Н. Н. Петров, Простое преследование жесткосоединенных убегающих,

Автомат. и телемех., 1997, выпуск 12, 89–96

https://www.mathnet.ru/at2745

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
3. *Лозинский С. М.* Оценка погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Известия вузов. 1958. № 5. С. 52–90.
4. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
9. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее приложения. М.: ИЛ, 1960.
11. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
12. *Зейфман А. И.* Свойства типа эргодичности и устойчивости для неоднородных марковских цепей с непрерывным временем. Докторская диссертация, М., 1994.
13. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 30.04.96

УДК 519.83

 Н. Н. ПЕТРОВ, канд. физ.-мат. наук
(Удмуртский государственный университет, Ижевск)

ПРОСТОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКОСОЕДИНЕННЫХ УБЕГАЮЩИХ[1]

Получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия поимки хотя бы одного убегающего в задаче простого преследования, при условии, что убегающие используют одно и то же управление.

1. Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–8]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы – преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих – противоположна [6–13].

[1]Работа выполнена по программе "Университеты России" (проект 1.5.22) и поддержана центром фундаментального естествознания (грант № 93-1-46-18) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 94-01-00843-а).

В работе [13] получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими преследователями и убегающими, при условии, что убегающие используют одно и то же управление.

В данной работе для задачи простого преследования с двумя убегающими при некоторых естественных предположениях получены необходимые и достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего, при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Для игры с тремя и более убегающими получены достаточные условия поимки, дополняющие результаты работы [13].

В пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$(1) \qquad \dot{x}_i = u_i, \quad \| u_i \| \leqslant 1.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид:

$$(2) \qquad \dot{y}_j = v, \quad \| v \| \leqslant 1.$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in R^k$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \text{причем} \quad x_i^0 \neq y_j^0.$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено специально $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $T > 0$ и σ – некоторое конечное разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_q < t_{q+1} = T$$

отрезка $[0, T]$.

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией V убегающих E_j, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c^ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам*

$$(3) \qquad (t_\ell, x_i(t_\ell), y_j(t_\ell), \min_{t \in [0, t_\ell]} \min_i \| x_i(t) - y_j(t) \|)$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ и такую, что $\| v(t) \| \leqslant 1$, $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который по величинам (3) для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$, $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c_i^ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам (3) и управлению $v(t)$, $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ и такую, что $\| u_i(t) \| \leqslant 1$, $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$.*

Обозначим данную игру Γ.

Определение 3. *Будем говорить, что в игре Γ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ интервала $[0, T]$, стратегия V убегающих E_j такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i имеет место*

$$x_i(t) \neq y_j(t), \quad t \in [0, T].$$

Определение 4. Будем говорить, что в игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любой стратегии V убегающих E_j существуют кусочно-программные контрстратегии U_i преследователей P_i, момент $\tau \in [0, T]$ и номера $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что

$$x_r(\tau) = y_s(\tau).$$

2. Решение задачи

Определение 5 [14]. *Будем говорить, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^k, если для любого $x \in R^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Определение 6 [14]. *Будем говорить, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют минимальный положительный базис R^k, если исходная система векторов образует положительный базис, но никакая правильная подсистема данной системы не образует положительного базиса.*

Отметим, что положительный базис состоит из не менее чем $k + 1$ вектора, а минимальный положительный базис может состоять из числа векторов от $k + 1$ до $2k$.

Лемма 1. Пусть положительный базис R^k состоит из $k + 1$ вектора. Тогда любые k векторов указанной совокупности линейно независимы.

Доказательство леммы 1 дано в приложении.

Лемма 2. Если минимальный положительный базис R^k содержит не менее чем $k + 2$ вектора, то существуют линейно зависимые векторы $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_k}$, входящие в минимальный положительный базис.

Доказательство леммы 2 дано в приложении.

Следствие 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ минимальный положительный базис R^k такой, что для любых попарно-различных $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ векторы a_{ℓ_1}, $a_{\ell_2}, \ldots, a_{\ell_k}$ линейно независимы.

Тогда $s = k + 1$.

Лемма 3. Пусть векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис. Тогда для любого $a \in R^k$ существует $\mu > 0$ такое, что векторы $a_1, \ldots, a_{s-1}$, $a_s + \mu a$ образуют положительный базис.

Доказательство леммы 3 дано в приложении.

Лемма 4. Пусть $\operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_1, \ldots, a_s\} \neq \varnothing$. Тогда

$$\operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_1, \ldots, a_s\} \cap \operatorname{co}\{b_1, \ldots, b_r\} \neq \varnothing \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда система векторов $\{a_\ell - b_t, \ell = 1, \ldots, s,\ t = 1, \ldots, r\}$ образует положительный базис.

Доказательство леммы 4 дано в приложении.

Обозначим

$$\lambda(a, v) = \left[(a, v) + \sqrt{(a, v)^2 + \| a \|^2 (1 - \| v \|^2)}\right] / \| a \|^2 .$$

Лемма 5 [3]. *Векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис тогда и только тогда, когда*

$$\min_{\|v\| \leqslant 1} \max_{\ell} \lambda(a_\ell, v) > 0.$$

Лемма 6. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_{k+1}\} \cap \operatorname{co}\{b_1, b_2\} \neq \varnothing$;

2) $a_{k+1} \in L$, *где* $L = \{z | z = tb_1 + (1-t)b_2, t \notin [0,1]\}$.

Тогда существует $j \in \{1, 2\}$ *такой, что* $b_j \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$.

Доказательство леммы 6 дано в приложении.

Будем предполагать в дальнейшем, что начальные позиции x_i^0, y_j^0 таковы, что

а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geqslant k+1$ справедливо $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_i^0, \ i \in I\} \neq \varnothing$;

б) любые k векторов из совокупности $\{x_i^0 - y_j^0, y_s^0 - y_r^0, s \neq r\}$ линейно независимы.

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть

$$\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_i^0\} \cap \operatorname{co}\{y_j^0\} = \varnothing.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство теоремы 1 дано в приложении.

Теорема 2. Пусть существуют j_1, $j_2 \in \{1, \ldots, m\}$ *такие, что*

$$\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_i^0\} \cap \operatorname{co}\{y_{j_1}^0, y_{j_2}^0\} \neq \varnothing. \tag{6}$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

Замечание. Если число убегающих равно двум, то из теорем 1, 2 следует, что условие 6 является необходимым и достаточным условием поимки.

3. Пример

Рассмотрим в R^2 дифференциальную игру трех преследователей P_1, P_2, P_3 и двух убегающих E_1,E_2. Начальные позиции имеют вид: $x_1^0(10{,}0)$, $x_2^0(-10{,}1)$, $x_3^0(-10, -0{,}5)$, $y_1^0(9{,}1)$, $y_2^0(9{,}5, -1)$. Ясно, что $\operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing$ и, следовательно, по теореме 2 в данной игре происходит поимка. В то же время $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_1^0 - y_r^0, x_2^0 - y_s^0, x_3^0 - y_\ell^0\}$ для любых r, s, $\ell \in \{1, 2\}$, т.е. не выполнены условия соответствующей теоремы [13].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Предположим, что существует набор индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ такой, что $|I| = k$ и векторы a_ℓ, $\ell \in I$ линейно зависимы. Тогда существует гиперплоскость H $(0 \in H)$, содержащая векторы a_ℓ, $\ell \in I$. Пусть H_1 – полупространство, определяемое гиперплоскостью H, не содержащее a_q, $q \notin I$, и p – нормаль H, направленная в H_1. Тогда $(p, a_i) \leqslant 0$ для всех i. Последнее неравенство противоречит условию положительности базиса [14]. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Предположим, что для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ $|I| = k$ векторы a_ℓ, $\ell \in I$ линейно независимы. Рассмотрим векторы a_1, $a_2, \ldots, a_{k+1}$. Существуют вещественные числа β_ℓ, одновременно не обращающиеся в ноль такие, что

$$0 = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k+1} a_{k+1}.$$

Если $\beta_\ell > 0$ для всех ℓ, то [14] векторы $a_1, \ldots, a_{k+1}$ образуют положительный базис, что противоречит свойству минимальности исходного базиса.

Если $\beta_\ell = 0$ при некотором ℓ, то векторы $a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_{\ell+1}, \ldots, a_{k+1}$ линейно зависимы, что противоречит предположению леммы.

Поэтому $\{1, 2, \ldots, k+1\} = I \cup J$, где $I = \{\ell |\ \beta_\ell > 0\}$, $J = \{\ell |\ \beta_\ell < 0\}$. Так как $a_1, \ldots, a_s$ $(s \geqslant k+2)$ образуют положительный базис, то существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$0 = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Отсюда

$$0 = d\sum_{\ell=1}^{s} \alpha_\ell a_\ell + \sum_{r=1}^{k+1} \beta_r a_r = \sum_{\ell \in I} (d\alpha_\ell + \beta_\ell) a_\ell + \sum_{\ell \in J} (d\alpha_\ell + \beta_\ell) a_\ell + \sum_{\ell=k+2}^{s} d\alpha_\ell a_\ell.$$

Возьмем $d > 0$ так, чтобы $d\alpha_r + \beta_r = 0$ при некотором $r \in J$ и $d\alpha_\ell + \beta_\ell \geqslant 0$ для остальных $\ell \in J$.

Тогда [14] положительный базис образуют векторы $a_1, \ldots, a_{r-1}$, $a_{r+1}, \ldots, a_s$, что противоречит свойству минимальности исходного базиса. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Предположим, что существует $a \in R^k$, такой, что для всех $\mu > 0$ векторы $a_1, \ldots, a_{s-1}$, $a_s + \mu a$ не образуют положительный базис. Тогда [14] для каждого μ существует единичный вектор v_μ такой, что

$$(a_\ell, v_\mu) \leqslant 0, \quad \ell = 1, \ldots, \ell - 1, \quad (a_s, v_\mu) + (a, v_\mu)/\mu \leqslant 0.$$

В силу компактности единичной сферы можно считать, что $\lim\limits_{\mu \to \infty} v_\mu = v_0$. Отсюда $(a_\ell, v_0) \leqslant 0$ для всех ℓ. Последнее неравенство противоречит свойству положительности базиса. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. Предположим, что условие (4) не выполнено. Тогда, по теореме отделимости, существует единичный вектор p, такой, что

$$(a_\ell - b_t, p) \leqslant 0 \tag{7}$$

для всех ℓ, t. Последнее означает [14], что система векторов $\{a_\ell - b_t\}$ не образует положительный базис.

Если $\{a_\ell - b_t\}$ не образуют положительный базис, то существует единичный вектор p, для которого справедливо (7). Отсюда, множества $\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_s\}$, $\mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_s\}$ отделимы. Из условия $\mathrm{Int\,co}\{a_1, \ldots, a_s\} \neq \varnothing$ следует, что данные множества собственно отделимы. Поэтому [15, с. 113]

$$\mathrm{ri\,co}\,\{a_1, \ldots, a_s\} \cap \mathrm{ri\,co}\,\{b_1, \ldots, b_r\} = \varnothing. \tag{8}$$

Но $\mathrm{ri\,co}\,\{a_1, \ldots, a_s\} = \mathrm{Int\,co}\,\{a_1, \ldots, a_s\}$. Если теперь предположить, что выполнено условие (4), то используя теорему 6.1 [15, с. 60] получим, что не выполняется условие (8). Лемма доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть z – точка пересечения множеств из условия (1). Если $z = b_1$ или b_2, то лемма справедлива. Иначе, существует $j \in \{1, 2\}$ такой, что $b_j \in (a_{k+1}, z)$. Поэтому, существует $\mu \in (0, 1)$, что $b_j = \mu a_{k+1} + (1 - \mu) z$. Кроме того, существуют числа $\alpha_\ell > 0$, $\sum\limits_{\ell=1}^{k+1} \alpha_\ell = 1$ такие,что $z = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k+1} a_{k+1}$. Из последних двух соотношений следует, что $z = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k+1} a_{k+1}$, причем $\beta_\ell > 0$, $\sum\limits_{\ell=1}^{k+1} \beta_\ell = 1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Возможны два случая:

а) $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\} \neq \varnothing$. По теореме отделимости существует единичный вектор p такой, что

$$(9)\qquad (x_i^0 - y_\ell^0, p) \leqslant 0$$

для всех i, j. Полагая $v(t) = p$ для всех $t \geqslant 0$, получаем уклонение от встречи [1];

б) $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\} = \varnothing$. Тогда, в силу наших предположений $n \leqslant k$. Пусть $d = \min\limits_{s\neq r} \| y_s^0 - y_r^0 \|$, $\sigma = \{0, kd/6,\ k \in N\}$, $I(i) = \{j| \ \| x_i^0 - y_j^0 \| \leqslant d/3\}$. В силу неравенства треугольника $|I(i)| \leqslant 1$ для всех i. Поэтому, существует единичный вектор p такой, что (9) выполнено для всех i, j таких, что $I(i) \neq \varnothing$, $j \in I(i)$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0,\ d/6]$. Тогда, для $t \in [0,\ d/6]$

а) $j \notin I(i)$, $\| x_i(t) - y_j(t) \| \geqslant \| x_i^0 - y_j^0 \| -2t > d/3 - 2t > 0$;

б) $j \in I(i)$, $\| x_i(t) - y_j(t) \| \geqslant \| x_i^0 - y_j^0 - pt \| - t = \sqrt{\| x_i^0 - y_j^0 \|^2 - 2t(x_i^0 - y_j^0, p) + t^2} - t > 0$.

Значит, на интервале $[0, d/6]$ поимки не происходит. Принимая момент $t = d/6$ за начальный и учитывая, что $\| y_s(t) - y_r(t) \| = \| y_s^0 - y_r^0 \|$ для всех t, получаем, что поимка не произойдет на отрезке $[d/6, 2d/6]$ и так далее. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем считать, что $j_1 = 1$, $j_2 = 2$. Если $y_1^0(y_2^0) \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\}$, то поимка следует из [1]. Пусть y_1^0, $y_2^0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\}$. Условие (6) равносильно тому, что векторы $\{x_i^0 - y_1^0, x_i^0 - y_2^0\}$ образуют положительный базис. Рассмотрим минимальный положительный базис, порожденный данными векторами. Пусть

$$I_j = \{i | z_{ij}^0 \quad \text{входит в минимальный положительный базис}\} \quad (j = 1, 2).$$

Возможны два случая:

а) $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Это означает, что для каждого i в минимальный положительный базис входит не более одного вектора из совокупности $\{z_{i1}^0,\ z_{i2}^0\}$. В этом случае задаем управления преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in I_1,$$
$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in I_2.$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Из леммы 5 и [1] следует, что в данном случае в игре Γ происходит поимка;

б) $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. В силу наших предположений и следствия 1 минимальный положительный базис содержит $k+1$ вектор. Покажем, что $I_1 \cap I_2$ состоит из одного элемента. Пусть $c = y_1^0 - y_2^0$ и предположим, что существуют индексы s, $q \in I_1 \cap I_2$. Это означает, что векторы z_{s1}^0, z_{s2}^0, z_{q1}^0, z_{q2}^0 входят в положительный базис. Из соотношения $z_{i2}^0 = z_{i1}^0 + c$ для всех i следует, что положительный базис образуют векторы c, z_{i1}^0, $i \in I_1 \cup I_2$, число которых не превосходит k. k векторов не могут образовывать положительный базис. Поэтому, $|I_1 \cap I_2| = 1$.

Так как число преследователей не менее $k+1$, то существует индекс $q \notin I_1 \cup I_2$. Будем считать, что $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, k\}$, $q = k+1$. По лемме 4 существует $\mu > 0$, что векторы $z_{11}^0, z_{21}^0, \dots, z_{k1}^0$, $z_{k+1,1}^0 + \mu c$ образуют положительный базис.

Задаем управления преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i = 1, \dots, k,$$
$$u_{k+1}(t) = v(t) - \lambda(z_{k+1,1}^0 + \mu c, v(t))(z_{k+1,1}^0 + \mu c), \quad t \in [0, T].$$

Момент T будет указан ниже. Управления остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (5) имеем

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_i(t), \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$z_{k+1,1}(t) = z_{k+1,1}^0 h_{k+1}(t) - \mu c(1 - h_{k+1}(t)),$$

где $h_i(t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))d\tau$, $h_{k+1}(t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda(z_{k+1,1}^0 + \mu c, v(\tau))d\tau$.

Из леммы 5 следует, что существуют момент T и номер r такие, что $h_r(T) = 0$. Если $r \leqslant k$, то $z_{r1}(T) = 0$ и, следовательно, в игре Γ происходит поимка. Если $r = k + 1$, то $z_{k+1,1}(T) = -\mu c$, т.е. преследователь P_{k+1} в момент T попадает на прямую, проходящую через точки $y_1(T)$, $y_2(T)$.

Если $x_{k+1}(T) \in [y_1(T), y_2(T)]$, то $z_{k+1,2}(T) = \alpha c$, $\alpha > 0$. Поэтому, в момент T векторы $z_{11}(T), \ldots, z_{k1}(T), z_{k+1,2}(T)$ образуют положительный базис. Следовательно, по ранее доказанному, в игре Γ происходит поимка.

Пусть $x_{k+1}(T) \notin [y_1(T), y_2(T)]$ и $\ell(t)$ – прямая, проходящая через $y_1(t)$, $y_2(t)$. Покажем, что для всех $t \in [0, T]$

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_1(t), \ldots, x_k(t)\} \cap \ell(t) \neq \varnothing.$$

Действительно, если условие (10) не выполняется при некотором t, то [15, с. 113] существует гиперплоскость H, содержащая $\ell(t)$ и такая, что в одном из замкнутых полупространств содержится $\operatorname{co}\{x_1(t), \ldots, x_k(t)\}$. Пусть p – нормаль H. Тогда $(p, c) = 0$, $(p, x_i(t) - y_1(t)) \leqslant 0$ для $i = 1, \ldots, k$. Из последних двух соотношений следует, что $(p, c) = 0$ и $(p, z_{i1}^0) \leqslant 0$, что противоречит положительности базиса.

Покажем далее, что

$$\text{(11)} \qquad (y_1(T), y_2(T)) \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_1(T), \ldots, x_k(T)\} \neq \varnothing.$$

Пусть условие (11) не выполняется. Тогда существует момент $\tau \leqslant T$ такой, что либо $y_1(\tau)$, либо $y_2(\tau)$ принадлежит гиперплоскости H, проходящей через точки $x_1(\tau), \ldots, x_k(\tau)$;

в) $y_1(\tau) \in H$. Пусть p – нормаль гиперплоскости такая, что $(p, c) \leqslant 0$. Тогда $0 = (p, x_i(\tau) - y_1(\tau)) = h_i(\tau)(p, z_{i1}^0)$, причем $h_i(\tau) > 0$. Отсюда, $(p, z_{i1}^0) \leqslant 0$, $(p, c) = 0$, что противоречит положительности базиса c, z_{i1}^0;

г) $y_2(\tau) \in H$. Тогда $0 = (p, x_i(\tau) - y_2(\tau)) = (p, x_i(\tau) - y_1(\tau)) + (p, c) = h_i(\tau)(p, z_{i1}^0) + {}$ ${}+ (p, c)$. С другой стороны $x_i(\tau) - y_2(\tau) = z_{i2}^0 - (1 - h_i(\tau))z_{i1}^0$. Поэтому, $(p, z_{i2}^0) =$ $= (p, z_{i1}^0)(1 - h_i(\tau))$. Получили, что (p, z_{i1}^0), (p, z_{i2}^0), $i = 1, \ldots, k$ одного знака, что противоречит тому, что векторы z_{i1}^0, z_{i2}^0 образуют положительный базис.

Из условий (10), (11) и леммы 6 получаем, что существует $j \in \{1, 2\}$ такой, что $y_j(T) \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_1(T), \ldots, x_{k+1}(T)\}$. Поэтому, начиная с момента T, преследователи действуют как в [1]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. *Черноусько Ф. Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. *Петров Н. Н.* Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684–84.
4. *Рихсиев Б. Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989.
5. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
6. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
7. *Чикрий А. А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.

8. *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
9. *Петров Н. Н., Петров Н. Никандр.* О дифференциальной игре "казаки-разбойники" // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
10. *Петров Н. Н., Прокопенко В. А.* Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726.
11. *Чикрий А. А., Прокопович П. В.* Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
12. *Чикрий А. А., Прокопович П. В.* О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63, 78.
13. *Сатимов Н., Маматов М. Ш.* О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Докл. АН Узб.ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
14. *Петров Н. Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 05.10.95

УДК 519.23

© 1997 г. **В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук**
(Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск)

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассматривается задача синтеза закона управления наблюдениями в функции координат вектора состояния информационного процесса. Исследуются теоретические и прикладные аспекты проблемы пространственной оптимизации наблюдений.

1. Введение

Важным аспектом общей проблемы повышения качественных характеристик динамической фильтрации является оптимизация измерительных процессов в информационных системах [1–5]. Обычно задача управления наблюдениями интерпретируется как задача управления фиктивной динамической системой, описываемой матричным уравнением Риккати. Она решается на основании принципа максимума Понтрягина и приводит к временно́му программному управлению [1–4]. Независимость закона управления наблюдениями от координат вектора состояния при погрешностях задания математической модели эволюции фильтруемого процесса влечет за собой снижение положительного эффекта от оптимизации. Непосредственное решение задачи синтеза управления наблюдениями, основанного на принципе обратной связи, оказывается чрезвычайно трудоемким и не приводит к конструктивным результатам, поскольку объект управления (фиктивная динамическая система) описывается нелинейным матричным дифференциальным уравнением высокой размерности.