

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Трунов, А. Н. Шерстнев, Об условных ожиданиях в алгебрах Неймана,
Констр. теор. функц. и функц. анал., 1985, выпуск 5, 94–101

<https://www.mathnet.ru/kuktf62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

15 мая 2025 г., 18:30:09



5. Трунов Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана. — Изв. вузов. Матем., 1982, № 8, с. 61 — 70.
6. Connes A. Sur le theoreme de Radon-Nikodym pour les poids normaux fideles semifines. — Bull. de math., 1973, t. 93, p. 253-258.
7. Connes A. On the spacial theory of von Neumann algebras. — J. Funct. Anal., 1980, v. 35, № 2, p. 153-164.
8. Haagerup U. Normal weights on W^* -algebras. — J. Funct. Anal., 1975, v. 19, № 3, p. 302-317.
9. Haagerup U. Operator-valued weights in von Neumann algebras, I. — J. Funct. Anal., 1979, v. 32, № 2, p. 175-206.
10. Pedersen G.K., Takesaki M. The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. — Acta math., v. 130, № 1-2, p. 53-87.

Н.В. Трунов, А.Н. Шерстнев

ОБ УСЛОВНЫХ ОЖИДАНИЯХ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

Заметка непосредственно примыкает к работам авторов [2 и 3]. В ней продолжается исследование одного обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана, введенного в этих работах в связи с теорией некоммутативного пространства L_1 .

§ 1. Мы начнем со случая состояния. Пусть M — алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H , φ — точное нормальное состояние на M . В терминологии и обозначениях, касающихся теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых билинейных форм (б.ф.) на линейале состояния

$$D_\varphi = \{ f \in H \mid \exists \lambda > 0 : (xf, f) \leq \lambda \varphi(x), \forall x \in M^+ \},$$

мы будем придерживаться работ [2 и 3]. В частности, условимся не различать оператор $x \in \mathcal{M}$ и порожденную им интегрируемую б.ф. $(x(\cdot), (\cdot))$ на \mathcal{D}_φ . Пусть \mathcal{N} - подалгебра Неймана алгебры \mathcal{M} , $\varphi_0 = \varphi \upharpoonright \mathcal{N}$ - ограничение φ на \mathcal{N} , $\gamma: L_1(\varphi) \rightarrow \mathcal{M}_*$ и $\gamma_0: L_1(\varphi_0) \rightarrow \mathcal{N}_*$ - канонические изоморфизмы.

Напомним следующий результат (см. [2], предложение 6), являющийся простым следствием теории пространства $L_1(\varphi)$. При данных предположениях существует и однозначно определено условием

$$\gamma(a)(x) = \gamma_0(Ea)(x) \quad (x \in \mathcal{N}, a \in L_1(\varphi)) \quad (1)$$

отображение $E: L_1(\varphi) \rightarrow L_1(\varphi_0)$, обладающее следующими свойствами:

- E1. E - линейная сюръекция,
- E2. E - положительно и точно,
- E3. $\|E\| = 1$,
- E4. $\varphi_0(Ea) = \varphi(a) \quad (a \in L_1(\varphi))$,
- E5. Если $a_n \uparrow a$ в $L_1^+(\varphi)$, то $Ea_n \uparrow Ea$, где символ $a_n \uparrow a$ означает, что последовательность a_n не убывает и $\sup a_n = a \in L_1^+(\varphi)$ в смысле порядка, задаваемого конусом $L_1^+(\varphi)$.

Основной результат работы [2] (теорема 11) утверждает, что дополнительное требование

$$Ex = x \quad (x \in \mathcal{M}) \quad (2)$$

(аналог идемпотентности E) эквивалентно существованию обычного (ограниченного) условного ожидания $\varepsilon: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ относительно φ в смысле [1 и 6], причем ограничение E на \mathcal{M} совпадает с ε .

С целью обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана займемся изучением ограничения $\varepsilon = E \upharpoonright \mathcal{M}$ отображения E , определенного условием (1), на алгебру \mathcal{M} . Отметим, что в классической (коммутативной) теории вероятностей условное ожидание в L_∞ вводится, как правило, именно таким способом.

Т е о р е м а 1. Отображение $\mathcal{E} = E \wedge M$ действует из M в N и обладает следующими свойствами:

- Э1. \mathcal{E} - линейное отображение, $\mathcal{E}(1) = 1$,
- Э2. \mathcal{E} - положительно и точно,
- Э3. $\|\mathcal{E}\| = 1$, т.е. $\|\mathcal{E}x\| \leq \|x\|$ ($x \in M$),
- Э4. $\varphi_0(\mathcal{E}x) = \varphi(x)$ ($x \in M$),
- Э5. \mathcal{E} - ультраслабо непрерывно,
- Э6. $\gamma(\mathcal{E}x)(y) = \gamma(x)(\mathcal{E}y)$ ($x, y \in M$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для проверки включения $\mathcal{E}(M) \subset N$ достаточно установить, что $\mathcal{E}x \in N$ для каждого $x \in M^{\exists}$. С этой целью определим вещественный линейный функционал ω на плотном в N^{\exists} линейале $\gamma_0(N^{\exists})$, полагая $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(\mathcal{E}x)(y)$ ($y \in N^{\exists}$). Тогда

$$|\omega(\gamma_0(y))| = |\gamma_0(\mathcal{E}x)(y)| = |\gamma(x)(y)| = |\gamma(y)(x)| \leq \\ \leq \|\gamma(y)\| \cdot \|x\| = \|y\|_{\varphi} \cdot \|x\| \leq \|y\|_{\varphi_0} \cdot \|x\| = \|\gamma_0(y)\| \cdot \|x\|.$$

В этой выкладке мы воспользовались тем, что

$\|\gamma(z)\| = \|z\|_{\varphi} = \inf \{ \varphi(z_1 + z_2) \mid z = z_1 - z_2, z_1, z_2 \in M^+ \}$ ($z \in M$) (см. [2]). В таком случае найдется $x_0 \in N^{\exists}$ такой, что $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(y)(x_0)$ для всех $y \in N^{\exists}$. Сравнивая с (1), имеем $\mathcal{E}x = x_0 \in N^{\exists}$.

Пусть далее $(\mathcal{K}, \mathcal{Y})$ - представление M , ассоциированное с φ , $\wedge: M \rightarrow \mathcal{Y}$ - тождественное вложение M в гильбертово пространство \mathcal{Y} , являющееся пополнением \hat{M} относительно скалярного произведения $(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi(y^*x)$, \mathcal{J} - каноническая инволюция теории Томита-Тakesаки в \mathcal{Y} (напомним, что $\mathcal{J}\mathcal{K}(M) = \mathcal{K}(M)'$). Условимся нулевым индексом отмечать соответствующие объекты, связанные с N и $\varphi_0: \mathcal{K}_0, \mathcal{Y}_0, \mathcal{J}_0$ и т.д. Пусть ρ - ортогональный проектор \mathcal{Y} на $\mathcal{Y}_0 = \overline{N}$. Следующая выкладка справедлива для любых $x \in M, y, z \in N$ в силу определения γ [2, 3]:

$$(\mathcal{J}\mathcal{K}(x)^* \mathcal{J} \hat{z}, \hat{y}) = \gamma(x)(y^*z) = \\ = \gamma_0(\mathcal{E}x)(y^*z) = (\mathcal{J}_0 \mathcal{K}_0(\mathcal{E}x)^* \mathcal{J}_0 \hat{z}, \hat{y}).$$

Отсюда следует, что ограничение на y_0

$$(\rho \mathcal{J} \mathcal{K}(x) \mathcal{J}) \uparrow y_0 = \mathcal{J}_0 \mathcal{K}_0 (\mathcal{E} x) \mathcal{J}_0,$$

так что явное выражение \mathcal{E} задается формулой

$$\mathcal{E} x = \mathcal{K}_0^{-1} (\mathcal{J}_0 (\rho \mathcal{J} \mathcal{K}(x) \mathcal{J}) \uparrow y_0) \mathcal{J}_0 \quad (x \in M). \quad (3)$$

Свойства $\mathcal{E}1$, $\mathcal{E}2$, $\mathcal{E}4$ непосредственно следуют из $\mathcal{E}1$, $\mathcal{E}2$ и $\mathcal{E}4$ соответственно, с учетом того, что $\gamma(1) = \varphi$; $\gamma_0(1) = \varphi_0$; $\mathcal{E}3$ есть прямое следствие представления (3); $\mathcal{E}6$ следует из симметричности формы $\gamma(\cdot)(\cdot)$ на M . Для проверки $\mathcal{E}5$ покажем сначала, что \mathcal{E} нормально, т.е. из $x_i \uparrow x$ ($x_i, x \in M^+$) следует, что $\mathcal{E} x_i \uparrow \mathcal{E} x$. Действительно, в силу положительности \mathcal{E} сеть $\mathcal{E} x_i$ возрастает и ограничена сверху оператором $\mathcal{E} x \in N^+$. Полагая $x_0 = \sup \mathcal{E} x_i$, имеем

$$\begin{aligned} \gamma(x)(y) &= \gamma(y)(x) = \sup_i \gamma(y)(x_i) = \sup_i \gamma_0(\mathcal{E} x_i)(y) = \\ &= \sup_i \gamma_0(y)(\mathcal{E} x_i) = \gamma_0(y)(x_0) = \gamma_0(x_0)(y) \quad (y \in N^+), \end{aligned}$$

откуда $x_0 = \mathcal{E} x$. Заметим теперь, что в силу нормальности \mathcal{E} для каждого $\rho \in M_*^+$ функционал $\rho(\mathcal{E} \cdot)$ на M положителен и нормален, а это немедленно влечет $\mathcal{E}5$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что доказательство включения $\mathcal{E}(M) \subset N$ фактически уже содержится в [2] (см. доказательство импликации (i) \Rightarrow (ii) в теореме II указанной работы). Интересно отметить, что в работе Л. Аккарди и К. Чеккини [4], где также рассматривалась задача обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана, соответствующее понятие вводится, исходя из достаточно отдаленной аналогии с классической ситуацией. Однако сравнение формул (3.18) и (3.20) работы [4] и нашего равенства (3) показывает, что отображение $\mathcal{E}: M \rightarrow N$ и есть φ - условное ожидание в смысле [4]. Отметим, в частности, что \mathcal{E} вполне положительно (это сразу следует, например, из (3)).

З а м е ч а н и е 2. При подготовке рукописи к печати авторам стала известна работа Л. Аккарди и К. Чеккини [5], где

получены близкие к нашим результаты. Отметим, что в [5] используется вложение \mathcal{M} в \mathcal{M}_* , которое в наших обозначениях есть $x \rightarrow \bar{\gamma}(x^*)$.

§ 2. Переходя к случаю веса, будем придерживаться обозначений и терминологии [3]. Пусть \mathcal{N} - подалгебра Неймана алгебры \mathcal{M} , φ - точный нормальный полуконечный вес на \mathcal{M} такой, что вес $\varphi_0 = \varphi \upharpoonright \mathcal{N}$ полуконечен, $m_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$, m_φ - линейная оболочка m_φ^+ ; $m_{\varphi_0}^+$ и m_{φ_0} - соответствующие объекты для φ_0 . Через

$E: L_1(\varphi) \rightarrow L_1(\varphi_0)$ обозначим, как и в § 1, отображение, однозначно определяемое условием (1). В работе [3] (предложение 4) показано, что отображение E удовлетворяет условиям E1-E4 и в этом случае. Однако, поскольку в данном случае алгебра \mathcal{M} уже не обязана входить целиком в $L_1(\varphi)$, то для определения отображения $\xi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ мы воспользуемся приемом, применявшимся при доказательстве теоремы 1.

Т е о р е м а 2. Существует и однозначно определено условием

$$\gamma(y)(x) = \gamma_0(y)(\xi x) \quad (y \in m_{\varphi_0}) \quad (4)$$

отображение $\xi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, обладающее следующими свойствами:

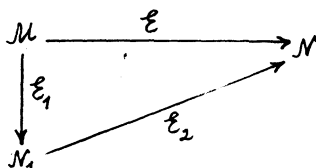
- ξ1. ξ - линейное отображение, $\xi(1) = 1$,
- ξ2. ξ - положительно и точно,
- ξ3. $\|\xi\| = 1$, т.е. $\|\xi x\| \leq \|x\|$ ($x \in \mathcal{M}$),
- ξ4. $\varphi_0(\xi x) = \varphi(x)$ ($x \in m_\varphi^+$),
- ξ5. ξ ультраслабонепрерывно,
- ξ6. $\gamma(\xi x)(y) = \gamma(x)(\xi y)$ ($x, y \in m_\varphi$),
- ξ7. $\xi x = E x$ ($x \in m_\varphi$).

Д о к а з а т е л ь с т в о с очевидными изменениями, касающимися использования m_φ и m_{φ_0} вместо \mathcal{M} и \mathcal{N} , дословно повторяет доказательство теоремы 1. При этом явное выражение (3) для ξ остается, очевидно, верным и в данном случае.

З а м е ч а н и е 3 (ср. [3], замечание на с. 89).

Пусть \mathcal{N}_1 - еще одна подалгебра Неймана алгебры \mathcal{M} такая, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}$, и пусть вес $\varphi_1 = \varphi \upharpoonright \mathcal{N}_1$ полуконечен. Для отображений ξ , ξ_1 и ξ_2 , определенных в теореме 2,

коммутативна следующая диаграмма:



Это свойство транзитивности непосредственно следует из определения отображения ε .

З а м е ч а н и е 4. Отображение ε , построенное в теореме 2, совпадает с φ - условным ожиданием в смысле [4] (теорема 7.5) и, в частности, вполне положительно. Отметим, что переход от состояния к весу в [4] сводится к использованию явного соотношения типа (3), причем лишь для $x \in m_\varphi$, с последующим продолжением по непрерывности на все $x \in M$. Таким образом, теорема 2 в связи с результатами [3] дает некоторую дополнительную информацию о φ - условных ожиданиях по сравнению с [4].

§ 3. В качестве приложения теоремы 2 мы предложим новые доказательства теоремы 5 из [4] о связи между отображением ε и ограниченным условным ожиданием, а также критерия М. Таке - саки [6] существования ограниченного условного ожидания в терминах модулярной группы, ассоциированной с весом. Сохраняя обозначения § 2, будем через $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (соответственно, $(G_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}}$) обозначать группу модулярных автоморфизмов M (соответственно N), ассоциированную с φ (соответственно φ_0).

Напомним, что ограниченным условным ожиданием относительно веса φ называется отображение $\varepsilon: M \rightarrow N$ (необходимо единственно, см. [3]) такое, что

Э1. ε - линейная сюръекция, $\varepsilon 1 = 1$,

Э2. ε положительно и точно,

Э3. $\|\varepsilon\| = 1$,

Э4. $\varphi_0(\varepsilon(x)) = \varphi(x) \quad (x \in m_\varphi^+)$,

Э5. ε ультраслабонепрерывно.

Т е о р е м а 3 ([3], теорема 5; [6]). Пусть N - подалгебра Неймана алгебры M , φ - точный нормальный

полуконачный вес на \mathcal{M} и вес $\varphi_0 = \varphi \upharpoonright \mathcal{M}$ полуконачен. Тогда эквивалентны следующие условия:

$$(i) \quad E x = x \quad (x \in m_{\varphi_0}),$$

$$(ii) \quad \xi x = x \quad (x \in \mathcal{N}),$$

(iii) существует ограниченное условное ожидание $\varepsilon: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ относительно φ ,

$$(iv) \quad \text{подалгебра } \mathcal{N} \text{ инвариантна относительно } (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}.$$

При выполнении этих условий отображение ξ — ограниченное условное ожидание относительно φ .

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (ii) следует из $\xi 5$, ξ' и ультраслабой плотности m_{φ_0} в \mathcal{N} .

Импликация (ii) \Rightarrow (iii) очевидна в силу теоремы 2.

Несложная проверка импликации (iii) \Rightarrow (iv) фактически содержится в [3, с. 92 – 93]. Действительно, пусть S (соответственно S_0) — замыкание антилинейного отображения $x \rightarrow \hat{x}^*$ ($x \in m_{\varphi}$) в \mathcal{Y} (соответственно отображения $x \rightarrow \hat{x}^*$ ($x \in m_{\varphi_0}$) в \mathcal{Y}_0) и $S = \mathcal{J} \Delta^{1/2}$, $S_0 = \mathcal{J}_0 \Delta_0^{1/2}$ — их полярные разложения. Тогда, как показано в [3] (равенство (12)), $\rho \hat{x} = \widehat{\varepsilon(x)}$ для каждого $x \in m_{\varphi}$ (напомним, что ρ — ортопроектор на подпространство \mathcal{Y}_0). Поскольку $\varepsilon(x^*) = \varepsilon(x)^*$ ($x \in \mathcal{M}$), то $S_0 = S \upharpoonright \mathcal{Y}_0$, так что ρ коммутирует с Δ и $\Delta \rho = \Delta_0 \rho$. Остается воспользоваться известными соотношениями теории Томита–Такесаки:

$$\widehat{\sigma_t(x)} = \Delta^{it} \hat{x} \quad (x \in m_{\varphi}), \quad \widehat{\sigma_t^0(x)} = \Delta_0^{it} \hat{x} \quad (x \in m_{\varphi_0}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Наконец, для проверки импликации (iv) \Rightarrow (i) заметим, что в силу единственности однопараметрической ультраслабо непрерывной группы автоморфизмов алгебра Неймана \mathcal{N} , удовлетворяющей условию К.М.Ш. относительно точного нормального полуконачного веса φ_0 , справедливо равенство $\sigma_t \upharpoonright \mathcal{N} = \sigma_t^0$ ($t \in \mathbb{R}$). Тогда из (5) следует, что Δ коммутирует с ρ и $\Delta \rho = \Delta_0 \rho$. В таком случае из (3) следует, что для любых $x, y \in m_{\varphi}$

$$\begin{aligned} \pi_0(y) \Delta_0^{1/2} (\widehat{\xi x}) &= \mathcal{J}_0 \pi_0(\xi x)^* \mathcal{J}_0 \hat{y} = \mathcal{J} \pi(x)^* \mathcal{J} \hat{y} = \\ &= \pi(y) \Delta^{1/2} \hat{x} = \pi_0(y) \Delta_0^{1/2} \hat{x}. \end{aligned}$$

Устремляя в этом равенстве сеть $y \in m_{\varphi_0}$ ультраслабо к 1, получим $\Delta_0^{1/2}(\widehat{\mathcal{E}x}) = \Delta_0^{1/2}\widehat{x}$, откуда в силу несингулярности $\Delta_0^{1/2}\widehat{\mathcal{E}x} = \widehat{x}$, т.е. $\mathcal{E}x = x$ ($x \in m_{\varphi_0}$). Остается учесть условие $\mathcal{E}7$. Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Голодец В.Я. Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр. — *Функциональный анализ и его приложения*, 1972, т.6, № 3, с. 68 — 69.

2. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. Условные ожидания в одной схеме некоммутативной теории вероятностей. — *In: Trans. 8th Prague Conf. Inform. Theory, Stat. Decis. Funct., Rand. Process.*, vol. 8, Prague, 1978, p. 287—299.

3. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I, II. — *Изв. вузов. Матем.*, 1978, № 8, с. 79 — 88; № 12, с. 88 — 98.

4. Accardi L., Cecchini C. Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki. — *J. Funct. Anal.*, 1982, v. 45, № 2, p. 245—273.

5. Accardi L., Cecchini C. Surjectivity of the conditional expectations on the L^1 -spaces. — *Publ. Ist. math. Univ. Genova*, 1982, № 413, 7 p.

6. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras. — *J. Funct. Anal.*, 1972, v. 9, № 3, p. 306—321.