A. Ya. Gordon, Eigenvalues of the one-dimensional Schrödinger operator that are located on its essential spectrum,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 1, 113–121

https://www.mathnet.ru/eng/aa621

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 1

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА, РАСПОЛОЖЕННЫЕ В ЕГО СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ

© А. Я. Гордон

1. Пусть H_ϑ — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, порожденный дифференциальным оператором

$$ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + v(x)y, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

и граничным условием

$$y(0)\cos\vartheta - y'(0)\sin\vartheta = 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(см. [AG]). Предположим, что „потенциал“ $v(x)$ является локально интегрируемым на $[0,\infty)$, а дифференциальный оператор (1) имеет предельно-точечный тип на бесконечности. Для выполнения этих условий достаточно, чтобы функция $v(x)$ была ограничена снизу, или, более общо, удовлетворяла неравенству $v(x) > -ax^2 - b$. В этом случае все операторы H_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, являются самосопряженными.

Обозначим через $\sigma_{\mathrm{p}}(H_\vartheta)$ точечный спектр (т.е. множество всех собственных значений) оператора H_ϑ, а через Σ — его существенный спектр (замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$, содержащее все неизолированные точки спектра H_ϑ и фактически не зависящее от ϑ).

Теорема 1.[1] *Для плотного множества типа* G_δ *точек* $\vartheta \in [0,\pi)$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_\vartheta) \cap \Sigma = \varnothing.$$

Замечания. 1. Существует абстрактный аналог этой теоремы, касающийся однопараметрических семейств самосопряженных операторов вида

$$A_t = A + tP \quad (t \in \mathbb{R}),$$

[1]Этот результат был анонсирован в [G1].

где A — самосопряженный оператор с простым спектром, а P — ортогональный проектор ранга 1 на подпространство, натянутое на циклический вектор оператора A (см. [G2]). Из этого абстрактного результата следует утверждение, сходное с теоремой 1, о семействе решеточных операторов Шрёдингера h_t, действующих в $l^2(\mathbb{Z}_+)$; h_t порожден конечно-разностным оператором $(hy)_n = y_{n-1} + y_{n+1} + v_n y_n$, $n \geq 0$, и граничным условием $y_{-1} = t\, y_0$ $(t \in \mathbb{R})$. Однако теорема 1 из этого абстрактного результата не следует.

2. Некоторые близкие результаты были получены независимо от нас Р. дель Рио, Н. Макаровым и Б. Саймоном (см. [dRYMS, S]). Их метод доказательства отличен от нашего.

В следующем разделе доказывается теорема 1. В разделе 3 мы используем идею этого доказательства для того, чтобы (в некотором смысле) наглядно объяснить появление плотного точечного спектра, который часто возникает, когда потенциал v — случайная величина.

2. Доказательство. Мы должны показать, что

$$\text{множество } Z := \{\, \vartheta \in \mathbb{R} : \sigma_{\mathrm{p}}(H_\vartheta) \cap \Sigma \neq \varnothing \,\} \text{ является тонким,} \tag{3}$$

т.е. Z является объединением счетного семейства нигде не плотных подмножеств в $\mathbb{R}$.

Обозначим через D множество всех собственных значений всех H_ϑ:

$$D := \bigcup_{\vartheta \in \mathbb{R}} \sigma_{\mathrm{p}}(H_\vartheta).$$

Тогда (3) прямо следует из двух следующих утверждений.

Утверждение 1. *Множество $D \cap \Sigma$ — тонкое.*

Утверждение 2. *Пусть Y — подмножество в $\mathbb{R}$ и*

$$X := \{\, \vartheta \in \mathbb{R} : \sigma_{\mathrm{p}}(H_\vartheta) \cap Y \neq \varnothing \,\}.$$

Если Y — тонкое, то X — тоже тонкое.

Доказательство утверждения 1. При $\xi = (\vartheta, E) \in \mathbb{R}^2$ обозначим через $y_\xi(x) = y_{\vartheta,E}(x)$ решение задачи Коши

$$-y'' + v(x)y = Ey, \quad x \geq 0; \qquad y(0) = \sin\vartheta, \;\; y'(0) = \cos\vartheta.$$

Введем множество

$$Q = \{ (\vartheta, E) \in \mathbb{R}^2 : y_{\vartheta,E}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+) \}.$$

Тогда $D = p(Q)$; здесь p обозначает проекцию плоскости $\mathbb{R}^2 = \{ (\vartheta, E) : \vartheta, E \in \mathbb{R} \}$ на ось E. Теперь для любого $M > 0$ мы определим следующее подмножество в Q:

$$Q_M := \left\{ (\vartheta, E) \in \mathbb{R}^2 : \int_0^\infty y^2_{\vartheta,E}(x)dx \le M \right\}.$$

Используя слабую компактность шаров в гильбертовом пространстве, можно легко показать, что множество Q_M замкнуто; кроме того, множество $D_M := p(Q_M)$ тоже замкнуто (в общем случае такая проекция замкнутого множества может и не быть замкнутой, но Q_M π-периодично по ϑ). Поскольку $D \bigcap \Sigma = \bigcup_{M=1}^\infty (D_M \cap \Sigma)$, утверждение 1 следует из того, что

$$D_M \cap \Sigma \quad \text{нигде не плотно.} \tag{4}$$

Чтобы проверить (4), используем тождество

$$\sin(\vartheta' - \vartheta) = (E - E')(y_{\xi'}, y_\xi) \quad \text{для любых } \xi, \xi' \in Q, \tag{5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Тождество (5) получается из тождества Лагранжа для дифференциального оператора (1)

$$\int_0^s (ly_{\xi'} \cdot y_\xi - ly_\xi \cdot y_{\xi'})dx = W(y_\xi, y_{\xi'}; s) - W(y_\xi, y_{\xi'}; 0)$$

($W(\cdot,\cdot;x)$ обозначает вронскиан двух решений в точке x), с помощью перехода к пределу при $s \to \infty$ (надо учесть, что $W(y_\xi, y_{\xi'}; s) \to 0$, поскольку l имеет предельно-точечный тип на ∞ (см. [AG])).

Из (5) следует, что координата ϑ пары $\xi = (\vartheta, E) \in Q$ определяется единственным образом $\pmod \pi$ по ее E-координате. Следовательно, полагая $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ и обозначая через $\overline{\vartheta}$ смежный класс ϑ в $\mathbb{T}$, получим: множество $\{ (\overline{\vartheta}, E) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : (\vartheta, E) \in Q \}$ является, с точностью до перестановки осей, графиком некоторого однозначного отображения

$$\theta \colon D \to \mathbb{T}$$

($E \mapsto \overline{\vartheta}$ тогда и только тогда, когда $(\vartheta, E) \in Q$). Далее, из (5), неравенства Шварца и неравенства $\phi \le \frac{\pi}{2}\sin\phi$ $(0 \le \phi \le \frac{\pi}{2})$ следует, что

$$\rho(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta'}) \le \frac{\pi}{2} M|E - E'| \quad \text{для любых } \xi, \xi' \in Q_M.$$

Здесь $\rho(\cdot,\cdot)$ — обычное расстояние в фактор-группе $\mathbb{T}$. Иначе говоря, отображение θ удовлетворяет условию Липшица

$$\rho(\theta(E), \theta(E')) \le \frac{\pi}{2} M|E - E'| \quad E, E' \in D_M.$$

Проверим (4), т.е. утверждение, что никакая точка $E_0 \in \mathbb{R}$ не является внутренней для D_M и Σ одновременно. На самом деле, верен более сильный факт:

$$E_0 \in \operatorname{int} D_M \Rightarrow E_0 \notin \Sigma \tag{6}$$

($\operatorname{int} D_M$ обозначает внутренность множества D_M). Если (6) неверно, то существует $E_0 \in \Sigma$ такое, что $\Delta = [E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon] \subset D_M$ для некоторого $\epsilon > 0$. Можно считать, что

$$\epsilon < \frac{\pi}{2M}. \tag{7}$$

Поскольку отображение $\theta|_\Delta \colon \Delta \to \mathbb{T}$ непрерывно, мы можем выбрать его „непрерывную однозначную ветвь“ $E \mapsto \vartheta(E) \colon \Delta \to \mathbb{R}$ такую, что $\overline{\vartheta(E)} = \theta(E)$ при $E \in \Delta$ (этот выбор является единственным с точностью до постоянного слагаемого вида $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Положим

$$y_E(x) := y_{\vartheta(E), E}(x), \quad x \ge 0,$$

и заметим, что, в силу (5),

$$\sin(\vartheta(E') - \vartheta(E)) = (E - E')(y_{E'}, y_E), \quad E, E' \in \Delta,$$

так что существует производная

$$\frac{d\vartheta(E)}{dE} = -\|y_E\|^2, \quad E \in \Delta. \tag{8}$$

Равенство (8) следует из легко проверяемого соотношения

$$y_{\xi'} \rightharpoonup y_\xi \quad \text{при } Q_M \ni \xi' \to \xi \ (\in Q_M)$$

(символ $\rightharpoonup$ обозначает слабую сходимость в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$) и из непрерывности отображения $E \mapsto \vartheta(E)\colon \Delta \to \mathbb{R}$.

Пусть $E \in \Delta$ и $\vartheta = \vartheta(E)$. Поскольку $(\vartheta, E) \in Q$, y_E является собственной функцией для H_ϑ, соответствующей собственному значению E (очевидно, простому). Пусть $\rho_\vartheta(dE)$ — спектральная мера оператора H_ϑ (см. определение в [CL]). Эта мера такова, что для любой вещественнозначной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, полагая

$$\phi_R(E) := \int_0^R f(x) y_{\vartheta,E}(x)\,dx,$$

имеем: существует предел

$$\phi(E) := \lim_{R\to\infty} \phi_R(E)$$

(сходимость в $L^2(\mathbb{R}, \rho_\vartheta(dE))$), и отображение $f \mapsto \phi$ является изометрией $L^2(\mathbb{R}_+)$ на $L^2(\mathbb{R}, \rho_\vartheta(dE))$, преобразующей H_ϑ в умножение на E.

Применяя это к $f(x) := y_{\vartheta^*,E^*}(x)$, где $(\vartheta^*, E^*) \in Q$, получим $f(\cdot) \mapsto \phi(E) \equiv c\delta(E - E^*)$ ρ_{ϑ^*}-почти всюду; здесь $\delta(\cdot)$ обозначает дельта-функцию Дирака, $c = \|y_{\vartheta^*,E^*}\|^2$ (норма в $L^2(\mathbb{R}_+)$), и мера $\rho_{\vartheta^*}(dE)$ имеет в точке E^* атом с массой

$$\alpha(E^*) := \rho_{\vartheta^*}(\{E^*\}) = \|y_{\vartheta^*,E^*}\|^{-2} = \Big(-\frac{d\vartheta(E)}{dE}\Big|_{E=E^*}\Big)^{-1}$$

(см. (8)).

Из (8) следует, что $\vartheta(\cdot)$ строго убывает на $\Delta = [E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon] \equiv [E_1, E_2]$; положим $\vartheta_j := \vartheta(E_j)$, $j = 1, 2$. Используя (7), (8) и неравенство $\|y_E\|^2 \le M$ $(E \in \Delta)$, которое выполняется, поскольку $\Delta \subset D_M$, мы убеждаемся, что $\vartheta(\cdot)$ отображает Δ на замкнутый интервал $[\vartheta_2, \vartheta_1]$ длины меньшей, чем π. Пусть $\vartheta \mapsto E(\vartheta)$ — обратное отображение, тогда

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_2+\pi} \rho_\vartheta(\Delta)\,d\vartheta &\ge \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \rho_\vartheta(\Delta)\,d\vartheta \ge \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \rho_\vartheta(\{E(\vartheta)\})\,d\vartheta = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \alpha(E(\vartheta))\,d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \Big(-\frac{d\vartheta(E)}{dE}\Big|_{E=E(\vartheta)}\Big)^{-1} d\vartheta = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \Big(-\frac{dE(\vartheta)}{d\vartheta}\Big)\,d\vartheta = E_2 - E_1 \\ &= |\Delta|. \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, в силу результата Котани [K] (идея неявно использовалась и раньше в работе Кармона [C])

$$\int_0^\pi \rho_\vartheta(\Delta)\,d\vartheta = |\Delta|.$$

Поскольку $\rho_{\vartheta+\pi}(\Delta) \equiv \rho_\vartheta(\Delta)$, первый интеграл в (9) равен $|\Delta|$ и, следовательно, оба неравенства в (9) являются равенствами; другими словами, для L-почти всех $\vartheta \in [\vartheta_2, \vartheta_2+\pi]$ сужение $\rho_\vartheta(dE)$ на Δ или сводится к одному атому в точке $E(\vartheta)$ (при $\vartheta_2 \le \vartheta \le \vartheta_1$) или равно нулю. И в этом и в другом случае спектр H_ϑ содержит не более одной внутренней точки Δ, и, следовательно, существенный спектр (который не зависит от ϑ) не содержит ни одной внутренней точки Δ, и, в частности, не содержит точку E_0. Это противоречит предположению; значит, утверждение (6) верно.

Доказательство утверждения 2. Пусть π обозначает проекцию $\mathbb{R}^2 = \{(\vartheta, E) : \vartheta \in \mathbb{R},\ E \in \mathbb{R}\}$ на ось ϑ. Мы должны доказать, что из тонкости множества $Y \subset \mathbb{R}$ следует тонкость множества $X := \pi(p^{-1}(Y) \cup Q)$. Легко видеть, что достаточно проверить следующее: если K — компактное подмножество в Q_M и $p(K)$ нигде не плотно, то $\pi(K)$ также нигде не плотно.

Предположим обратное. Тогда существует компактное множество $K \subset Q_M$ такое, что $p(K)$ нигде не плотно, но

$$\pi(K) \supset I,$$

где I — некоторый непустой замкнутый интервал. Используя лемму Цорна, можно свести задачу к случаю, когда K — минимальное, т.е.

$$\pi(K') \not\supset I$$

для любого собственного компактного подмножества $K' \subset K$. Рассмотрим (слабо непрерывное) отображение $\xi \mapsto y_\xi \colon K \to L^2(\mathbb{R}_+)$, которое уже использовалось выше. Функция

$$\xi \mapsto \|y_\xi\|^2 \colon K \to \mathbb{R}$$

является поточечным пределом при $m \to \infty$ последовательности непрерывных функций

$$J_m(\xi) := \int_0^m y_\xi^2(x)\,dx, \quad \xi \in K;$$

по теореме Бэра [О], предельная функция имеет точку непрерывности $\xi_c \in K$. Следовательно, если $K \ni \xi \to \xi_c$, то $y_\xi \rightharpoonup y_{\xi_c}$ и $\|y_\xi\| \to \|y_{\xi_c}\|$. Хорошо известно, что отсюда следует сильная сходимость $y_\xi \to y_{\xi_c}$.

Пусть теперь

$$K \ni \xi,\ \xi' \to \xi_c \quad (\xi \ne \xi'). \tag{10}$$

Тождество (5) показывает, что если $\xi \neq \xi'$ и $|\vartheta - \vartheta'| < \pi$, то $E \neq E'$ и

$$-\frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{E - E'} = (y_\xi, y_{\xi'}).$$

Как уже отмечалось, из (10) следует сильная сходимость $y_\xi \to y_{\xi_c}$, $y_{\xi'} \to y_{\xi_c}$ и, следовательно, $(y_\xi, y_{\xi'}) \to \|y_{\xi_c}\|^2$, так что

$$-\frac{\vartheta - \vartheta'}{E - E'} \to \|y_{\xi_c}\|^2 > 0 \quad (K \ni \xi,\, \xi' \to \xi_c;\, \xi \neq \xi').$$

Следовательно, существует окрестность U точки ξ_c в $\mathbb{R}^2$, такая, что если $\xi, \xi' \in K \cap \overline{U}$ ($\xi \neq \xi'$; $\overline{U}$ — замыкание U), то $E \neq E'$ и $\vartheta \neq \vartheta'$. Это означает, что обе проекции $p(K \cap \overline{U})$ и $\pi(K \cap \overline{U})$ компактного множества $K \cap \overline{U}$ гомеоморфны ему и, следовательно, гомеоморфны друг другу.

Поскольку множество $p(K \cap \overline{U})$ содержится в $p(K)$, оно также не содержит интервалов, а потому и гомеоморфных образов интервалов; следовательно, $\pi(K \cap \overline{U})$ не содержит ни одного интервала. Поскольку

$$I \subset \pi(K) = \pi(K \cap \overline{U}) \cup \pi(K \setminus U),$$

компактное множество $\pi(K \setminus U)$ плотно в I, и следовательно, содержит I, в противоречие с минимальностью K. Утверждение 2 доказано.

3. **Обсуждение.** В приведенных выше рассуждениях основным объектом являлось множество Q, которое может быть очень нерегулярным. Пусть потенциал является стохастическим и „достаточно случайным“, скажем, кусочно-постоянным, равным η_n на $[n, n+1)$ $(n \geq 0)$, где η_n — независимые и одинаково распределенные случайные величины с общим абсолютно непрерывным распределением $p(y)dy$ с конечным носителем; тогда для почти всех реализаций (относительно вероятностной меры) спектр совпадает с лучом $[a, \infty)$ для некоторого a и является чисто-точечным для L-почти всех $\vartheta \in [0, \pi)$ (см. [K]). Фиксируем некоторый сегмент Δ внутри спектра. Мы видим, что для L-почти всех ϑ^* пересечение с интервалом $\Delta_{\vartheta^*} = \{\, (\vartheta, E) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta = \vartheta^*,\ E \in \Delta \,\}$ счетно и плотно в Δ_{ϑ^*} (в то же время, для некоторого плотного G_δ-множества точек ϑ^* это пересечение пусто).

Доказательство теоремы 1 позволяет попутно „увидеть“, как такое нерегулярное множество Q может быть составлено из гораздо лучших множеств. А именно, мы выбираем в Q множество Q_M, содержащее только те точки $(\vartheta, E) \in Q$, для которых соответствующий атом меры ρ_ϑ (спектральной меры для H_ϑ), расположенный в точке E, имеет массу $\geq 1/M$.

Теперь для нас будет более удобным рассматривать вместо Q и Q_M множества $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{Q}_M$, являющиеся образами Q и Q_M под действием естественного отображения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Будем обозначать циклические координаты на $\mathbb{T}$ через θ.

Множество $\widetilde{Q}_M$ замкнуто; оно является графиком отображения $\theta_M : D_M \to \mathbb{T}$, область определения которого $D_M \in \mathbb{R}$ — замкнутое нигде не плотное множество (имеющее в общем случае положительную меру Лебега). Кроме того, θ_M удовлетворяет условию Липшица:

$$\rho(\theta_M(E), \theta_M(E')) \leq \frac{\pi}{2} M |E - E'|.$$

Таким образом, $\widetilde{Q}_M$ — нечто вроде липшицевской кривой типа кривой Кантора (с наклоном не более $\leq \frac{\pi}{2} M$). Более того, эта „кривая“ „дифференцируема“ в любой из своих неизолированных точек: существует предел

$$\lim_{D_M \ni E' \to E} \frac{\vartheta_M(E') - \vartheta_M(E)}{E' - E} = -\|y_E\|^2 = -(\rho_{\theta_M(E)}(\{E\}))^{-1} < 0. \tag{11}$$

Здесь $\vartheta_M(\cdot)$ обозначает непрерывную однозначную ветвь $\theta_M(\cdot)$.

Для любого $\theta^* \in \mathbb{T}$ пересечение $\widetilde{Q}_M$ с интервалом $\Delta_{\theta^*} = \{(\theta, E) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : \theta = \theta^*,\ E \in \Delta\}$ конечно; согласно (11), через все точки пересечения „кривая“ $\widetilde{Q}_M$ „проходит“ в одном и том же направлении. При возрастании M замкнутое множество D_M увеличивается: несколько новых (снова нигде не плотных) позиций D_M возникает в „пробелах“. Они являются E-проекциями некоторых новых (более „крутых“) участков множества $\widetilde{Q}_M$; для любой фиксированной $\theta^* \in \mathbb{T}$ новые пересечения $\widetilde{Q}_M$ с Δ_{θ^*} (если таковые появляются) характеризуются бо́льшими наклонами, соответствующими более легким атомам спектральной меры ρ_{θ^*}. С ростом M точки пересечения Δ_{θ^*} с $\widetilde{Q}_M$ размещаются все плотнее в Δ_{θ^*}, и, в пределе, для L-почти всех $\theta \in \mathbb{T}$ становятся плотными в Δ_{θ^*}.

Благодарности. Я глубоко признателен С. А. Молчанову за полезные обсуждения. Я благодарю У. Фриша за его гостеприимство в Обсерватории Ниццы, где был написан окончательный вариант этой статьи. Работа была поддержана Фондом Сороса и французским Министерством высшего образования.

Список литературы

[AG] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.

[C] Carmona R., *One-dimensional Schrödinger operators with random or deterministic potentials: new spectral types*, J. Funct. Anal. **51** (1983), 229–258.

[CL] Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York–Toronto–London, 1955.

[G1] Гордон А. Я., *Об исключительных значениях граничной фазы для уравнения Шрёдингера на полуоси*, Успехи мат. наук **47** (1992), № 1, 211–212.

[G2] Gordon A. Ya., *Pure point spectrum under* 1*-parameter perturbations and instability of Anderson localization*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 489–505.

[K] Kotani S., *Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators*, Random Matrices and Their Applications (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 277–286.

[O] Окстоби Дж., *Мера и категория*, Мир, М., 1974.

[dRJMS] del Rio R., Jitomirskaya S., Makarov N., Simon B., *Singular continuous spectrum is generic*, Preprint.

[S] Simon B., *Spectral analysis of rank one perturbations and applications*, Mathematical Quantum Theory II: Schrödinger Operators (Vancouver, BC, 1993), CRM Proc. Lecture Notes, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 109–149.

Международный институт
теории предсказания землетрясений
и математической геофизики,
Москва, 113556,
Варшавское шоссе, 79, корп. 2

Поступило 13 сентября 1995 г.