\,ds\right\}\partial_{jl} f(x) = \frac{\rho^{n+1}}{2n} S_n \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} f(x). \tag{26}$$

Далее, в силу хорошо известного свойства гармонической функции о совпадении среднего ее значения на сфере со значением в центре сферы имеем

$$\int\limits_{S(0,\rho)} \tilde{g}(y)\,ds = \rho^{n-1} S_n \tilde{g}(0) = 0. \tag{27}$$

Наконец, из условия $|\tilde{v}(y)| \leqslant 1$, $|y| \leqslant \rho$, следует неравенство

$$\left|\int\limits_{S(0,\rho)} \tilde{v}(y)\,ds\right| \leqslant \rho^{n-1} S_n. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{diam} w'(B) = \sup_{y^1, y^2 \in B} \|w'(y^1) - w'(y^2)\|,$$

где

$$\|w'(y^1) - w'(y^2)\| = \max_{|t|=1}\left\|\sum_{s=1}^{n} t_s[\partial_s w(y^1) - \partial_s w(y^2)]\right\|$$

$$\leqslant \left\{\sum_{s=1}^{n}|\partial_s w(y^1) - \partial_s w(y^2)|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{s=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(y_j^1 - y_j^2)\partial_{js} f(x)\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant |y^1 - y^2|\left\{\sum_{j,s=1}^{n}|\partial_{js} f(x)|^2\right\}^{1/2} \leqslant 2\left\{\sum_{j,s=1}^{n}|\partial_{js} f(x)|^2\right\}^{1/2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} w'(B) \leqslant 2\left\{\sum_{j,s=1}^{n}|\partial_{js} f(x)|^2\right\}^{1/2}. \tag{29}$$

Из равенства (25) с учетом соотношений (26)–(29) мы теперь без труда получаем неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\partial_{jj} f(x)\right| \leqslant 16n\rho^{-1}(\varepsilon + \lambda)\left\{\sum_{j,s=1}^{n}|\partial_{js} f(x)|^2\right\}^{1/2},$$

которое в силу произвола в выборе λ влечет неравенство (21). Теорема 5 доказана.

Следующая теорема несет на себе главную нагрузку в доказательстве ξ_ρ^1-устойчивости $(0 < \rho < 1)$ класса $\mathfrak{G}_{n,m}$ и может рассматриваться сама как теорема об устойчивости этого класса в C^1-норме.

Теорема 6. *Пусть n и m — пара натуральных чисел, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, и пусть вещественное число ρ принадлежит интервалу $]0,1[$. Тогда существует неотрицательная функция $\zeta_\rho = \zeta_{\rho,\mathfrak{G}_{n,m}} : [0,1[\to [0,+\infty[$ такая, что*

1) *$\zeta_\rho(\varepsilon) \to \zeta_\rho(0) = 0$, когда $\varepsilon \to 0$;*

2) *если $f : U \to \mathbb{R}^m$, U — область в $\mathbb{R}^n$, является ε-квазигармоническим отображением $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$, то*

$$\xi_\rho^1(f, \mathfrak{G}_{n,m}) \leqslant \zeta_\rho(\varepsilon).$$

Доказательство. Предположим, что $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, является ε-квазигармоническим отображением, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Отправляясь от отбражения f, построим новое отображение F, полагая

$$F = (F_1, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots, F_{2n}, \dots, F_{(m-1)n+1}, \dots, F_{mn})$$
$$= (\partial_1 f_1, \dots, \partial_n f_1, \partial_1 f_2, \dots, \partial_n f_2, \dots, \partial_1 f_m, \dots, \partial_n f_m) : U \to \mathbb{R}^{mn}. \tag{30}$$

В силу определения 1 и того обстоятельства, что отображение класса W^2 почти всюду в своей области определения дважды дифференцируемо, отображение F является непрерывным W_p^1-решением (где число $p = p(f)$ больше n и зависит только лишь от f) следующей системы дифференциальных соотношений:

$$\begin{cases} \left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j F_{(l-1)n+j}\right)^2\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon\left\{n\sum_{j,s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left[\partial_j F_{(l-1)n+s}\right]^2\right\}^{1/2}, \\ \partial_j F_s = \partial_s F_j, \\ \partial_j F_{n+s} = \partial_s F_{n+j}, \\ \dots, \\ \partial_j F_{(m-1)n+s} = \partial_s F_{(m-1)n+j}, \\ j, s = 1, \dots, n, \quad j < s. \end{cases} \tag{31}$$

Другими словами, F обладает обобщенными производными $\partial_s F$, $s = 1, \ldots, n$, первого порядка в смысле Соболева [1], локально суммируемыми в p-й степени в области U и удовлетворяющими почти всюду в U системе (31). Но тогда с очевидностью F есть также W^1-решение дифференциального неравенства

$$\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j F_{(l-1)n+j}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}[\partial_j F_{(l-1)n+s} - \partial_s F_{(l-1)n+j}]^2\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon\left\{n\sum_{j,s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}[\partial_j F_{(l-1)n+s}]^2\right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$D : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m(1+\frac{n^2-n}{2})})$$

первого порядка[2)] такой, что

$$\begin{aligned} DG = \Bigg(&\sum_{j=1}^{n}\partial_j G_j, \sum_{j=1}^{n}\partial_j G_{n+j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n}\partial_j G_{(m-1)n+j};\\ &\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1, \partial_1 G_{n+2} - \partial_2 G_{n+1}, \ldots, \partial_1 G_{(m-1)n+2} - \partial_2 G_{(m-1)n+1}; \ldots;\\ &\partial_1 G_n - \partial_n G_1, \partial_1 G_{n+n} - \partial_n G_{n+1}, \ldots, \partial_1 G_{(m-1)n+n} - \partial_n G_{(m-1)n+1}; \ldots;\\ &\partial_{n-1} G_n - \partial_n G_{n-1}, \partial_{n-1} G_{n+n} - \partial_n G_{n+n-1}, \ldots, \partial_{n-1} G_{mn} - \partial_n G_{(m-1)n+n-1}\Bigg), \end{aligned}$$

$G \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn})$. Нетрудно проверить, что этот оператор является эллиптическим в том смысле, что для каждых $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $v = (v_1, \ldots, v_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn} \setminus \{0\}$ имеет место соотношение

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} t_j v_{(l-1)n+j}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(t_j v_{(l-1)n+s} - t_s v_{(l-1)n+j})^2 (= |t|^2|v|^2) \neq 0.$$

Последнее позволяет нам использовать далее результаты из теории устойчивости в C-норме (точнее, теории ξ-устойчивости) пучков решений эллиптических систем линейных уравнений с частными производными [3, гл. 3].

Согласно теореме 3.2.4 из [3, гл. 3] пучок $\mathcal{N}_D$ C^∞-решений системы М. Рисса $DG = 0$ ξ-устойчив (относительно пучка W^1), причем основным этапом доказательства этой теоремы является теорема 3.2.10 монографии [3, гл. 3], из которой следует, что при достаточно малом значении параметра ε W^1-решения дифференциального неравенства (32) глобально ξ-близки к отображениям пучка $\mathcal{N}_D$. Для наших целей полезен следующий (близкий к исходному) вариант теоремы 3.2.10 из [3, гл. 3].

Теорема 7. *Пусть дифференциальный оператор* $D^0 : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ *определяется следующим образом:* $D^0 g(x) = \sum_{l=1}^{n} A_l \partial_l g(x)$, *где*

---

2) Мы будем называть далее систему $DG = 0$ и сам оператор D системой и оператором М. Рисса соответственно, присоединенными к системе $\Delta g = 0$ и оператору Лапласа Δ (в этой связи заметим, что в случае $m = 1$ система $DG = 0$ является системой М. Рисса сопряженных гармонических функций).

$A_l = \left(a^l_{js}\right)_{\substack{j=1,\dots,k\\ s=1,\dots,m}}$ — *вещественные матрицы порядка* $k \times m$, $l = 1,\dots,n$, *и* $g : U \to \mathbb{R}^m$ — *бесконечно дифференцируемое отображение открытого множества* U *пространства* $\mathbb{R}^n$ (*при этом* $\partial_l g(x)$ *рассматривается как матрица-столбец и умножение справа матричное*). *Предположим, что оператор* D^0 *является эллиптическим* (*как и выше, это означает, что* $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l A_l v \neq 0$, *если* $t \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *и* $v \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$). *Тогда для каждого числа* $\rho \in]0,1[$ *существует функция* $\eta_\rho = \eta_{\rho,D^0} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\eta_\rho(\varepsilon) \to \eta_\rho(0) = 0$, *когда* $\varepsilon \to 0$;

2) *если* $h : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, *есть* W^1-*решение дифференциального неравенства* $|D^0 h(x)| \leqslant \varepsilon|\nabla h(x)| \left(= \varepsilon\left\{\sum\limits_{l=1}^{n} |\partial_l h(x)|^2\right\}^{1/2}\right)$, *то* $\xi_\rho(h,\mathfrak{G}) \leqslant \eta_\rho(\varepsilon)$, *где* $\mathfrak{G}$ — *класс отображений, порожденный пучком* $\mathcal{N}_{D^0}$ (*всех*) C^∞-*решений системы* $D^0 g = 0$.

Доказательство этой теоремы можно осуществить, внося незначительные и очевидные изменения в доказательство теоремы 3.2.10 из [3, гл. 3], что избавляет нас от необходимости приводить его здесь.

Возвращаясь к построенным выше отображению F и оператору D и используя теорему 7, мы приходим к следующей ситуации. Для каждого n-мерного шара $B = B(x,r) \subset U$ можно указать бесконечно дифференцируемое решение $G = G_\rho : B \to \mathbb{R}^{mn}$ системы М. Рисса $DG = 0$, удовлетворяющее неравенству

$$|F(y) - G(y)| \leqslant \eta_\rho(\varepsilon)\operatorname{diam} F(B), \tag{33}$$

если $y \in B(x,\rho r)$ (η_ρ — функция из теоремы 7 в том случае, когда роль оператора D^0 в ней играет оператор D). И так как для отображения G выполняются, в частности, равенства $\partial_j G_{(l-1)n+s} = \partial_s G_{(l-1)n+j}$, $l = 1,\dots,m$, $j,s = 1,\dots,n$, то $\mathbb{R}^m$-значная внешняя дифференциальная форма

$$\psi = \sum_{j=1}^{n}(G_j\,dt_j, G_{n+j}\,dt_j, \dots, G_{(m-1)n+j}\,dt_j)$$

замкнута в B. Но тогда теорема Пуанкаре о внешних дифференциальных формах позволяет утверждать, что эта форма точна: $\psi = dg$, где роль отображения $g = (g_1,\dots,g_m) : B \to \mathbb{R}^m$ может играть, например, следующее отображение:

$$g(y) = f(x) + \int\limits_x^y \psi,$$

$y \in B$. Здесь интеграл от формы ψ вычисляется по ориентированному отрезку $\overrightarrow{xy}$, соединяющему точки x и y, покомпонентно.

Учитывая сказанное в предыдущем абзаце и определение отображения F, мы в силу легко проверяемых неравенств $\|f'(y) - g'(y)\| \leqslant |F(y) - G(y)|$ и $\operatorname{diam} F(B) \leqslant n^{1/2}\operatorname{diam} f'(B)$ и неравенства (33) убеждаемся в том, что

$$\|f'(y) - g'(y)\| \leqslant n^{1/2}\eta_\rho(\varepsilon)\operatorname{diam} f'(B),$$

$y \in B(x,\rho r)$. Тем самым произвол в выборе шара B, правое из неравенств (11) и определение функционала ξ^1_ρ позволяют нам заключить, что

$$\xi^1_\rho(f,\mathfrak{G}_{n,m}) \leqslant 2n^{1/2}\eta_\rho(\varepsilon).$$

Наконец, полагая $\zeta_\rho(\varepsilon) = 2n^{1/2}\eta_\rho(\varepsilon)$ $(\varepsilon \geqslant 0)$ и учитывая последнее неравенство, а также соотношения

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_\rho(\varepsilon) = \eta_\rho(0) = 0,$$

мы видим, что функция ζ_ρ является искомой. Доказательство теоремы 6 завершено.

Из теорем 5 и 6 вытекает первый из основных результатов данной статьи, т. е. следующая

Теорема 8. *Для каждой пары значений параметров n и m такой, что $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$, класс $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений ξ^1_ρ-устойчив, если $0 < \rho < 1$.*

Еще одно непосредственное и важное следствие теоремы 6, а также того факта, что в силу определения функционалов ξ^1_ρ и Ξ^1_ρ для каждого ξ^1-нормального класса $\mathfrak{G}$ и каждого непрерывно дифференцируемого отображения f из класса $W^{2,n,m}$ выполняется неравенство $\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}) \leqslant \xi^1_\rho(f, \mathfrak{G})$, — это

Теорема 9. *Пусть натуральные числа n и m и вещественное число ρ таковы, что $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ и $0 < \rho < 1$. Тогда существует функция $\theta_\rho = \theta_{\rho,n,m} : [0,1[\to [0,+\infty[$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\theta_\rho(\varepsilon) \to \theta_\rho(0) = 0$, когда $\varepsilon \to 0$;

2) если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — область пространства $\mathbb{R}^n$, является ε-квазигармоническим, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, то имеет место неравенство

$$\Xi^1_\rho(f, \mathfrak{G}_{n,m}) \leqslant \theta_\rho(\varepsilon).$$

Замечание. Роль функции θ_ρ в теореме 9 может играть функция ζ_ρ из формулировки теоремы 6.

Теоремы 5 и 9 в том случае, когда $0 < \rho < 1$, позволяют рассматривать понятие отображения, Ξ^1_ρ-близкого (т. е. локально ξ^1_ρ-близкого) к классу $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений, как асимптотически эквивалентное при $\varepsilon \to 0$ понятию ε-квазигармонического отображения. Последнее, в свою очередь, приводит нас к заключению о том, что в случае $0 < \rho < 1$ теорема 8 дает утвердительный ответ на вопрос, сформулированный в начале статьи в виде проблемы А.

Мы завершим статью следующим наблюдением. Пусть $m > 1$. Тогда скалярные функции-компоненты $f_j : U \to \mathbb{R}$ отображения $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ξ^1_ρ-близкого к классу $\mathfrak{G}_{n,m}$ гармонических отображений, (вообще говоря) не обязаны быть близкими к скалярным гармоническим функциям. Другими словами, произвольное ξ^1_ρ-близкое к классу $\mathfrak{G}_{n,m}$, $m > 1$, отображение нельзя расщепить на скалярные функции, ξ^1_ρ-близкие к классу $\mathfrak{G}_{n,1}$.

В самом деле, пусть n и m — натуральные числа, бóльшие 1, и ε — положительное вещественное число $(\varepsilon < 1)$. Построим отображение $f_\varepsilon = (f_{\varepsilon 1}, \ldots, f_{\varepsilon m}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$\begin{cases} f_{\varepsilon 1}(x) = \frac{1}{2} \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2, \\ f_{\varepsilon 2}(x) = \{2^{-1} n \varepsilon^{-2}(1-\varepsilon^2)\}^{1/2} x_1 x_2, \\ f_{\varepsilon l}(x) = 0, \quad l = 3, \ldots, m, \end{cases}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Непосредственный подсчет позволяет легко убедиться в том, что f_ε является ε-квазигармоническим отображением.

Но в то же время для первой его компоненты $f_{\varepsilon 1}$ (и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$) имеем

$$|\triangle f_{\varepsilon 1}(x)| \left\{ n \sum_{j,s=1}^{n} |\partial_{js} f_{\varepsilon 1}(x)|^2 \right\}^{-1/2} = 1.$$

В заключение отметим, что основные результаты настоящей статьи анонсированы в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
2. *Шварц Л.* Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
3. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
4. *Копылов А. П.* К устойчивости классов конформных отображений. II // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 326–343.
5. *Копылов А. П.* Об основах теории устойчивости классов гармонических отображений // Докл. РАН. (Принята к печати.)

г. Новосибирск *Статья поступила 6 июня 1996 г.*