A. S. Tikhonov, Functional model and duality of spectral components of operators with continuous spectrum on a curve,
Algebra i Analiz, 2002, Volume 14, Issue 4, 158–195

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 4

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ НА КРИВОЙ

© А. С. Тихонов

§0. Введение

Одним из мощных средств для изучения линейных операторов является построение их моделей. Обычно от модели требуется, чтобы модельный оператор по возможности задавался в некотором функциональном пространстве, имел простой вид и был унитарно (или линейно) подобен исходному оператору. Работа с модельными объектами делает проблемы более наглядными, решение их более прозрачным и зачастую сводит нетривиальные доказательства к простым вычислениям. Примерами являются жорданово представление в конечномерном случае, спектральная теорема для нормальных операторов в гильбертовом пространстве, модель С.-Надя–Фояша для сжатий и т.д. (см., например, [1, 2], где можно найти интересное обсуждение этого вопроса и дальнейшие ссылки). В качестве мотивировки нашей дальнейшей деятельности немного подробнее остановимся на спектральной теореме и модели С.-Надя–Фояша.

Пусть H — гильбертово пространство, T — нормальный оператор, действующий в H, т.е. $T^*T = TT^*$. Если T имеет простой спектр, то на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ найдется борелевская мера μ с носителем, содержащимся в спектре $\sigma(T)$, такая, что T унитарно эквивалентен оператору $\widehat{T}$ умножения на независимую переменную $f(z) \mapsto zf(z)$ в пространстве $L^2(\mu)$. Другими словами, существует унитарный оператор $W : H \mapsto L^2(\mu)$ такой, что $WT = \widehat{T}W$. Если убрать условие простоты спектра, то утверждение теоремы сохраняется ценой небольшого усложнения: необходимо заменить пространство $L^2(\mu)$ на прямой интеграл $\widehat{H} = \int_{\sigma(T)} \oplus H(z)d\mu(z)$ гильбертовых пространств $H(z)$. В случае, если оператор T унитарный или самосопряженный, спектр $\sigma(T)$ есть подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$ или вещественной прямой. Рассматривая чуть более общую ситуацию $\sigma(T) \subset C$, где C

Ключевые слова: спектральная компонента, спектр, функциональная модель.

есть спрямляемая кривая, мы имеем разложение меры $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной мер относительно меры, соответствующей длине дуги. Разложению меры соответствует разложение пространства $\widehat{H} = H_{ac}(\widehat{T}) \oplus H_{sing}(\widehat{T}^*)$, где $H_{ac}(\widehat{T}) = H_{ac}(\widehat{T}^*) = \int_{\sigma(T)} \oplus H(z) d\mu_{ac}(z)$, $H_{sing}(\widehat{T}) = H_{sing}(\widehat{T}^*) = \int_{\sigma(T)} \oplus H(z) d\mu_s(z)$. Эти подпространства являются инвариантными для операторов $\widehat{T}$ и $\widehat{T}^*$. Отметим, что $H_{sing}(T)$ имеет и другое описание (в терминах граничных значений резольвенты извне и изнутри контура C):

$$H_{sing}(T) = \{f \in H : \forall g \in H ((T-z)^{-1} f, g)_+ = ((T-z)^{-1} f, g)_- \text{ п.в. } z \in C\}.$$

Эффективным инструментом для получения этого описания являетя, кстати, функциональная модель.

Перейдем теперь к функциональной модели С.-Надя–Фояша [3]. Мы используем диалект такой модели из [1]. Пусть $\mathfrak{N}$, $\mathcal{H}$ — гильбертовы пространства и пусть отображения $\pi_\pm : L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{N}) \mapsto \mathcal{H}$ удовлетворяют условиям

(i) $\pi_\pm^* \pi_\pm = I$;

$(\mathrm{ii})_1$ $(\pi_-^* \pi_+) z = z(\pi_-^* \pi_+)$; $\quad$ $(\mathrm{ii})_2$ $P_- \pi_-^* \pi_+ P_+ = 0$;

(iii) $\operatorname{Ran} \pi_+ \vee \operatorname{Ran} \pi_- = \mathcal{H}$.

Здесь P_+ есть ортопроектор на класс Харди $H^2(\mathfrak{N}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{N}) : \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n < 0\}$, P_- — ортопроектор на ортогональное дополнение $H^2_-(\mathfrak{N}) = L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{N}) \ominus H^2(\mathfrak{N})$. Как известно, функции из $H^2(\mathfrak{N})$ и $H^2_-(\mathfrak{N})$ являются граничными значениями функций, являющихся аналитическими внутри и во внешности единичного круга соответственно. Тогда в пространстве $\mathcal{H}$ можно определить подпространство $\mathcal{K}_\Theta = \{f \in \mathcal{H} : P_+ \pi_+^* f = 0, P_- \pi_-^* f = 0\}$ и оператор $\widehat{T} : \mathcal{K}_\Theta \mapsto \mathcal{K}_\Theta$, действующий по правилу $\widehat{T} f = Uf - \pi_+(\pi_+^* U f)(\infty)$, $f \in \mathcal{K}_\Theta$, где U — унитарный оператор в $\mathcal{H}$, однозначно определяемый соотношениями $U \pi_\pm = \pi_\pm z$. Оператор $\widehat{T}$ является сжатием, т.е. $\|\widehat{T}\| \leqslant 1$. Замечательным является результат С.-Надя–Фояша, состоящий в том, что для любого вполне неунитарного сжатия T, действующего в гильбертовом пространстве H, существует унитарно эквивалентная модель $\widehat{T}$ указанного выше типа. Универсальность модели С.-Надя–Фояша вытекает из того факта, что любое сжатие представимо (однозначным образом) в виде прямой суммы $T = T_{cnu} \oplus T_u$ вполне неунитарной и унитарной частей оператора T. Сжимающий оператор T называется вполне неунитарным, если для него не существует инвариантного подпространства H_1 такого, что T индуцирует унитарный оператор в

H_1. Для сжимающего оператора T мы можем определить подпространства [3] $H_{0\cdot}(T) = \{f \in H : T^n \to 0\}$ и $H_{\cdot 1}(T) = H_{0\cdot}(T^*)^{\perp}$. Нетрудно видеть, что эти подпространства являются инвариантными для оператора T. В случае, если T является слабым вполне неунитарным сжатием (т.е. $\mathrm{Tr}(I - T^*T) < \infty$ и существует T^{-1}), эти подпространства допускают и другие описания. Так, например, для $H_{0\cdot}(T)$ имеем

$$H_{0\cdot}(T) = \{f \in H : \forall g \in H((T-z)^{-1}f, g)_+ = ((T-z)^{-1}f, g)_- \text{ п.в. } z \in \mathbb{T}\},$$

а $H_{\cdot 1}(T)$ есть максимальное инвариантное подпространство, на котором оператор T в некотором обобщенном смысле подобен унитарному оператору с абсолютно непрерывным спектром (точнее слово здесь квазиподобен). Отметим, что и в этом случае имеет место разложение $H = H_{0\cdot}(T) \oplus H_{\cdot 1}(T^*)$.

Основной объект изучения в данной работе — это операторы, у которых непрерывный спектр лежит на гладкой кривой. Существует по крайней мере три источника появления операторов со спектром на кривой: 1) дифференциальные операторы, у которых символ является невещественным многочленом; такого рода операторы возникают в некоторых задачах математической физики (обратная задача теории рассеяния, рассеяние на броуновской частице и т.д.); 2) периодический несамосопряженный оператор Штурма–Лиувилля; 3) сингулярный интегральный оператор Коши.

В качестве первого шага в изучении операторов со спектром на кривой мы распространим конструкцию модели С.-Надя–Фояша со случая единичной окружности на случай замкнутого контура C. В связи с этим мы будем рассматривать отображения $\pi_\pm : L^2(C, \mathfrak{N}) \mapsto \mathcal{H}$. Простейшим вариантом такого обобщения могло бы быть сохранение условий (i)–(iii), понимая в них $P_\pm$ — как проекторы (уже неортогональные) на классы Смирнова, которые являются естественным обобщением классов Харди на случай замкнутой кривой. Однако нам необходим более слабый вариант условия (i). Предлагаемый в работе вариант аксиом выглядит следующим образом:

(i)$_1$ $\forall \psi \in L^\infty(C, [\mathfrak{N}])$ $(\pi_\pm^* \pi_\pm)\psi = \psi(\pi_\pm^* \pi_\pm)$; (i)$_2$ $(\pi_\pm^* \pi_\pm)^{-1} \in [L^2(C, \mathfrak{N})]$;

(ii)$_1$ $(\pi_-^\dagger \pi_+)z = z(\pi_-^\dagger \pi_+)$; (ii)$_2$ $P_-(\pi_-^\dagger \pi_+)P_+ = 0$;

(iii) $\operatorname{Ran} \pi_+ \vee \operatorname{Ran} \pi_- = \mathcal{H}$.

Здесь $\pi_-^\dagger$ есть оператор, обратный к π_- в смысле Мура–Пенроуза. Заметим, что если $\pi_\pm^* \pi_\pm = I$, то условия (i)$_1$ и (i)$_2$ выполняются и $\pi_\pm^\dagger = \pi_\pm^*$. Совершенно аналогично случаю модели С.-Надя–Фояша определяются подпространство

$\mathcal{K}_\Theta = \{f \in \mathcal{H} : P_+\pi_+^\dagger f = 0,\ P_-\pi_-^\dagger f = 0\}$ и оператор $\widehat{T}f = Uf - \pi_+(\pi_+^\dagger Uf)(\infty)$, $f \in \mathcal{K}_\Theta$.

В рамках функциональной модели можно изучать задачу о возмущении модельного оператора. Плодотворность такого подхода для теории несамосопряженных операторов продемонстрирована в работах Набоко [4, 5] (см. также [6], где можно найти ссылки на другие работы в этом направлении). В данной работе мы рассматриваем возмущения следующего вида: $\widehat{S} = \widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M}$, где $\widehat{M} : \mathcal{K}_\Theta \mapsto \mathfrak{N}$, $\varkappa : \mathfrak{N} \mapsto \mathfrak{N}$, $\widehat{N} : \mathfrak{N} \mapsto \mathcal{K}_\Theta$, $\widehat{M}f = (\pi_+^\dagger Uf)(\infty)$, $f \in \mathcal{K}_\Theta$, $\widehat{N}n = \pi_- n - \pi_+ P_+\pi_+^\dagger \pi_- n$, $n \in \mathfrak{N}$. Такого рода возмущения являются линейно-подобными моделями для весьма широкого класса операторов. А именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости $C^{4+\varepsilon}$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\rho(S) \cap \operatorname{int} C \neq \varnothing$. Тогда существуют отображения $\pi_\pm$, удовлетворяющие условиям* (i), (ii), (iii) *и обратимый оператор $W : H \mapsto \mathcal{K}_\Theta$ такие, что $WS = \widehat{S}W$. Здесь $\mathfrak{S}_1$ есть класс ядерных операторов.*

Эта теорема является непосредственным следствием теорем A и B, формулировки которых (с необходимой детализацией) можно найти в основном тексте работы.

Полученные результаты о модели применяются к задаче о двойственности спектральных компонент. Приведем здесь постановку задачи. Однако сначала поясним, что мы понимаем под спектральной компонентой. Во-первых, с образцами некоторых из них мы уже знакомы. Это H_{ac}, H_{sing}, $H_{0\cdot}$, $H_{\cdot 1}$. Во-вторых, отметим, что спектральные компоненты являются экстремальными инвариантными подпространствами, на которых оператор обладает тем или иным поведением (свойством). Здесь возможны различные описания. Например, абсолютно непрерывное подпространство $N(S)$ можно характеризовать, с одной стороны, как минимальное инвариантное подпространство, содержащее все инвариантные подпространства, на которых оператор S индуцирует операторы, подобные нормальному с абсолютно непрерывным спектром. С другой стороны, для $N(S)$ справедливо описание как максимального инвариантного подпространства, на котором оператор S индуцирует оператор, являющийся деформацией нормального оператора с абсолютно непрерывным спектром (т.е. $\exists X$: $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{Ker} X^* = \{0\}$ и нормальный оператор U с абсолютно непрерывным спектром такие, что $SX = XU$). В случае, если оператор S является близким к унитарному, спектральные компоненты $N_\pm(S)$ могут быть описаны как максимальные инвариантные подпространства, на которых оператор S индуцирует операторы, являющиеся деформациями сжимающего (растягивающего) операторов.

Дадим теперь формальные определения. Пусть C — простая замкнутая ориентированная гладкая кривая, G_+ — область, лежащая слева от контура C, G_- — справа. Пусть $S \in [H]$ — ограниченный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, такой, что $\sigma_c(S) \subset C$. Основными строительными „кирпичиками" являются следующие (максимальные) линеалы:

$$\widetilde{M}(S) = \{f \in H : \forall g \in H\ ((S-z)^{-1}f, g)_+ = ((S-z)^{-1}f, g)_-, z \in C\};$$
$$\widetilde{N}_\pm(S) = \{f \in H : \forall g \in H\ ((S-z)^{-1}f, g)_\pm \in E^2(G_\pm)\};$$
$$\widetilde{D}_\pm(S) = \{f \in H : \forall g \in H\ ((S-z)^{-1}f, g)_\pm \in D(G_\pm)\},$$

где $((S-z)^{-1}f,g)_\pm$ — угловые граничные значения для $((S-z)^{-1}f,g)$ из $G_\pm$, $E^2(G_\pm)$ — класс Харди–Смирнова, $D(G_\pm)$ — класс Неванлинны–Смирнова. Отметим, что $\widetilde{N}_\pm(S) \subset \widetilde{D}_\pm(S)$. Рассматриваются различные комбинации этих линеалов:

$$\widetilde{N}(S) = \widetilde{N}_+(S) \cap \widetilde{N}_-(S),$$
$$\widetilde{NM}_\pm(S) = \widetilde{N}_\pm(S) \cap \widetilde{M}(S),$$
$$\widetilde{DM}_\pm(S) = \widetilde{D}_\pm(S) \cap \widetilde{M}(S),$$
$$\widetilde{M}_s(S) = \widetilde{D}_-(S) \cap \widetilde{M}(S) \cap \widetilde{D}_+(S).$$

Замыкание соответствующего линеала будем называть (слабой) спектральной компонентой для оператора S, например, $N(S) = \operatorname{clos} \widetilde{N}(S)$. Используются следующие названия для них:

$N(S)$ — абсолютно непрерывное,	$M(S)$ — сингулярное,
$N_\pm(S)$ — $A_\pm$-регулярное,	$DM_\pm(S)$ — $A_\pm$-сингулярное,
$N_+(S) \vee N_-(S)$ — A-регулярное,	$M_s(S)$ — A-сингулярное,
$NM_\pm(S)$ — внутреннее$_\pm$,	$D_\pm(S)$ — внешнее$_\pm$

подпространства.

С целью лучшего понимания характера этих компонент приведем их описание для различных подклассов операторов. Пусть $K_\lambda(S) = \bigcup_{n>0} \operatorname{Ker}(S-\lambda)^n$ — корневое подпространство оператора S. Отметим, что всегда $K_\lambda(S) \subset NM_\pm(S)$, если $\lambda \in G_\mp$, и $K_\lambda(S) \subset M_s(S)$, если $\lambda \in C$.

Для конечномерных операторов непрерывный спектр отсутствует, а остальные спектральные компоненты допускают описание в терминах геометрии расположения спектра на комплексной плоскости. Это — линейные оболочки корневых подпространств, соответствующих точкам спектра, расположенным в открытых (замкнутых) областях $G_\pm$. Точнее, имеем

$$M(S) = H, \quad N(S) = \{0\}, \quad D_\pm(S) = DM_\pm(S) = \vee_{\lambda\in\sigma(S)\setminus G_\pm} K_\lambda(S),$$
$$N_\pm(S) = NM_\pm(S) = \vee_{\lambda\in\sigma(S)\cap G_\mp} K_\lambda(S), \quad M_s(S) = \vee_{\lambda\in\sigma(S)\cap C} K_\lambda(S),$$

Если S является нормальным оператором и $\sigma(S) \subset C$, то имеем два нетривиальных подпространства $N(S) = H_{\rm ac}(S)$, $M_s(S) = H_{\rm sing}(S)$. Точнее,

$$D_\pm(S) = H, \quad N_\pm(S) = N(S) = H_{\rm ac}(S),$$
$$M(S) = DM_\pm(S) = M_s(S) = H_{\rm sing}(S), \quad NM_\pm(S) = \{0\}.$$

Если же оператор S является слабым вполне неунитарным сжатием, то нетривиальными спектральными компонентами в этом случае являются $N(S) = H_{\cdot 1}(S)$, $M(S) = H_{0\cdot}(S)$. Более точно,

$$D_-(S) = N_-(S) = H, \quad N(S) = N_+(S) = D_+(S) = H_{11}(S),$$
$$NM_-(S) = DM_-(S) = M(S) = H_{00}(S), \quad M_s(S) = NM_+(S) = DM_+(S) = \{0\}.$$

Здесь $S|H_{11}$ есть C_{11} часть оператора S, $S|H_{00}$ есть C_{00} часть оператора S [3] (см. также [7, 8]). Если $S = \varphi(T)$ является функцией от слабого вполне неунитарного сжатия T, где $\varphi \in CM(\mathbb{D}, \varphi(\mathbb{D}))$ — конформное отображение единичного круга, то все равенства сохраняются. Необходимо только использовать $H_{00}(T)$ и $H_{11}(T)$ вместо $H_{00}(S)$ и $H_{11}(S)$.

По поводу приведенных выше фактов для случая круга и полуплоскости см. [9, 10]. Спектральные компоненты для недиссипативных операторов в терминах функциональной модели были введены в [4]. Слабые описания спектральных компонент для операторов, близких к унитарным, были найдены несколько позднее [6, 10, 11].

Перейдем теперь собственно к постановке задачи о дуальности спектральных компонент. Нетрудно установить (см. предложение 4.7), что

$$N(S) \perp M(S^*), \quad N_\pm(S) \perp DM_\mp(S^*), \quad NM_\pm(S) \perp D_\mp(S^*),$$

где спектральные компоненты для оператора S^* определены относительно кривой $\overline{C}$ (область $G_{*+} = \overline{G}_+$ лежит слева от кривой $\overline{C}$, $G_{*-} = \overline{G}_-$ — справа). В конечномерном случае по существу все сводится к тривиальной импликации

$$f \in \operatorname{Ker}(S - \lambda), \; g \in \operatorname{Ker}(S^* - \mu), \; \lambda \neq \overline{\mu} \implies f \perp g.$$

В связи с этим возникает вопрос: справедливы ли следующие равенства:

$$N(S)^{\perp} = M(S^*), \quad N_{\pm}(S)^{\perp} = DM_{\mp}(S^*), \quad NM_{\pm}(S)^{\perp} = D_{\mp}(S^*)?$$

В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос в случае, если кривая имеет гладкость $C^{4+\varepsilon}$ и оператор S есть ядерное возмущение нормального оператора со спектром на этой кривой (см. теорему C).

Теорема С. *Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости $C^{4+\varepsilon}$, $U, S \in [H]$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$. Тогда* 1) $N(S)^{\perp} = M(S^*)$; 2) $N_{\pm}(S)^{\perp} = DM_{\mp}(S^*)$; 3) $NM_{\pm}(S)^{\perp} = D_{\mp}(S^*)$.

Почему этот вопрос может быть интересным? На наш взгляд, это обусловливается следующими двумя приложениями. Во-первых, это несамосопряженная теория рассеяния [5, 11–15]. Например, в работе [15] основным результатом является установление равенства $N(S)^{\perp} = M(S^*)$ для несамосопряженного оператора Шрёдингера. Во-вторых, это экстремальные факторизации для J-сжимающих оператор-функций (J-внешне-внутренняя, A-регулярно-сингулярная [16–18]), где отправным пунктом [19] при доказательстве теорем существования и единственности экстремальных факторизаций являются приведенные выше соотношения двойственности.

Отметим, что обе части работы (функциональная модель и двойственность спектральных компонент) носят вполне равноправный характер. Более того, стоит подчеркнуть значение союза „и“ в названии работы. На самом деле многие черты предложенной модели появились как средство преодоления трудностей при решении задачи о двойственности спектральных компонент. С другой стороны, именно общность конструкции функциональной модели для операторов со спектром на кривой служит хорошей основой для применения к конкретным задачам.

Остановимся более конкретно на содержании работы. В первой части работы конструкция модели С.-Надя–Фояша [3] обобщается на случай оператора $T = \varphi(T_0)$, являющегося функкией от вполне неунитарного сжатия T_0. Мы используем бескоординатную форму такой модели, разработанную в [6, 1]. Следствием этого подхода является то, что мы сразу получаем пространство „дилатации“ $\mathcal{H}$. Вводимый в работе (неортогональный) проектор P_{Θ} на подпространство K_{Θ} играет существенную роль в дальнейших построениях. Следует отметить, что в отличие от модели С.-Надя–Фояша в нашем случае присутствует некоторая асимметрия для приходящего и уходящего подпространств $D_{\pm}$. Кроме того, мы рассматриваем модель $\widehat{T}$ не только для оператора T, но и, как это делается в [20], для совокупности операторов (T, M, N), где

M и N — аналоги дефектных операторов. Мы приводим формулировку и довольно подробно обсуждаем теорему (см. теорему A), в которой утверждается, что для любого вполне неунитарного сжатия T_0 и функции $\varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+)$ существует функциональная модель для оператора $T = \varphi(T_0)$. Наряду с моделью для T мы рассматриваем модель для оператора T^*, модельное пространство для которого также является подпространством $\mathcal{H}$. Здесь мы имеем тот же самый тип двойственности, что и в работах [21, 22]. Модель, рассматриваемая в [22], является наиболее близкой к нашей. Отметим, что исторически модели для операторов, спектр которых связан с областями, ограниченными кривыми развивались в направлении от модели для оператора сдвига (см., например, [23]), через модели для теплицевых операторов [21], к линейно-подобной модели С.-Надя–Фояша [22].

Построение функциональной модели для функций от сжатий, если она предназначена только для исследования спектральных характеристик таких операторов, является (по мнению автора) малосодержательным занятием. Для этого достаточно обычной модели С.-Надя–Фояша. Однако если речь идет об изучении возмущений от таких операторов, то построенная в первой части модель становится весьма полезным инструментом. Во второй части работы мы, следуя [5, 6], строим функциональную модель для оператора $\widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M}$. Доказывается, что для произвольного ядерного возмущения нормального оператора со спектром на гладкой кривой существует линейно-подобная модель, указанного выше вида с $\widehat{M}$, $\widehat{N} \in \mathfrak{S}_2$ (см. теорему B).

В оставшихся двух частях мы применяем функциональную модель для решения задачи о двойственности спектральных компонент. В третьей части работы мы даем описания спектральных компонент для модели оператора $\widehat{S} = \widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M}$ (см. [4, 9, 6, 10] для случая круга и полуплоскости) и занимаемся вопросом о поднятии спектральных компонент в пространство „дилатации“ $\mathcal{H}$. Отметим, что сама возможность такого поднятия обусловлена структурой рассматриваемого возмущения. С точки зрения процедуры поднятия спектральные компоненты делятся на два класса: “intersection” и “compression”. К первому относятся $M(\widehat{S})$, $D_\pm(\widehat{S})$, $DM_\pm(\widehat{S})$, $M_s(\widehat{S})$. Они допускают представление $X(\widehat{S}) = X(\Pi, \varkappa) \cap \mathcal{K}_\Theta$, где $X(\Pi, \varkappa)$ — поднятие компоненты $X(\widehat{S})$ в пространство $\mathcal{H}$. Ко второму классу относятся $N(\widehat{S})$, $N_\pm(\widehat{S})$, $NM_\pm(\widehat{S})$, $N_+(\widehat{S}) \vee N_-(\widehat{S})$. Для них мы имеем $\widetilde{X}(\widehat{S}) = P_\Theta X(\Pi, \varkappa)$. Отметим, что несмотря на асимметрию приходящего и уходящего подпространств, мы имеем полную симметрию для описаний спектральныхк компонент оператора $\widehat{S}$.

В четвертой части работы мы устанавливаем двойственность для поднятых спектральных компонент из разных классов. На базе этой двойственности доказывается двойственность спектральных компонент для модельного оператора. Наконец, мы проверяем эквивалентность модельных и слабых описаний компонент и, таким образом, устанавливаем соотношения двойственности для последних.

В работе приняты следующие обозначения и соглашения. Через $\mathbb{D}$ обозначается единичный круг, $\mathbb{T}$ — единичная окружность, $\vee M$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества M, $\operatorname{clos} M$ — замыкание M. Все гильбертовы пространства предполагаются комплексными и сепарабельными. $[H_1, H_2]$ обозначает пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, $[H] = [H, H]$, $\mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$ есть класс операторов Гильберта–Шмидта, $\mathfrak{S}_1(H_1, H_2)$ — класс ядерных операторов. $\operatorname{Ker} A$ есть ядро оператора A, $\operatorname{Ran} A$ — множество значений оператора A, $A|H_1$ — сужение оператора на подпространство H_1, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, $\sigma(A)$ — спектр оператора A, $\sigma_c(A)$ — непрерывный спектр оператора A, состоящий из всех точек спектра, отличных от изолированных собственных значений конечной кратности. Если $A \in [H_1, H_2]$, $(A|(\operatorname{Ker} A)^{\perp})^{-1} \in [\operatorname{Ran} A, (\operatorname{Ker} A)^{\perp}]$, то через $A^{\dagger}$ обозначается оператор, обратный к A в смысле Мура–Пенроуза, где $A^{\dagger} f = (A|(\operatorname{Ker} A)^{\perp})^{-1} f$, $f \in \operatorname{Ran} A$ и $A^{\dagger} f = 0$, $f \perp \operatorname{Ran} A$.

Относительно кривой C будем предполагать, что она является ориентированной, простой, замкнутой, $C^{2+\varepsilon}$-гладкой, $\infty \notin C$. Через G_+ будем обозначать область, для которой кривая C является границей и которая лежит слева от C. Область, лежащую справа от C, обозначим G_-. Будем записывать факт, что $\varphi : G_1 \to G_2$ есть конформное отображение области G_1 на область G_2 в виде $\varphi \in CM(G_1, G_2)$. Обозначим через $L^2(C, \mathfrak{N})$ гильбертово пространство вектор-функций со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathfrak{N}$ и со скалярным произведением $(f, g)_{L^2} = 1/2\pi \int_C (f(z), g(z))_{\mathfrak{N}} |dz|$, где $|dz|$ — мера, соответствующая длине дуги. Если $\omega \subset C$, то $\operatorname{mes}(\omega) = \int\limits_{\omega} |dz|$. Обозначим через $E^2(G, \mathfrak{N})$ класс Харди–Смирнова [24, 25] аналитических в G вектор-функций со значениями в $\mathfrak{N}$. Как обычно, мы отождествляем функцию, аналитическую в области, с ее граничными значениями. Поэтому мы можем считать $E^2(G_\pm, \mathfrak{N}) \subset L^2(C, \mathfrak{N})$. Через $P_\pm$ будем обозначать проекторы, для которых $\operatorname{Ran} P_\pm = E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$, $\operatorname{Ker} P_\pm = E^2(G_\mp, \mathfrak{N})$. Определим также спаривание $\langle f, g \rangle = 1/2\pi i \int\limits_C (f(z), g(\overline{z}))_{\mathfrak{N}} dz$, $f \in L^2(C, \mathfrak{N})$, $g \in L^2(\overline{C}, \mathfrak{N})$. Отметим, что $E^2(G_\pm, \mathfrak{N})^{(\perp)} = E^2(\overline{G}_\pm, \mathfrak{N})$. Введем также операторы $\omega_\infty, \omega_0 \in [L^2(C, \mathfrak{N}), \mathfrak{N}]$, $\omega^0 \in [\mathfrak{N}, L^2(C, \mathfrak{N})]$, $\omega_\infty f = 1/2\pi i \int\limits_C f(z) dz$, $\omega_0 f = \omega_\infty((1/z) f(z))$, $\omega^0 n = n$.

Пусть $\mathcal{B}$ — вспомогательное банахово пространство (обычно $\mathcal{B} = \mathfrak{N}$ или $\mathcal{B} = [\mathfrak{N}]$). Пусть $\operatorname{Hol}(G, \mathcal{B})$ — пространство векторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}$ и аналитических в области G. $C^{n+\varepsilon}(\cdot, \mathcal{B})$ есть пространство n раз непрерывно-дифференцируемых функций, n-я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с параметром $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$
\begin{aligned}
A^{n+\varepsilon}(G,B) &= \mathrm{Hol}(G,B) \cap C^{n+\varepsilon}(\operatorname{clos} G, B);\\
B(G,B) &= \{f \subset \mathrm{Hol}(G,B) : \sup_{z\in G} \|f(z)\|_B < \infty\};\\
B_{in}(G,[\mathfrak{N}]) &= \{f \in B(G,[\mathfrak{N}]) : f \text{ — внутренняя оператор-функция}\};\\
B_{out}(G,[\mathfrak{N}]) &= \{f \in B(G,[\mathfrak{N}]) : f \text{ — внешняя оператор-функция}\}.
\end{aligned}
$$

Под внутренней (внешней) оператор-функцией мы понимаем такую оператор-функцию, что $f\circ\varphi$ есть внутренняя (внешняя) оператор-функция в $\mathbb{D}$ [3], где $\varphi \in CM(\mathbb{D}, G)$. Далее, для классов Неванлинны–Смирнова мы используем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
N(G,B) &= \{f : f(z) = (1/\delta(z))g(z), \delta \in B(G,\mathbb{C}), g \in B(G,B)\};\\
D(G,B) &= \{f : f(z) = (1/\delta(z))g(z), \delta \in B_{out}(G,\mathbb{C}), g \in B(G,B)\};\\
D^2(G,\mathfrak{N}) &= \{f : f(z) = (1/\delta(z))g(z), \delta \in B_{out}(G,\mathbb{C}), g \in E^2(G,\mathfrak{N})\};
\end{aligned}
$$

Определим $F(G,B)$ как множество вектор-функций со значенями в B, мероморфных в G и имеющих почти всюду на C угловые граничные значения. Очевидно, что $B \subset D \subset N \subset F$. Для классов оператор-функций мы будем использовать обозначения

$$
(X:Y)(G,[\mathfrak{N}]) = \{\Omega : \Omega(\cdot) \in X(G,[\mathfrak{N}]), \Omega(\cdot)^{-1} \in Y(G,[\mathfrak{N}])\}.
$$

Отметим следующий полезный факт (в печати): Если C является простой замкнутой $C^{2+\varepsilon}$ гладкой кривой, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S-U \in \mathfrak{S}_1$, $\rho(S)\cap G_+ \neq \varnothing$, M, $N \in \mathfrak{S}_2$, то $(I + M(S-z)^{-1}N) \in (N:N)(G_+,[\mathfrak{N}])$.

Пусть $\Omega \in B(G_\pm,[\mathfrak{N}])$. Будем использовать обозначения $L_\Omega = \operatorname{Ker} P_\mp\Omega$, $E_\Omega = L_\Omega \cap \operatorname{Ker} P_\pm$; здесь Ω рассматривается как оператор умножения на оператор-функцию: $f(z) \mapsto \Omega(z)f(z)$, $f \in L^2(C,\mathfrak{N})$. Обычно мы будем использовать для функции (оператор-функции) и оператора умножения на эту функцию (оператор-функцию) один и тот же символ. Кроме того, будем обозначать $\Omega(z)^\sim = \Omega(\bar z)^*$. Отметим, что $\langle\Omega f, g\rangle = \langle f, \Omega^\sim g\rangle$.

§1. Функциональная модель для функции от сжатия

В этой части работы мы приведем и обсудим основные факты и утверждения, касающиеся конструкции функциональной модели для функции $\varphi \in CM(\mathbb{D}, \varphi(\mathbb{D}))$ от вполне неунитарного сжатия. Более детальному изложению данного вопроса автор сбирается посвятить отдельную публикацию. Мы будем рассматривать набор $\Pi = (\pi_+, \pi_-)$ из двух операторов $\pi_\pm \in [L^2(C, \mathfrak{N}), \mathcal{H}]$, удовлетворяющих условиям:

(i)$_1$ $\forall\psi \in L^\infty(C, [\mathfrak{N}])$ $(\pi_\pm^* \pi_\pm)\psi = \psi(\pi_\pm^*\pi_\pm)$; (i)$_2$ $(\pi_\pm^*\pi_\pm)^{-1} \in [L^2(C, \mathfrak{N})]$;

(ii)$_1$ $(\pi_-^\dagger \pi_+)z = z(\pi_-^\dagger \pi_+)$; (ii)$_2$ $P_-(\pi_-^\dagger\pi_+)P_+ = 0$;

(iii) $\operatorname{Ran}\pi_+ \vee \operatorname{Ran}\pi_- = \mathcal{H}$.

Обозначим $\Theta^\pm = \pi_\mp^\dagger \pi_\pm$, $\Delta^\pm = (I - \Theta^\pm\Theta^\mp)^{1/2}$. Здесь $A^{1/2} = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$, где $p_n(z)$ — многочлены, равномерно сходящиеся к $\sqrt{z}$ на отрезке $[0,1]$. Имеем $\Theta^+ \in B(G_+, [\mathfrak{N}])$, Θ^-, $\Delta^\pm \in L^\infty(C, [\mathfrak{N}])$. Далее, введем обозначения $\Theta_\pm^- = P_\pm\Theta^- \in \operatorname{Hol}(G_\pm, [\mathfrak{N}])$. Если $\pi_\pm^*\pi_\pm \in C^{1+\varepsilon}(C, [\mathfrak{N}])$, $\Theta^+ \in (B:F)(G_+, [\mathfrak{N}])$, то $\Theta_\pm^- \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}])$. Положим $\tau_\pm = ((\Delta^\pm)^{-1}(\pi_\mp^\dagger - \Theta^\pm\pi_\pm^\dagger))^\dagger \in [L^2(C, \mathfrak{N}), \mathcal{H}]$.

Предложение 1.1. *Справедливы следующие соотношения*:

1) $\begin{pmatrix} \pi_\pm^\dagger \\ \tau_\pm^\dagger \end{pmatrix}(\pi_\pm, \tau_\pm) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{\operatorname{clos}\operatorname{Ran}\Delta^\pm} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} \pi_\pm^\dagger \\ \tau_\pm^\dagger \end{pmatrix}(\pi_\mp, \tau_\mp) = \begin{pmatrix} \Theta^\mp & \Delta^\mp \\ \Delta^\pm & \Theta^\pm \end{pmatrix}$;

3) $\pi_\pm\pi_\pm^\dagger + \tau_\pm\tau_\pm^\dagger = I$.

Далее, равенства $U\pi_\pm = \pi_\pm z$ однозначно определяют нормальный оператор $U \in [\mathcal{H}]$, спектр которого абсолютно непрерывный и расположен на кривой C. Справедливы также соотношения $U\tau_\pm = \tau_\pm z$, $\pi_\pm^\dagger U = z\pi_\pm^\dagger$, $\tau_\pm^\dagger U = z\tau_\pm^\dagger$. Положим

$$Q_- = \pi_- P_- \pi_-^\dagger, \quad Q_+ = \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger (I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger),$$
$$P_\Theta = (I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger)(I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger).$$

Предложение 1.2. 1) $Q_\pm^2 = Q_\pm$; 2) $Q_\pm Q_\mp = 0$; 3) $P_\Theta^2 = P_\Theta = I - Q_+ - Q_- = (I - Q_+)(I - Q_-) = (I - Q_-)(I - Q_+)$.

Доказательство. 1) $Q_-^2 = \pi_- P_- \pi_-^\dagger \pi_- P_- \pi_-^\dagger = \pi_- P_-^2 \pi_-^\dagger = \pi_- P_- \pi_-^\dagger = Q_-$. Так как $P_-\pi_-^\dagger\pi_+P_+ = 0$, имеем $Q_-\pi_+P_+ = \pi_-P_-\pi_-^\dagger\pi_+P_+ = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_+^2 &= \pi_+P_+\pi_+^\dagger(I - Q_-)\pi_+P_+\pi_+^\dagger(I - Q_-) \\ &= \pi_+P_+\pi_+^\dagger\pi_+P_+\pi_+^\dagger(I - Q_-) = Q_+. \end{aligned}$$

2) Имеем

$$Q_+Q_- = \pi_+P_+\pi_+^\dagger(I - Q_-)Q_- = \pi_+P_+\pi_+^\dagger(Q_- - Q_-^2) = 0.$$
$$Q_-Q_+ = Q_-\pi_+P_+\pi_+^\dagger(I - Q_-) = 0\pi_+^\dagger(I - Q_-) = 0.$$

3) Имеем

$$I - Q_- - Q_+ = (I - Q_-) - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger (I - Q_-) = (I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger)(I - Q_-)$$
$$= P_\Theta. \quad \bullet$$

Замечания. 1) Вообще говоря,

$$(I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger)(I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger) \neq (I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger)(I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger).$$

2) В случае, если $G_+ = \mathbb{D}$, $\pi_\pm^* \pi_\pm = I$, имеем

$$P_+ \pi_+^\dagger \pi_- P_- = P_+ \pi_+^* \pi_- P_- = P_+ \Theta^* P_- = 0$$

и, следовательно,

$$(I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger)(I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger) = (I - \pi_- P_- \pi_-^\dagger)(I - \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger),$$
$$Q_+ = \pi_+ P_+ \pi_+^\dagger, \quad P_\Theta = I - \pi_+ P_+ \pi_+^* - \pi_- P_- \pi_-^* = P_\Theta^*.$$

3) Имеем $(I - Q_\pm)\psi(U) Q_\pm = 0)$, если $\psi \in B(G_\pm, \mathbb{C})$. Но только $Q_- \psi(U)(I - Q_-) = 0$, если $\psi \in B(G_+, \mathbb{C})$.

Введем подпространства $D_\pm = \operatorname{Ran} Q_\pm$, $\mathcal{K}_\Theta = \operatorname{Ran} P_\Theta$. Для них имеем

$$D_\pm = \{f \in \mathcal{H} : P_\mp \pi_\pm^\dagger f = 0, \tau_\pm^\dagger f = 0\} = \{f = \pi_\pm u_\pm : u_\pm \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})\},$$
$$\mathcal{K}_\Theta = \{f \in \mathcal{H} : P_+ \pi_+^\dagger f = 0, P_- \pi_-^\dagger f = 0\}.$$

Пример. Пусть $\Theta^\sim \in B_{in}(\overline{C}_+, [\mathfrak{N}])$. Положим $\mathcal{H} = L^2(C, \mathfrak{N})$, $\pi_+ = I$, $\pi_- = \Theta^*$. Тогда имеем $\mathcal{K}_\Theta = \{f \in E^2(G_-, \mathfrak{N}) : \Theta f \in E^2(G_+, \mathfrak{N})\} = E_\Theta$.

Предложение 1.3. *Пусть $f \in \mathcal{H}$. Тогда $P_\Theta (U - a)^{-1} f = (U - a)^{-1} n(a)$, где*

$$n(a) = \begin{cases} f_0 + \pi_+ u_+(a) + (\pi_+(\Theta_+^- - \Theta_+^-(a)) - \pi_-)(\Theta^+(a) u_+(a) + (\pi_-^\dagger f_0)(a)), \\ \hfill a \in G_+ \\ f_0 - \pi_+((\pi_+^\dagger f_0)(a) + (\Theta_+^- + \Theta_-^-(a)) u_-(a)) + \pi_- u_-(a), \quad a \in G_- \end{cases}$$

и $f_0 = P_\Theta f$, $u_\pm = \pi_\pm^\dagger Q_\pm f$.

Предложение 1.4. *Пусть* $\Theta_+^- \in B(G_+,[\mathfrak{N}])$, $\Theta_-^- \in B(G_-,[\mathfrak{N}])$. *Тогда*

$$\operatorname{clos}\{f_0 \in \mathcal{K}_\Theta : \pi_+^\dagger f_0 \in L^\infty(C,\mathfrak{N}),\ \tau_+^\dagger f_0 \in L^\infty(C,\mathfrak{N})\} = \mathcal{K}_\Theta.$$

Существует двойственная пара $\Pi_* = (\pi_{*+},\pi_{*-})$, $\pi_{*\pm} \in [L^2(\overline{C},\mathfrak{N}),\mathcal{H}]$, для которой выполнены свойства (i), (ii) и (iii). Имеем $\Theta_*^\pm = (\Theta^\pm)^\sim$, $\Delta_*^\pm = (\Delta^\mp)^\sim$, $P_{*\Theta} = P_\Theta^*$, и справедливы соотношения двойственности

$$(f,g) = \langle \pi_\pm^\dagger f, \pi_{*\mp}^\dagger g\rangle + \langle \tau_\pm^\dagger f, \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle, \quad f,g \in \mathcal{H}.$$

С этого момента и до конца статьи будем предполагать, что $\infty \in G_-$. Это не является серьезным ограничением (вся теория распространяется с небольшими модификациями и на случай $\infty \in G_+$: надо дополнительно требовать существование $\Theta^+(\infty)^{-1} \in [\mathfrak{N}]$). Положим $\mathcal{F}_{ms}(\Pi) = (\widehat{T},\widehat{M},\widehat{N})$, где

$$\widehat{T} = U - \pi_+\omega^0\widehat{M} \in [\mathcal{K}_\Theta], \quad \widehat{M} = \omega_\infty\pi_+^\dagger \in [\mathcal{K}_\Theta,\mathfrak{N}], \quad \widehat{N} = P_\Theta\pi_-\omega^0 \in [\mathfrak{N},\mathcal{K}_\Theta].$$

(Отметим, что $\widehat{M} = \Theta^+(\infty)^{-1}\omega_\infty\pi_-^\dagger$, $\widehat{N} = -P_\Theta\pi_+\omega^0\Theta^+(\infty)^{-1}$, если $\infty \in G_+$.)

Предложение 1.5. *Пусть* $f_0 \in \mathcal{K}_\Theta$. *Тогда*

1) $(\widehat{T}-a)^{-1} = P_\Theta(U-a)^{-1}|\mathcal{K}_\Theta$, $a \in G_-$;
2) $(\widehat{T}-a)^{-1}f_0 = (U-a)^{-1}(f_0 - \pi_+ n(a))$;
3) $\widehat{M}(\widehat{T}-a)^{-1}f_0 = -n(a)$,

где $n(a) = (\pi_+^\dagger f_0)(a)$, $a \in G_-$, $n(a) = \Theta^+(a)^{-1}(\pi_-^\dagger f_0)(a)$, $a \in G_+ \cap \rho(\widehat{T})$.

Положим $\Upsilon(z) = \widehat{M}(\widehat{T}-z)^{-1}\widehat{N}$, $z \in \rho(\widehat{T})$. Для этой оператор-функции имеют место представления

$$\Upsilon(z) = -\Theta_-^-(z), \ z \in G_-, \quad \Upsilon(z) = \Theta_+^-(z) - \Theta^+(z)^{-1}, \ z \in G_+ \cap \rho(\widehat{T}).$$

Положим также

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob}(\mathrm{Sys}) = \Big\{(T,M,N) :\ & \\
& \exists\varphi \in CM(\mathbb{D},G_+),\ \exists\psi_\pm \in (B:B)(G_+,\mathbb{C}),\\
& \exists Z \in [H_0,H],\ Z^{-1} \in [H,H_0],\ \exists\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H_0 \oplus \mathfrak{N}]\\
& (\mathfrak{U}_0^*\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0\mathfrak{U}_0^* = I,\ T_0 \text{ c.n.u.},\ T = Z\varphi(T_0)Z^{-1},\\
& M = M_0(\sqrt{\varphi'}/(\psi_+\circ\varphi))(T_0)Z^{-1},\ N = Z(\sqrt{\varphi'}(\psi_-\circ\varphi))(T_0)N_0)\Big\}.
\end{aligned}$$

Здесь c.n.u. означает „вполне неунитарный“.

Предложение 1.6. $\mathcal{F}_{\mathrm{ms}}(\Pi) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys})$.

С точностью до подобия справедливо и обратное утверждение, вытекающее из следующей теоремы.

Теорема A. *Пусть* $(T, M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys})$. *Тогда существуют пара* Π, *удовлетворяющая условиям* (i), (ii), (iii) *и* W, $W_* \in [H, \mathcal{H}]$ *такие, что* $WW_*^* = P_\Theta$, $W_*^* W = I$,

$$\widehat{T}W = WT, \quad \widehat{M}W = M, \quad \widehat{N} = WN,$$
$$\widehat{T}_* W_* = W_* T^*, \quad \widehat{M}_* W_* = N^*, \quad \widehat{N}_* = W_* M^*,$$

где $(\widehat{T}, \widehat{M}, \widehat{N}) = \mathcal{F}_{\mathrm{ms}}(\Pi)$, $(\widehat{T}_*, \widehat{M}_*, \widehat{N}_*) = \mathcal{F}_{\mathrm{ms}}(\Pi_*)$.
Если при этом $\Theta_0(z) = L_0 + zM_0(I - zT_0)^{-1}N_0 \in (B : F)(\mathbb{D}, [\mathfrak{N}])$, *то*

$$Wf = -\pi_+ \gamma_-^T(f) - \tau_+(\Delta^+)^{-1}\Theta^+(\gamma_+^T(f) - \gamma_-^T(f)), \quad f \in H,$$

где $\gamma_\pm^T(f)(z) = (M(T - z)^{-1} f)_\pm$, $z \in C$ — *граничные значения из* $G_\pm$.

Замечания. 1) Если $\forall f \in H$ $\gamma_+^T(f)(z) = \gamma_-^T(f)(z)$ при п.в. $z \in C$, то $Wf = -\pi_+\gamma_-^T(f)$. Такого рода отображение в некоторое фактор-пространство, где модельный оператор реализуется как оператор умножения на независимую переменную, использовалось при построении линейноподобных моделей С.-Надя–Фояша в [22]. К сожалению, автору не удалось найти подробной публикации, чтобы произвести детальное сравнение предлагаемой модели с моделью Якубовича.

2) Условие биортогональности $W_*^* W = I$ можно переписать в виде $(f, g) = (Wf, W_* g)$. Отсюда мы можем заключить, что здесь возникает тот же самый тип двойственности, который являлся предметом исследования в работах [21, 22].

3) Достаточными условиями для того, чтобы $\Theta_0 \in (B : F)(\mathbb{D}, [\mathfrak{N}])$, являются M_0, $N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\rho(T_0) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing$. Отметим, что

$$\Theta^+ \in (B : F)(G_+, [\mathfrak{N}]) \iff \Theta_0 \in (B : F)(\mathbb{D}, [\mathfrak{N}]).$$

4) Если $\psi_\pm \in C^{1+\varepsilon}(G_+, \mathbb{C})$, то $\pi_\pm^* \pi_\pm \in C^{1+\varepsilon}(C, [\mathfrak{N}])$.

5) Доказательство теоремы существенно опирается на преобразования, связывающие модель оператора с моделью для функции от него. Если $\eta_\pm \in (B : B)(G_{2+}, \mathbb{C})$, $\varphi \in CM(G_{1+}, G_{2+})$, $\pi_{2\pm} = \pi_{1\pm} C_\varphi \eta_\pm$, то

$$\widehat{T}_2 Z = Z\varphi(\widehat{T}_1), \quad \widehat{M}_2 = \widehat{M}_1(\sqrt{\varphi'}/(\eta_+ \circ \varphi))(\widehat{T}_1)Z^{-1}, \quad \widehat{N}_2 = Z(\sqrt{\varphi'}(\eta_- \circ \varphi))(\widehat{T}_1)\widehat{N}_1,$$

где $Z = P_{2\Theta}|\mathcal{K}_{1\Theta}$, $Z^{-1} = P_{1\Theta}|\mathcal{K}_{2\Theta}$, $(C_\varphi f(\cdot))(z_1) = \sqrt{\varphi'(z_1)}f(\varphi(z_1))$. Нетрудно видеть, что $C_\varphi \in [L^2(C_2,\mathfrak{N}), L^2(C_1,\mathfrak{N})]$.

В заключение этой части отметим, что основными требованиями при построении нашего варианта функциональной модели были: 1) построение пространства „дилатации" и оператора проектирования на модельное пространство; 2) наличие двойственной модели; 3) возможность работать с абсолютно непрерывным спектром (наличие нетривиальных $\tau_\pm$); 4) простые преобразования между моделью для оператора и моделью для функции от него.

§2. Функциональная модель для возмущений

Положим $\mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}_\varkappa) = \{(S,M,N,\varkappa) : (T,M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}), T = S - N\varkappa M\}$ и

$$\Omega_{\cdot\varkappa}(z) = I + \Upsilon(z)\varkappa, \quad \Omega_{\varkappa\cdot}(z) = I + \varkappa\Upsilon(z), \qquad z \in \rho(T).$$

Лемма 2.1. *Пусть* $(S,M,N,\varkappa) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}_\varkappa)$, $a,b \in \rho(T)\cap\rho(S)$. *Тогда*

1) $M(S-a)^{-1} = \Omega_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}M(T-a)^{-1}$;

2) $M(T-b)^{-1}(S-a)^{-1} = 1/(b-a)[M(T-b)^{-1} - \Omega_{\cdot\varkappa}(b)\Omega_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}M(T-a)^{-1}]$.

Доказательство. 1) Следует непосредственно из равенства

$$(T-a)^{-1} - (S-a)^{-1} = (T-a)^{-1}N\varkappa M(S-a)^{-1}.$$

2) Умножим резольвентное тождество $(b-a)(S-b)^{-1}(S-a)^{-1} = (S-b)^{-1} - (S-a)^{-1}$ слева на M и воспользуемся 1). Тогда имеем

$$(b-a)\Omega_{\cdot\varkappa}(b)^{-1}M(T-b)^{-1}(S-a)^{-1} = \Omega_{\cdot\varkappa}(b)^{-1}M(T-b)^{-1} - \Omega_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}M(T-a)^{-1},$$

откуда и получаем требуемое тождество. •

Предложение 2.2. *Пусть* $(S,M,N,\varkappa) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}_\varkappa)$ *и* $(\widehat{T},\widehat{M},\widehat{N})$, $(\widehat{T}_*,\widehat{M}_*,\widehat{N}_*)$ — *линейноподобная модель из теоремы A*, $\widehat{S} = \widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M}$, $\widehat{S}_* = \widehat{T}_* + \widehat{N}_*\varkappa^*\widehat{M}_*$. *Тогда* $\widehat{S} = WSW_*^*$, $\widehat{S}_* = W_*S^*W^*$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{S} &= \widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M} = WTW_*^* + WN\varkappa MW_*^* \\
&= W(T + N\varkappa M)W_*^* = WSW_*^*, \\
\widehat{S}_* &= \widehat{T}_* + \widehat{N}_*\varkappa^*\widehat{M}_* = W_*T^*W^* + W_*M^*\varkappa^*N^*W^* \\
&= W_*(T^* + M^*\varkappa^*N^*)W^* = W_*S^*W^*,
\end{aligned}$$

что и требовалось. •

В связи с этим предложением мы будем дальше работать с модельными операторами $(\widehat{T}, \widehat{M}, \widehat{N}) = \mathcal{F}_{\mathrm{ms}}(\Pi)$ и $\widehat{S} = \widehat{T} + \widehat{N}\varkappa\widehat{M}$. Положим

$$\begin{aligned} &\Theta^-_{\cdot\varkappa}(z) = \Omega_{\cdot\varkappa}(z), && \Theta^-_{\varkappa\cdot}(z) = \Omega_{\varkappa\cdot}(z), && z \in G_-; \\ &\Theta^+_{\cdot\varkappa}(z) = \Theta^+(z)\Omega_{\cdot\varkappa}(z), && \Omega^+_{\varkappa\cdot}(z) = \Theta_{\varkappa\cdot}(z)\Theta^+(z), && z \in G_+ \cap \rho(\widehat{T}). \end{aligned}$$

Отметим, что $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}$, $\Theta^\pm_{\varkappa\cdot}(a)^{-1} \in [\mathfrak{N}]$, если $a \in \rho(\widehat{S})$. Начиная с этого момента и до конца мы будем предполагать, что

$$\Theta^-_\pm \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta^+ \in (B:F)(G_+, [\mathfrak{N}]).$$

Положим

$$\begin{aligned} \varkappa^l_- &= \varkappa, \quad \varkappa^l_+ = -(I + \varkappa\Theta^-_+) = -(I + \varkappa(\Upsilon + (\Theta^+)^{-1})), \\ \varkappa^r_- &= \varkappa, \quad \varkappa^r_+ = -(I + \Theta^-_+\varkappa) = -(I + (\Upsilon + (\Theta^+)^{-1})\varkappa). \end{aligned}$$

Лемма 2.3. 1) $\varkappa^l_\pm, \varkappa^r_\pm \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}])$; 2) $\varkappa^l_-\varkappa^r_+ = \varkappa^l_+\varkappa^r_-$; 3) $\varkappa^l_{*\pm} = \varkappa^{r\sim}_\pm$, $\varkappa^r_{*\pm} = \varkappa^{l\sim}_\pm$.

Доказательство. 1), 2) Очевидно. 3) $\varkappa^l_{*+} = -(I + \varkappa_*(\Upsilon_* + (\Theta^+_*)^{-1})) = (I + \varkappa^*(\Upsilon^\sim + (\Theta^+)^{-1\sim})) = (I + (\Upsilon + (\Theta^+)^{-1})\varkappa)^\sim = \varkappa^{r\sim}_+$. •

Предложение 2.4. *Справедливы следующие соотношения*

1) $\Theta^-_{\cdot\varkappa} = I - \Theta^-_-\varkappa$, $\Theta^+_{\cdot\varkappa} = -\varkappa + \Theta^+ + \Theta^+\Theta^-_+\varkappa$,
$\Theta^-_{\varkappa\cdot} = I - \varkappa\Theta^-_-$, $\Theta^+_{\varkappa\cdot} = -\varkappa + \Theta^+ + \varkappa\Theta^-_+\Theta^+$;

2) $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa} = -(\varkappa^r_\mp + \Theta^\pm\varkappa^r_\pm)$, $\Theta^\pm_{\varkappa\cdot} = -(\varkappa^l_\mp + \varkappa^l_\pm\Theta^\pm)$;

3) $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa} = -\pi^\dagger_\mp(\pi_+\varkappa^r_+ + \pi_-\varkappa^r_-)$, $\Theta^\pm_{\varkappa\cdot} = -(\varkappa^l_+\pi^\dagger_- + \varkappa^l_-\pi^\dagger_+)\pi_\pm$.

Доказательство. 1) Следует из определения $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa}$, $\Theta^\pm_{\varkappa\cdot}$ и представления оператор-функции Υ через $\Theta^-_\pm$.

2) $-(\varkappa^r_+ + \Theta^-\varkappa^r_-) = I + \Theta^-_+\varkappa - \Theta^-\varkappa = I - \Theta^-_-\varkappa = \Theta^-_{\cdot\varkappa}$.
$-(\varkappa^r_- + \Theta^+\varkappa^r_+) = -\varkappa + \Theta^+(I + \Theta^-_+\varkappa) = -\varkappa + \Theta^+ + \Theta^+\Theta^-_+\varkappa = \Theta^+_{\cdot\varkappa}$.

3) Вытекает из 2), так как $\pi^\dagger_\mp\pi_\pm = \Theta^\pm$. •

Предложение 2.5. 1) $\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}$, $\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot} \in B(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$; 2) $\varkappa^l_{\pm}\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa} = \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\varkappa^r_{\pm}$; 3) $\Theta^{\pm}_{*\cdot\varkappa} = (\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot})^{\sim}$, $\Theta^{\pm}_{*\varkappa\cdot} = (\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa})^{\sim}$.

Доказательство. 1) Следует из предложения 2.4(2) и леммы 2.3(1).

2) $\varkappa^l_{\pm}\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa} = -\varkappa^l_{\pm}(\varkappa^r_{\mp} + \Theta^{\pm}\varkappa^r_{\pm}) = -(\varkappa^l_{\pm}\varkappa^r_{\mp} + \varkappa^l_{\pm}\Theta^{\pm}\varkappa^r_{\pm}) = -(\varkappa^l_{\mp} + \varkappa^l_{\pm}\Theta^{\pm})\varkappa^r_{\pm} = \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\varkappa^r_{\pm}$.

3) $\Theta^{\pm}_{*\cdot\varkappa} = -(\varkappa^r_{*\mp} + \Theta^{\pm}_{*}\varkappa^r_{*\pm}) = -(\varkappa^{l\sim}_{\mp} + (\Theta^{\pm})^{\sim}\varkappa^{l\sim}_{\pm}) = -(\varkappa^l_{\mp} + \varkappa^l_{\pm}\Theta^{\pm})^{\sim} = (\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot})^{\sim}$. •

Отметим, что $\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}$, $\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot} \in (B:N)(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$, если $\widehat{M}$, $\widehat{N} \in \mathfrak{S}_2$.

Лемма 2.6. *Пусть* $f_0 \in K_{\Theta}$. *Тогда*

1) $\widehat{M}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0 = -n(a)$;

2) $\pi^{\dagger}_{\pm}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0 = 1/(z-a)((\pi^{\dagger}_{\pm}f_0)(z) - n(a))$,

где $n(a) = \Theta^{+}_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^{\dagger}_{-}f_0)(a)$, *если* $a \in G_+ \cap \rho(\widehat{S}) \cap \rho(\widehat{T})$ *и* $n(a) = \Theta^{-}_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^{\dagger}_{+}f_0)(a)$, *если* $a \in G_- \cap \rho(\widehat{S})$.

Доказательство. 1) Вытекает из леммы 2.1(1), определения $\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}$ и предложения 1.5(3).

2) Согласно лемме 2.1(2), имеем

$$\widehat{M}(\widehat{T} - b)^{-1}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0 = 1/(b-a)[\widehat{M}(\widehat{T} - b)^{-1}f_0 + \Omega_{\cdot\varkappa}(b)n(a)],$$

где $n(a) = -\Omega_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}\widehat{M}(\widehat{T} - a)^{-1}f_0 = -\widehat{M}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0$. Далее, согласно предложения 1.5(3), получаем

$$\begin{aligned}
&(\pi^{\dagger}_{+}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0)(b)\\
&\quad = 1/(b-a)[(\pi^{\dagger}_{+}f_0)(b) - \Omega_{\cdot\varkappa}(b)n(a)], \qquad b \in G_-;\\
&\Theta^{+}(b)^{-1}(\pi^{\dagger}_{-}(\widehat{S} - a)^{-1}f_0)(b)\\
&\quad = 1/(b-a)[\Theta^{+}(b)^{-1}(\pi^{\dagger}_{-}f_0)(b) - \Omega_{\cdot\varkappa}(b)n(a)], \quad b \in G_+ \cap \rho(\widehat{T}).
\end{aligned}$$

Отсюда, переходя к граничным значениям и учитывая определение $\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}$, получаем требуемое равенство. •

Лемма 2.7. $P_{\pm}(\varkappa^l_{+}\pi^{\dagger}_{-} + \varkappa^l_{-}\pi^{\dagger}_{+}) = \varkappa^l_{\pm}\pi^{\dagger}_{\mp}P_{\Theta} - \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\pi^{\dagger}_{\pm}Q_{\pm}$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{H}$, $f_0 = P_{\Theta}f$, $u_{\pm} = \pi^{\dagger}_{\pm}Q_{\pm}f$. Тогда $f = \pi_- u_- + f_0 + \pi_+ u_+$ и $\pi^{\dagger}_{\pm}f = u_{\pm} + \pi^{\dagger}_{\pm}f_0 + \Theta^{\mp}u_{\mp}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
(\varkappa^l_{+}\pi^{\dagger}_{-} + \varkappa^l_{-}\pi^{\dagger}_{+})f &= (\varkappa^l_{+} + \varkappa^l_{-}\Theta^{-})u_- + (\varkappa^l_{+}\pi^{\dagger}_{-} + \varkappa^l_{-}\pi^{\dagger}_{+})f_0 + (\varkappa^l_{-} + \varkappa^l_{+}\Theta^{+})u_+\\
&= (-\Theta^{-}_{\varkappa\cdot}\pi^{\dagger}_{-}Q_- + \varkappa^l_{-}\pi^{\dagger}_{+}P_{\Theta})f + (-\Theta^{+}_{\varkappa\cdot}\pi^{\dagger}_{+}Q_+ + \varkappa^l_{+}\pi^{\dagger}_{-}P_{\Theta})f.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot} \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}])$, $\varkappa^l_\pm \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}])$, $\pi^\dagger_\mp f_0 \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$, $u_\pm \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$, получаем $(\varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp P_\Theta - \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_\pm Q_\pm) f \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$. •

Предложение 2.8. *Пусть* $a \in \rho(\widehat{S}) \cap \rho(\widehat{T})$. *Тогда для* $f_0 \in \mathcal{K}_\Theta$, $f \in \mathcal{H}$, $a \in G_\pm$

1) $(\widehat{S}-a)^{-1} f_0 = (U-a)^{-1}(f_0 + (\pi_+\varkappa^r_+ + \pi_-\varkappa^r_-)n(a)), n(a) = \Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^\dagger_\mp f_0)(a)$;

2) $(\widehat{S}-a)^{-1} P_\Theta f = P_\Theta (U-a)^{-1}(I + \pi_\pm \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}(a)^{-1} P_\pm (\varkappa^l_+ \pi^\dagger_- + \varkappa^l_- \pi^\dagger_+)) f$.

Доказательство. 1) Имеем, согласно предложению 2.4(3) и лемме 2.6(2),

$$\pi^\dagger_\pm (U-a)^{-1}(f_0 + (\pi_+\varkappa^r_+ + \pi_-\varkappa^r_-)n(a)) = 1/(z-a)(\pi^\dagger_\pm f_0 - \Theta^{\mp}_{\cdot\varkappa} n(a)) = \pi^\dagger_\pm (\widehat{S}-a)^{-1} f_0,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

2) Обозначим $g = P_\Theta (U-a)^{-1}(I + \pi_\pm \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}(a)^{-1} P_\pm (\varkappa^l_+ \pi^\dagger_- + \varkappa^l_- \pi^\dagger_+)) f$. Пусть $f_0 = P_\Theta f$, $u_\pm = \pi^\dagger_\pm Q_\pm f$. Согласно лемме 2.7, получаем

$$g = P_\Theta (U-a)^{-1}(f_0 + \pi_\pm (\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}(a)^{-1}(\varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0 - \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_\pm u_\pm) + u_\pm) + \pi_\mp u_\mp).$$

Для $a \in G_\pm$ имеем, используя предложение 2.5(2)

$$\Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}(a)^{-1}(\varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0 - \Theta^{\pm}_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_\pm u_\pm)(a) + u_\pm(a) = \varkappa^r_\pm(a)\Theta^{\pm}_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^\dagger_\mp f_0)(a) = \varkappa^r_\pm(a) n(a).$$

Воспользовавшись предложением 1.3, получаем $g = P_\Theta (U-a)^{-1}(f_0 + m(a))$, где

$$\begin{aligned} m(a) &= \pi_+\varkappa^r_+(a)n(a) + (\pi_+(\Theta^-_+ - \Theta^-_+(a)) - \pi_-)(\Theta^+(a)\varkappa^r_+(a) + \Theta^+_{\cdot\varkappa}(a))n(a) \\ &= \pi_+(\varkappa^r_+(a) - (\Theta^-_+ - \Theta^-_+(a))\varkappa^r_-(a))n(a) + \pi_-\varkappa^r_-(a)n(a), \quad a \in G_+, \\ m(a) &= -\pi_+(\Theta^-_{\cdot\varkappa}(a) + (\Theta^-_+ + \Theta^-_-(a))\varkappa^r_-(a))n(a) + \pi_-\varkappa^r_-(a)n(a), \quad a \in C_-. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varkappa^r_-(a) = \varkappa = \varkappa^r_-$, имеем

$$\begin{aligned} \varkappa^r_+(a) - (\Theta^-_+ - \Theta^-_+(a))\varkappa^r_-(a) &= -I - \Theta^-_+(a)\varkappa - \Theta^-_+\varkappa + \Theta^-_+(a)\varkappa \\ &= -I - \Theta^-_+\varkappa = \varkappa^r_+, \\ \Theta^-_{\cdot\varkappa}(a) + (\Theta^-_+ + \Theta^-_-(a))\varkappa^r_+(a) &= I - \Theta^-_-(a)\varkappa + \Theta^-_+\varkappa + \Theta^-_-(a)\varkappa \\ &= I + \Theta^-_+\varkappa = -\varkappa^r_+, \end{aligned}$$

откуда $m(a) = (\pi_-\varkappa^r_- + \pi_+\varkappa^r_+)n(a)$. •

Замечания. Отметим, что $\varkappa^r_\pm$, $\varkappa^l_\pm$ являются константами, если $G_+ = \mathbb{D}$, $\pi^*_\pm \pi_\pm = I$ [5, 6]. В общем же случае $\varkappa^r_\pm$, $\varkappa^l_\pm$ — оператор-функции, что вносит некоторые дополнительные сложности в вычисления.

Наиболее эффективно функциональная модель для возмущения может быть применена в случае, если

$$\Theta_{\pm}^{-} \in B(G_{\pm}, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta^{+} \in (B:F)(G_{+}, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta_{\cdot\varkappa}^{\pm}, \Theta_{\varkappa\cdot}^{\pm} \in (B:N)(G_{\pm}, [\mathfrak{N}]).$$

Достаточным для того, чтобы оператор S обладал линейноподобной моделью, для которой выполнялись бы перечисленные выше условия, является представимость его в виде $S = \varphi(T_0) + N_0\varkappa M_0$, где $\varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+)$, T_0 — вполне неунитарное сжатие, $T_0^{-1} \in [H]$, $M_0, N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{U}_0^*\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0\mathfrak{U}_0^* = I$, $\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix}$, $\varkappa \in [\mathfrak{N}]$, причем $\rho(S) \cap G_{\pm} \neq \varnothing$. Здесь $\psi_+ = \sqrt{\varphi'} \circ \varphi^{-1}$, $\psi_- = (1/\sqrt{\varphi'}) \circ \varphi^{-1}$, $Z = I$. Последующие рассуждения показывают, что такое представление возможно для весьма широковго класса операторов.

Лемма 2.9. *Пусть* $U_0 \in [H]$, $U_0^*U_0 = U_0U_0^* = I$, $V \in \mathfrak{S}_1(H)$. *Тогда для любых* ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ *существуют гильбертово пространство* $\mathfrak{N}$ *и операторы* $J \in [\mathfrak{N}]$, $J = J^* = J^{-1}$, $G \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{N}, H)$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1) $GJG^* = 0$, 2) $\|G\| < \varepsilon_1$; 3) $V = U_0 G \nu_0 G^*$, $\nu_0 \in [\mathfrak{N}]$; 4) *существуют* $Y_j \in [H]$, $j \in \mathbb{Z}$ *такие, что* $U_0^j G = G Y_{-j}^*$, $\|Y_j\| = (1 + |j|)^\beta$, $2\beta < 1 + \varepsilon_2$.

Доказательство. Пусть $V = V_1^* V_2$, где V_1, $V_2 \in \mathfrak{S}_2(H, \mathfrak{M})$. Определим оператор $K \in [H, L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M})]$ по правилу

$$K = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |j|)^\beta} z^j K_j, \quad K_j = \omega_0^* \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} U_0^{-j}, \ \ 2\beta < 1 + \varepsilon_2.$$

Здесь $\omega_0 \in [L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}]$ (см.Введение). Очевидно, $\|K_j\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \mathrm{Tr}(V_1^* V_1 + V_2^* V_2) < \infty$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортобазис в H. Тогда при $i \neq j$ имеем

$$\begin{aligned} (z^i K_i, z^j K_j)_{\mathfrak{S}_2(H, L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}))} &= \mathrm{Tr}((z^j K_j)^* (z^i K_i)) \\ &= \sum_{k=1}^\infty ((z^j K_j)^* (z^i K_i) e_k, e_k)_H = \sum_{k=1}^\infty (z^i K_i e_k, z^j K_j e_k)_{L^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Теперь из $\{1/(1 + |j|)^\beta\}_{j=-\infty}^\infty \in l^2$ получаем, что $K \in \mathfrak{S}_2$. Легко проверить, что $V = K^* \omega_0^* B \omega_0 K$, $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Далее, очевидно, $K_j U_0^i = K_{j-i}$, откуда получаем $K U_0^j = z^j X_j K$, где

$$X_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ((1 + |k|)/(1 + |k + j|))^\beta z^k \omega_0^* \omega_0 z^{-k} \in [L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M})], \quad \|X_j\| = (1 + |j|)^\beta.$$

Положим

$$\mathfrak{N} = L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}) \oplus L^2(\mathbb{T}, \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}), \qquad J = \operatorname{diag}(I, -I), \qquad G = (K^*, K^*).$$

Тогда $GJG^* = 0$, $U_0^j G = GY_{-j}^*$, где $Y_j = \operatorname{diag}(z^j X_j, z^j X_j) \in [\mathfrak{N}]$. Легко проверить, что $V = U_0 G \nu_0 G^*$, $\nu_0 = Y_1^*(\omega_0, 0)^* B(\omega_0, 0)$. Домножая оператор G на подходящую константу и перенормируя ν_0, мы всегда можем удовлетворить условию 2). •

Предложение 2.10. *Пусть* $U_0 \in [H]$, $U_0^* U_0 = U_0 U_0^* = I$, $V \in \mathfrak{S}_1(H)$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *существует оператор* $\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H_0 \oplus \mathfrak{N}]$ *такой, что* $\mathfrak{U}_0^* \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_0^* = I$, $T_0^{-1} \in [H]$, M_0, $N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $V = N_0 \varkappa_0 M_0$, $\varkappa_0 \in [\mathfrak{N}]$, $U_0^n - T_0^n = N_0 \varkappa_n M_0$, $\|\varkappa_n\| = O(n^{2+2\beta})$.

Доказательство. Применим лемму 2.9. Положим $P_\pm = 1/2(I \pm J)$, $W = I - 1/2G^*GJ$, $Q = U_0 G (W^{-1})^* J$, $R = -G^*$. Отметим, что $W^{-1} = I + 1/2G^*GJ$ и $\|W^{-1}\| \leqslant (1 + \varepsilon_1^2)$. Возьмем теперь

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_0 &= \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_0 - QP_-(P_+ + P_-W)^{-1}P_-R & Q(P_+ + P_-W)^{-1} \\ (P_+ - WP_-)^{-1}R & (P_+W + P_-)(P_+ + P_-W)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Имеем $\mathfrak{U}_0^* \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_0^* = I$, так как $\mathfrak{U}_0$ — преобразование Потапова–Гинзбурга от J-узла $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} S & Q \\ R & W \end{pmatrix}$ [26, 16]. Для сжатия T_0 имеем

$$T_0 = U_0(I + G\nu_1 G^*), \qquad \nu_1 = (W^{-1})^* JP_-(P_+ + P_-W)^{-1}P_- = -(W^{-1})^* P_- L_0 P_-.$$

Так как $\|L_0\| \leqslant 1$, получаем $\|\nu_1\| \leqslant 1 + \varepsilon_1^2$. Следовательно, $\|G\nu_1 G^*\| \leqslant \varepsilon_1^2(1 + \varepsilon_1^2)$. Выбирая ε_1 достаточно малым, получаем $T_0^{-1} \in [H]$. Имеем M_0, $N_0 \in \mathfrak{S}_2$, так как Q, $R \in \mathfrak{S}_2$. Далее получаем

$$\begin{aligned} T_0^n &= U_0(I + G\nu_1 G^*) U_0 (I + G\nu_1 G^*) \ldots (I + G\nu_1 G^*) \\ &= U_0^n + \sum_{k=1}^{n} U_0^k G\nu_1 G^* U_0^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} U_0^k G\nu_1 G^* T_0^{n-k-j-1} U_0 G\nu_1 G^* U_0^j \\ &= U_0^n + U_0 G \nu_n G^*, \\ \nu_n &= \sum_{k=1}^{n} Y_{-k+1}^* \nu_1 Y_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} Y_{-k+1}^* \nu_1 G^* T_0^{n-k-j-1} U_0 G \nu_1 Y_j. \end{aligned}$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\nu_n\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\|Y_{-k+1}\|\|Y_{n-k}\|\|\nu_1\| + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}\|Y_{-k+1}\|\|Y_j\|\|\nu_1\|^2\|G\|^2\\ &\leqslant \|Y_n\|^2\|\nu_1\|(n+n^2\|\nu_1\|\|G\|^2) \leqslant Cn^2\|Y_n\|^2\\ &\leqslant Cn^{2+2\beta}.\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$U_0^n - T_0^n = -U_0G\nu_nG^* = QJW^*\nu_nR = N_0\varkappa_nM_0,$$

где $\varkappa_n = (P_+ + P_-W)JW^*\nu_n(P_+ - WP_-)$. Аналогично $V = U_0G\nu_0G^* = N_0\varkappa_0M_0$. •

Следствие. *Пусть* U_0, $S \in [H]$, $U_0^*U_0 = U_0U_0^* = I$, $\varphi \in A^{4+\varepsilon}(\mathbb{D})$, $S - \varphi(U_0) \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда существуют* $\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0\\ M_0 & L_0\end{pmatrix} \in [H_0 \oplus \mathfrak{N}]$, $\varkappa \in [\mathfrak{N}]$ *такие, что* $T_0^{-1} \in [H]$, M_0, $N_0 \in \mathfrak{S}_2$ *и* $S = \varphi(T_0) + N_0\varkappa M_0$.

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nz^n$. Тогда, согласно [27], $a_n = O(n^{-4-\varepsilon})$. Пусть $V = S - \varphi(U_0)$. Применим предложение 2.10 и положим $\varkappa = \varkappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varkappa_n$. Последний ряд сходится, так как $-4-\varepsilon+2+2\beta < -1$. •

Теорема В. *Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости* $C^{4+\varepsilon}$, U, $S \in [H]$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S-U \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда оператор S допускает представление* $S = \varphi(T_0)+N_0\varkappa M_0$, *где* $\varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+)$, $\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0\\ M_0 & L_0\end{pmatrix} \in [H \oplus \mathfrak{N}]$, $\mathfrak{U}_0^*\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0\mathfrak{U}_0^* = I$, $T_0^{-1} \in [H]$, M_0, $N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\varkappa \in [\mathfrak{N}]$.

Доказательство. Эта теорема вытекает из предыдущего следствия, если только заметить, что из гладкости ограничивающего контура следует такая же гладкость для соответствующего конформного отображения [28]. •

§3. Спектральные компоненты в модельном пространстве

Пусть $(S, M, N, \varkappa) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}_\varkappa)$. Будем предполагать, что при любом $f \in H$ существуют почти всюду на C угловые предельные значения $\gamma_\pm^S(f)(z) = (M(S-z)^{-1}f)_\pm$, $z \in C$, из $G_\pm$ соответственно. Положим

$$\widetilde{M}_\omega(S, M) = \{f \in H : \gamma_+^S(f)(z) = \gamma_-^S(f)(z),\ \text{п.в } z \in \omega\}, \quad \omega \subset C;$$

$$\widetilde{N}_\pm(S, M) = \{f \in H : \gamma_\pm^S(f)(z) \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})\};$$

$$\widetilde{D}_\pm(S, M) = \{f \in H : \gamma_\pm^S(f)(z) \in D^2(G_\pm, \mathfrak{N})\}.$$

Отметим, что достаточными для существования $\gamma_{\pm}^{S}(f)$ являются условия

$$S-U\in\mathfrak{S}_1,\quad U^*U=UU^*,\quad \sigma(U)\subset C,\quad M\in\mathfrak{S}_2.$$

При этих условиях имеем $\widetilde{D}_{\pm}(S,M)=\{f\in H:\gamma_{\pm}^{S}(f)(z)\in D(G_{\pm},\mathfrak{N})\}$. Рассматриваются различные комбинации этих линеалов:

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}(S,M)&=\widetilde{N}_{+}(S,M)\cap\widetilde{N}_{-}(S,M),\\
\widetilde{NM}_{\pm}(S,M)&=\widetilde{N}_{\pm}(S,M)\cap\widetilde{M}(S,M),\\
\widetilde{DM}_{\pm}(S,M)&=\widetilde{D}_{\pm}(S,M)\cap\widetilde{M}(S,M),\\
\widetilde{M}_{s}(S,M)&=\widetilde{D}_{-}(S,M)\cap\widetilde{M}(S,M)\cap\widetilde{D}_{+}(S,M),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{M}(S,M)=\widetilde{M}_C(S,M)$. Введем также следующие наборы символов:

$$\mathcal{A}_i=\{M,D_{\pm},DM_{\pm}\},\quad \mathcal{A}_c=\{N,N_{\pm},NM_{\pm}\},\quad \mathcal{A}=\mathcal{A}_i\cup\mathcal{A}_c.$$

Если $X\in\mathcal{A}$, то будем обозначать $X(S,M)=\operatorname{clos}\widetilde{X}(S,M)$.

Предложение 3.1. *Пусть $X\in\mathcal{A}$. Тогда*

1) $(S-a)^{-1}\widetilde{X}(S,M)=\widetilde{X}(S,M)$, $a\in\rho(S)\setminus C$;
2) $W\in[H_1,H_2]$, $W^{-1}\in[H_2,H_1]\implies \widetilde{X}(WSW^{-1},MW^{-1})=W\widetilde{X}(S,M)$.

Доказательство. 1) Следует из равенств

$$\gamma_{\pm}^{S}((S-a)^{-1}f)(z)=\frac{\gamma_{\pm}^{S}(f)(z)-M(S-a)^{-1}f}{z-a},\qquad \gamma_{\pm}^{S}(Sf)(z)=Mf+z\gamma_{\pm}^{S}(f)(z).$$

2) Следует из равенства $\gamma_{\pm}^{WSW^{-1}}(Wf)=\gamma_{\pm}^{S}(f)$. •

В силу предложения 2.2 и предложения 3.1(2) мы можем изучать спектральные компоненты только для функциональной модели.

Начиная с этого момента до конца параграфа будем предполагать, что

$$\Theta_{\pm}^{-}\in B(G_{\pm},[\mathfrak{N}]),\quad \Theta^{+}\in(B:F)(G_{+},[\mathfrak{N}]),\quad \Theta_{\varkappa}^{\pm}\in(B:F)(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$$

($\iff \Theta_{\cdot\varkappa}^{\pm}\in(B:F)(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$). В случае, когда $X\in\{D_{\pm},DM_{\pm}\}$, добавочно будем требовать, чтобы $\Theta_{\varkappa\cdot}^{\pm}\in(B:N)(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$ ($\iff \Theta_{\cdot\varkappa}^{\pm}\in(B:N)(G_{\pm},[\mathfrak{N}])$). При этих условиях в силу леммы 2.6(1) граничные значения $\widehat{\gamma}_{\pm}(f_0)=\gamma_{\pm}^{\widehat{S}}(f_0)=-(\Theta_{\cdot\varkappa}^{\pm})^{-1}\pi_{\pm}^{\dagger}f_0$ существуют.

Имеем следующие описания спектральных компонент в модельном пространстве.

Предложение 3.2. *Имеем*

1) $\widetilde{M}_\omega(\widehat{S},\widehat{M}) = \{f_0 \in \mathcal{K}_\Theta : \Theta^-_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_+ f_0)(z) = \Theta^+_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_- f_0)(z)$ *п.в.* $z \in \omega\}$;
2) $\widetilde{N}_\pm(\widehat{S},\widehat{M}) = \{f_0 \in \mathcal{K}_\Theta : \pi^\dagger_\mp f_0 \in \Theta^\pm_{\cdot\varkappa} E^2(G_\pm,\mathfrak{N})\} = \{f_0 : \varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0 \in \Theta^\pm_{\varkappa\cdot} E^2(G_\pm,\mathfrak{N})\}$;
3) $\widetilde{D}_\pm(\widehat{S},\widetilde{M}) = \{f_0 \in \mathcal{K}_\Theta : \pi^\dagger_\mp f_0 \in \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} E^2(G_\pm,\mathfrak{N})\}$,

где $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa} = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e}$ *— внутренне-внешняя факторизация* [3].

Доказательство. 1) Следует из определения и леммы 2.6(1).

2) Первое из представлений следует из леммы 2.6(1). Второе следует из первого, предложения 2.5(1) и равенств

$$\widehat{\gamma}_+(f_0) = -(I - \Theta^-_+\Theta^+)\varkappa^r_+\widehat{\gamma}_+(f_0) - \Theta^-_+\pi^\dagger_- f_0, \quad \widehat{\gamma}_-(f_0) = \Theta^-_-\varkappa^r_-\widehat{\gamma}_-(f_0) - \pi^\dagger_+ f_0.$$

3) Имеем [3] $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e} \in (B : D)(G_\pm,[\mathfrak{N}])$. Следовательно, $(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e})^{-1} = 1/\delta_\pm\Omega_\pm$, где $\delta_\pm \in B_{out}(G_\pm,\mathbb{C})$, $\Omega_\pm \in B(G_\pm,[\mathfrak{N}])$. Пусть $\pi^\dagger_\mp f_0 = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}u_\pm$, $u_\pm \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. Тогда $\widehat{\gamma}_\pm(f_0) = -(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e})^{-1}u_\pm = 1/\delta_\pm\Omega_\pm u_\pm \in D^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. Обратно, пусть $\widehat{\gamma}_\pm(f_0) = 1/\delta'_\pm v_\pm$, $\delta'_\pm \in B_{out}(G_\pm,\mathbb{C})$, $v_\pm \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. Тогда $\pi^\dagger_\mp f_0 = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}u_\pm$, $u_\pm = -1/\delta'_\pm\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e}v_\pm \in D^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. И так как $u_\pm = (\Theta^\pm_{\cdot\varkappa i})^{-1}\pi^\dagger_\mp f_0 \in L^2(G_\pm,\mathfrak{N})$, то в силу принципа максимума Смирнова [29] имеем $u_\pm \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. •

Рассмотрим теперь поднятие спектральных компонент в пространство „дилатации“ $\mathcal{H}$. Положим

$$\begin{aligned}
M_\omega(\Pi,\varkappa) &= \{f \in \mathcal{H} : \Theta^-_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_+ f)(z) = \Theta^+_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_- f)(z),\ z \in \omega\};\\
N_\pm(\Pi,\varkappa) &= \{f \in \mathcal{H} : P_\pm(\varkappa^l_+\pi^\dagger_- + \varkappa^l_-\pi^\dagger_+)f = 0\};\\
D_\pm(\Pi,\varkappa) &= \{f \in \mathcal{H} : \pi^\dagger_\mp f \in \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}E^2(G_\pm,\mathfrak{N})\};\\
N(\Pi,\varkappa) &= \{f \in \mathcal{H} : (\varkappa^l_+\pi^\dagger_- + \varkappa^l_-\pi^\dagger_+)f = 0\} = N_+(\Pi,\varkappa) \cap N_-(\Pi,\varkappa);\\
NM_\pm(\Pi,\varkappa) &= \{f \in N_\pm(\Pi,\varkappa) : \tau^\dagger_\mp f = 0\};\\
DM_\pm(\Pi,\varkappa) &= D_\pm(\Pi,\varkappa) \cap M(\Pi,\varkappa).
\end{aligned}$$

Введем также обозначения $\omega_k = \{z \in C : \|\Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}\| \leqslant k,\ \|\Theta^\pm_{\varkappa\cdot}(z)^{-1}\| \leqslant k\}$; $\chi_{\omega_k}(z)$ — индикатор множества ω_k. Отметим, что $\lim_{k\to\infty}\mathrm{mes}(C \setminus w_k) = 0$.

Предложение 3.3.

1) $X \in \mathcal{A} \Longrightarrow \operatorname{clos} X(\Pi,\varkappa) = X(\Pi,\varkappa)$;
2) $X \in \{N_\pm, NM_\pm, D_\mp, DM_\mp\}$, $\psi \in B(G_\mp,\mathbb{C}) \Longrightarrow \psi(U)X(\Pi,\varkappa) \subset X(\Pi,\varkappa)$;
3) $X \in \{M_\omega, N\}$, $\psi \in L^\infty(C,\mathbb{C}) \Longrightarrow \psi(U)X(\Pi,\varkappa) \subset X(\Pi,\varkappa)$.

Доказательство. 2), 3) следуют из равенств $\pi_\pm^\dagger\psi(U)f = \psi(z)\pi_\pm^\dagger f$, $\tau_\pm^\dagger\psi(U)f = \psi(z)\tau_\pm^\dagger f$ и определения поднятых спектральных компонент.

1) Следует из непрерывности отображений $\pi_\pm^\dagger$, $\tau_\pm^\dagger \in [\mathcal{H}, L^2(C,\mathfrak{N})]$. Чуть аккуратнее следует рассуждать для случая $X = M_\omega$. Здесь следует проверять равенство для векторов вида $\chi_{\omega_k}(U)f$. •

Покажем, что существуют и другие представления для поднятых спектральных компонент. Но предварительно установим некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 3.4. *Имеем*

1) $(\Theta^+_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_-^\dagger - (\Theta^-_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_+^\dagger = \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}\Delta^\pm(\Delta^\pm\varkappa^r_\mp(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \tau_\pm^\dagger)$;

2) $\varkappa^l_+\pi_-^\dagger + \varkappa^l_-\pi_+^\dagger = -\Theta^\pm_{\varkappa\cdot}\pi_\pm^\dagger + \varkappa^l_\pm\Delta^\pm\tau_\pm^\dagger$.

Доказательство. Из предложения 1.1, предложения 2.4, предложения 2.5 имеем

$$
\begin{aligned}
&(\Theta^+_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_-^\dagger - (\Theta^-_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_+^\dagger\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}(\pi_\mp^\dagger - \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}(\pi_\mp^\dagger(\pi_\pm\pi_\pm^\dagger + \tau_\pm\tau_\pm^\dagger) - \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(\Theta^\mp_{\cdot vk})^{-1}\pi_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}(\Theta^\pm\pi_\pm^\dagger + \Delta^\pm\tau_\pm^\dagger - \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}((\Theta^\pm\Theta^\mp_{\cdot\varkappa} - \Theta^\pm_{\cdot\varkappa})(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \Delta^\pm\tau_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}((-\Theta^\pm(\varkappa^r_\pm + \Theta^\mp\varkappa^r_\mp) + (\varkappa^r_\mp + \Theta^\pm\varkappa^r_\pm))(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \Delta^\pm\tau_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}((-\Theta^\pm\Theta^\mp\varkappa^r_\mp + \varkappa^r_\mp)(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \Delta^\pm\tau_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}((\Delta^\pm)^2\varkappa^r_\mp(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \Delta^\pm\tau_\pm^\dagger)\\
&\quad= \pm(\Theta^\pm_{\cdot\varkappa})^{-1}\Delta^\pm(\Delta^\pm\varkappa^r_\mp(\Theta^\mp_{\cdot\varkappa})^{-1}\pi_\pm^\dagger + \tau_\pm^\dagger).\\
&\varkappa^l_+\pi_-^\dagger + \varkappa^l_-\pi_+^\dagger = \varkappa^l_\mp\pi_\pm^\dagger + \varkappa^l_\pm\pi_\mp^\dagger(\pi_\pm\pi_\pm^\dagger + \tau_\pm\tau_\pm^\dagger)\\
&\quad= (\varkappa^l_\mp + \varkappa^l_\pm\Theta^\pm)\pi_\pm^\dagger + \varkappa^l_\pm\Delta^\pm\tau_\pm^\dagger = -\Theta^\pm_{\varkappa\cdot}\pi_\pm^\dagger + \varkappa^l_\pm\Delta^\pm\tau_\pm^\dagger. \quad \bullet
\end{aligned}
$$

Следствие. *Пусть* $\omega \subset C$. *Тогда* $\Theta^+_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi_-^\dagger f)(z) = \Theta^-_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi_+^\dagger f)(z)$ *при п.в.* $z \in \omega \iff (\tau_\pm^\dagger f)(z) = -\Delta^\pm(z)\varkappa^r_\mp(z)\Theta^\mp_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi_\pm^\dagger f)(z)$ *при п.в.* $z \in \omega$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\Omega^\sim \in B_{out}(\overline{G}_\pm[\mathfrak{N}])$, $u \in E^2(G_\mp,\mathfrak{N})$, $\Omega u \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. *Тогда* $u = 0$.

Доказательство. При любых $v \in E^2(\overline{G}_\pm,\mathfrak{N})$ имеем $0 = \langle\Omega u, v\rangle = \langle u, \Omega^\sim v\rangle$. Так как $\operatorname{clos}\Omega^\sim E^2(\overline{G}_\pm,\mathfrak{N}) = E^2(\overline{G}_\pm,\mathfrak{N})$, получаем, что $u \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$, и следовательно, $u = 0$. •

Лемма 3.6. *Пусть* $\Omega \in B(C_\pm, [\mathfrak{N}]$, $\Omega = \Omega_{*e}\Omega_{*i}$ — *внешне-внутренняя факторизация* [3]. *Тогда* $L_\Omega = L_{\Omega_{*i}}$.

Доказательство. $u \in L_{\Omega_{*i}} \implies P_\mp \Omega_{*i} u = 0 \implies P_\mp \Omega u = P_\mp \Omega_{*e}\Omega_{*i} u = P_\mp \Omega_{*e} P_\pm \Omega_{*i} u + P_\mp \Omega_{*e} P_\mp \Omega_{*i} u = 0 + 0 = 0 \implies u \in L_\Omega$.

Обратно, пусть $u \in L_\Omega$. Тогда $0 = P_\mp \Omega u = P_\mp \Omega_{*e} v_\mp$, $v_\mp = P_\mp \Omega_{*i} u$. Имеем $v_\mp \in E^2(G_\mp, \mathfrak{N})$, $\Omega_{*e} v_\mp \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$, откуда по лемме 3.5 получаем $v_\mp = 0$. Следовательно, $P_\mp \Omega_{*i} u = 0$, и $u \in L_{\Omega_{*i}}$. •

Предложение 3.7. *Имеем*

1) $M_\omega(\Pi, \varkappa) = \{f \in \mathcal{H} : (\tau_\pm^\dagger f)(z) = -\Delta^\pm(z)\varkappa^r_\mp(z)\Theta^\mp_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi_\pm^\dagger f)(z),\ z \in \omega\}$;
2) $N_\pm(\Pi, \varkappa) = \{f \in \mathcal{H} : \varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp P_\Theta f = \Theta^\pm_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_\pm Q_\pm f\}$;
3) $D_\pm(\Pi, \varkappa) = \pi_\mp \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} E^2(G_\pm, \mathfrak{N}) \oplus \operatorname{Ran} \tau_\mp$;
4) $N(\Pi, \varkappa) = \{f \in \mathcal{H} : \varkappa^l_+ \pi^\dagger_- P_\Theta f = \Theta^+_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_+ Q_+ f,\ \varkappa^l_- \pi^\dagger_+ P_\Theta f = \Theta^-_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_- Q_- f\}$;
5) $NM_\pm(\Pi, \varkappa) = \pi_\mp L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}} = \pi_\mp L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i}}$.

Доказательство. 1) Вытекает из следствия предложения 3.4. 2), 4) следуют из леммы 2.7.

3) Пусть $f = \pi_\mp \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} u_\pm + \tau_\mp g_\pm$, $u_\pm \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$, $g_\pm \in L^2(C, \mathfrak{N})$. Тогда $\pi^\dagger_\mp f = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} u_\pm \in \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$. Обратно, пусть $\pi^\dagger_\mp f = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} u_\pm$, $u_\pm \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$. Тогда $f = \pi_\mp \pi^\dagger_\mp f + \tau_\mp \tau^\dagger_\mp f = \pi_\mp \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i} u_\pm + \tau_\mp g_\pm$, $g_\pm = \tau^\dagger_\mp f \in L^2(C, \mathfrak{N})$.

5) Пусть $f \in NM_\pm(\Pi, \varkappa)$. Тогда $\tau^\dagger_\mp f = 0$, и, следовательно, $f = \pi_\mp u_\mp$, $u_\mp = \pi^\dagger_\mp f \in L^2(C, \mathfrak{N})$. По предложению 3.4(2) $(\varkappa^l_+ \pi^\dagger_- + \varkappa^l_- \pi^\dagger_+) f = -\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}\pi^\dagger_\mp f + \varkappa^l_\mp \Delta^\mp \tau^\dagger_\mp f = -\Theta^\mp_{\varkappa\cdot} u_\mp$. Имеем $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa) \implies P_\pm \Theta^\mp_{\varkappa\cdot} u_\mp = -P_\pm(\varkappa^l_+ \pi^\dagger_- + \varkappa^l_- \pi^\dagger_+) f = 0 \implies \Theta^\mp_{\varkappa\cdot} u_\mp \in E^2(G_\mp, \mathfrak{N}) \implies u_\mp \in L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}}$.

Обратно, $f = \pi_\mp u_\mp$, $u_\mp \in L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}} \implies P_\pm(\varkappa^l_+ \pi^\dagger_- + \varkappa^l_- \pi^\dagger_+) f = -P_\pm \Theta^\mp_{\varkappa\cdot} u_\mp = 0 \implies f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$. Кроме того, $\tau^\dagger_\mp f = \tau^\dagger_\mp \pi_\mp u_\mp = 0 \implies f \in NM_\pm(\Pi, \varkappa)$. •

Предложение 3.8. *Пусть* $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f$. *Тогда* $\tau^\dagger_\mp f = \tau^\dagger_\mp f_0 + \Delta^\mp (\Theta^\pm_{\varkappa\cdot})^{-1} \varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0$.

Доказательство. Пусть $u_+ = \pi^\dagger_+ Q_+ f$, $u_- = \pi^\dagger_- Q_- f$. Тогда $f = \pi_- u_- + f_0 + \pi_+ u_+$. Из предложения 3.7(2) $u_\pm = (\Theta^\pm_{\varkappa\cdot})^{-1} \varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0$. Следовательно, $\tau^\dagger_\mp f = \tau^\dagger_\mp f_0 + \tau^\dagger_\mp \pi_\pm u_\pm = \tau^\dagger_\mp f_0 + \Delta^\mp (\Theta^\pm_{\varkappa\cdot})^{-1} \varkappa^l_\pm \pi^\dagger_\mp f_0$. •

Предложение 3.9. 1) $X \in \mathcal{A}_i \implies \widetilde{X}(\widehat{S}, \widehat{M}) = X(\Pi, \varkappa) \cap \mathcal{K}_\Theta$;

2) $X \in \mathcal{A}_c \implies \widetilde{X}(\widehat{S}, \widehat{M}) = P_\Theta X(\Pi, \varkappa)$.

Доказательство. 1) Очевидно.

2) a) $X = N_\pm$. Пусть $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f$. Согласно предложению 3.7(2) имеем $\varkappa_\pm^l \pi_\mp^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^\pm E^2(G_\pm, \mathfrak{N}) \implies f_0 \in \widetilde{N}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M})$. Обратно, пусть теперь $f_0 \in \widetilde{N}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M})$. Тогда $\varkappa_\pm^l \pi_\mp^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^\pm u_\pm$, $u_\pm \in E^2(G_\pm, \mathfrak{N})$. Возьмем $f = f_0 + \pi_\pm u_\pm$. По предложению 3.7(2) $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f$.

б) $X = N$. Пусть $f \in N(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f$. Согласно предложению 3.7(4) имеем $\varkappa_+^l \pi_-^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^+ E^2(G_+, \mathfrak{N})$, $\varkappa_-^l \pi_+^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^- E^2(G_-, \mathfrak{N}) \implies f_0 \in \widetilde{N}_+(\widehat{S}, \widehat{M}) \cap \widetilde{N}_-(\widehat{S}, \widehat{M}) = \widetilde{N}(\widehat{S}, \widehat{M})$. Обратно, пусть $f_0 \in \widetilde{N}(\widehat{S}, \widehat{M})$. Тогда $\varkappa_+^l \pi_-^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^+ u_+$, $u_+ \in E^2(G_+, \mathfrak{N})$, $\varkappa_-^l \pi_+^\dagger f_0 \in \Theta_\varkappa^- u_-$, $u_- \in E^2(G_-, \mathfrak{N})$. Возьмем $f = \pi_- u_- + f_0 + \pi_+ u_+$. По предложению 3.7(4) $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f$.

с) $X = NM_\pm$. Пусть $f \in NM_\pm(\Pi, \varkappa)$. Тогда $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $f_0 = P_\Theta f \in \widetilde{N}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M})$. Если $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, то по предложению 3.8 $\tau_\mp^\dagger f = \tau_\mp^\dagger f_0 + \Delta^\mp (\Theta_\varkappa^\pm)^{-1} \varkappa_\pm^l \pi_\mp^\dagger f_0$. Следовательно (при условии $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$), имеем $\tau_\mp^\dagger f = 0 \iff \tau_\mp^\dagger f_0 + \Delta^\mp (\Theta_\varkappa^\pm)^{-1} \varkappa_\pm^l \pi_\mp^\dagger f_0 = 0 \iff$ (см. предложение 3.7(1)) $f_0 \in M(\Pi, \varkappa)$, $f_0 \in K_\Theta \iff f_0 \in \widetilde{M}(\widehat{S}, \widehat{M})$. Тогда $f_0 \in \widehat{N}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M}) \cap \widetilde{M}(\widehat{S}, \widehat{M}) = \widetilde{NM}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M})$. Обратно, пусть $f_0 \in \widetilde{NM}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M}) \implies f_0 \in \widetilde{N}_\pm(\widehat{S}, \widehat{M}) \implies f_0 = P_\Theta f$, $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$. Далее, $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$ и $f_0 \in \widetilde{M}(\widehat{S}, \widehat{M}) \iff$ (см. выше) $\tau_\mp^\dagger f = 0$. Следовательно, $f \in NM_\pm(\Pi, \varkappa)$. •

Следствие. $X \in \mathcal{A}_i \implies \operatorname{clos} \widetilde{X}(\widehat{S}, \widehat{M}) = \widetilde{X}(\widehat{S}, \widehat{M})$.

Доказательство. Это следует из замкнутости $X(\Pi, \varkappa)$ и K_Θ. •

Предложение 3.10. *Имеем*

1) $(\widehat{S} - a)^{-1} P_\Theta f = P_\Theta (U - a)^{-1} f$, $f \in N_\pm(\Pi, \varkappa)$, $a \in G_\pm \cap \rho(\widehat{S})$;

2) $(\widehat{S} - a)^{-1} P_\Theta f = P_\Theta (U - a)^{-1} f$, $f \in N(\Pi, \varkappa)$, $a \in \rho(\widehat{S}) \setminus C$;

3) $(\widehat{S} - a)^{-1} P_\Theta \pi_\mp u_\mp = P_\Theta \pi_\mp 1/(z - a) u_\mp$, $u_\mp \in L_{\Theta_\varkappa^\mp}$, $a \in G_\pm \cap \rho(\widehat{S})$.

Доказательство. 1) Следует из предложения 2.8(2) и определения $N_\pm(\Pi, \varkappa)$. 2), 3) — простые следствия 1). •

Замечания. Это предложение можно переписать в виде

1) $N_\pm(\Pi, \varkappa) \subset \bigcap_{a \in G_\pm} \operatorname{Ker}(P_\Theta - (\widehat{S} - a) P_\Theta (U - a)^{-1})$;

2) $N(\Pi, \varkappa) \subset \bigcap_{a \in G_+ \cup G_-} \operatorname{Ker}(P_\Theta - (\widehat{S} - a) P_\Theta (U - a)^{-1})$;

3) $L_{\Theta_\varkappa^\mp} \subset \bigcap_{a \in G_\pm} \operatorname{Ker}(P_\Theta \pi_\mp - (\widehat{S} - a) P_\Theta \pi_\mp 1/(z - a))$.

Отметим, что если $\operatorname{Ker} \widehat{N} = \{0\}$, то в 1)–3) можно заменить знак „$\subset$“ на „$=$“.

Немного подробнее обсудим свойства $N(\Pi, \varkappa)$. В дальнейшем будет полезна

Лемма 3.11. $\operatorname{clos}\tau_\pm\tau_\pm^\dagger N(\Pi,\varkappa)=\operatorname{Ran}\tau_\pm$.

Доказательство. Пусть $f\in\mathcal{H}$. Тогда, согласно предложению 3.4(2), имеем $g=\pi_\pm(\Theta_{\varkappa\cdot}^\pm)^{-1}\varkappa_\pm^l\Delta^\pm\chi_{\omega_\kappa}\tau_\pm^\dagger f+\tau_\pm\chi_{\omega_\kappa}\tau_\pm^\dagger f\in N(\Pi,\varkappa)$. Тогда получаем $\tau_\pm\tau_\pm^\dagger g=\tau_\pm\tau_\pm^\dagger\tau_\pm\chi_{\omega_\kappa}\tau_\pm^\dagger f=\tau_\pm\tau_\pm^\dagger\chi_{\omega_\kappa}(U)f$ и, так как $f=\lim_{\kappa\to\infty}\chi_{\omega_\kappa}(U)f$, имеем $\operatorname{clos}\tau_\pm\tau_\pm^\dagger N(\Pi,\varkappa)=\tau_\pm\tau_\pm^\dagger\mathcal{H}=\operatorname{Ran}\tau_\pm$. •

Займемся теперь локальным вариантом абсолютно непрерывного подпространства. Положим

$$\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)=\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M})\cap\widetilde{M}_{C\setminus\omega}(\widehat{S},\widehat{M}),\quad \omega\subset C,$$
$$N(\Pi,\varkappa,\omega)=\{f\in N(\Pi,\varkappa):(\tau_+^\dagger f)(z)=0,z\in C\setminus\omega\}.$$

Отметим, что вместо $\tau_+^\dagger$ можно было использовать и $\tau_-^\dagger$. Очевидно, что $(\widehat{S}-a)^{-1}\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)=\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)$, $\psi(U)N(\Pi,\varkappa,\omega)=N(\Pi,\varkappa,\omega)$, $\psi\in L^\infty(C,\mathfrak{N})$, $\operatorname{clos}N(\Pi,\varkappa,\omega)=N(\Pi,\varkappa,\omega)$.

Лемма 3.12. $\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)=P_\Theta N(\Pi,\varkappa,\omega)$.

Доказательство. Пусть $f\in N(\Pi,\varkappa,\omega)\subset N_-(\Pi,\varkappa)$, $f_0=P_\Theta f$. Тогда имеем (см. доказательство предложения 3.9(2)) $(\tau_+^\dagger f)(z)=0$, $z\in C\setminus\omega\iff f_0\in\widetilde{M}_{C\setminus\omega}(\widehat{S},\widehat{M})$. По предложению 3.9(2) $f_0\in\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M})$. Следовательно, $P_\Theta N(\Pi,\varkappa,\omega)\subset\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)$. Обратно, пусть $f_0\in\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)$. Тогда $f_0=P_\Theta f$, $f\in N(\Pi,\varkappa)$, для которого $(\tau_+^\dagger f)(z)=0$, $z\in C\setminus\omega$. •

Предложение 3.13. *Пусть* $\omega_k'\subset\omega_{k+1}'$, $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{mes}(C\setminus\omega_k')=0$. *Тогда* $\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M})=\operatorname{clos}\bigcup_{k=1}^\infty\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega_k')$.

Доказательство. Пусть $f_0\in\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M})$. Тогда $f_0=P_\Theta f$, $f\in N(\Pi,\varkappa)$. Возьмем $f_k=\chi_{\omega_k'}(U)f\in N(\Pi,\varkappa,\omega_k')$. Очевидно, $f=\lim\limits_{k\to\infty}f_k$. Тогда в силу леммы 3.12 $f_0=\lim\limits_{k\to\infty}P_\Theta f_k$, $P_\Theta f_k\in\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega_k')$. •

Предложение 3.14. *Пусть* $\omega\subset\omega_k$. *Тогда* $N(\widehat{S},\widehat{M},\omega)=\widetilde{N}(\widehat{S},\widehat{M},\omega)$, *и оператор* $(P_\Theta|N(\Pi,\varkappa,\omega))^{-1}\in[N(\widehat{S},\widehat{M},\omega),\ N(\Pi,\varkappa,\omega)]$ *осуществляет подобие между* $\widehat{S}|N(\widehat{S},\widehat{M},\omega)$ *и* $U|N(\Pi,\varkappa,\omega)$, *причем* $\operatorname{supp}U|N(\Pi,\varkappa,\omega)\subset\omega$ *и* $(P_\Theta|N(\Pi,\varkappa,\omega))^{-1}f_0=f_0+\pi_+(\Theta_{\varkappa\cdot}^+)^{-1}\varkappa_+^l\pi_-^\dagger f_0+\pi_-(\Theta_{\varkappa\cdot}^-)^{-1}\varkappa_-^l\pi_+^\dagger f_0$.

Доказательство. Отображение $f_0\mapsto f=(P_\Theta|N(\Pi,\varkappa,\omega))^{-1}f_0$, согласно предложениям 3.8 и 3.4(2) можно представить в виде композиции трех отображений $f_0\mapsto\tau_+^\dagger f=\tau_+^\dagger f_0+\Delta^+(\Theta_{\varkappa\cdot}^{-1})^{-1}\varkappa_-^l\pi_+^\dagger f_0$, $\tau_+^\dagger f\mapsto\pi_+^\dagger f=(\Theta_{\varkappa\cdot}^+)^{-1}\varkappa_+^l\Delta^+\tau_+^\dagger f$,

$f = \pi_+\pi_+^\dagger f + \tau_+\tau_+^\dagger f$. Так как $(\tau_+^\dagger f)(z) = 0$, $z \in C \setminus \omega$, первые два из них ограниченные. Подобие следует из предложения 3.10. Из определения второго отображения следует $(\pi_+^\dagger f)(z) = 0$, $z \in C \setminus \omega$. Тогда равенство $Uf = \pi_+ z\pi_+^\dagger f + \tau_+ z\tau_+^\dagger f$ означает, что спектральная мера $U|N(\Pi, \varkappa, \omega)$ имеет носитель в ω. Формула для $(P_\Theta|N(\Pi, \varkappa, \omega))^{-1}$ следует из предложения 3.7(4). •

§4. Двойственность спектральных компонент

4.1. Двойственность для модельных компонент. Предварительно докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. $\langle \tau_\pm^\dagger f, \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle = (\tau_\pm\tau_\pm^\dagger f, \tau_{*\mp}\tau_{*\mp}^\dagger g)$, $f, g \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Следует из равенства $(u, v) = \langle \pi_\pm^\dagger u, \pi_{*\mp}^\dagger v\rangle + \langle \tau_\pm^\dagger u, \tau_{*\mp}^\dagger v\rangle$, если взять в нем $u = \tau_\pm\tau_\pm^\dagger f$, $v = \tau_{*\mp}\tau_{*\mp}^\dagger g$. •

Лемма 4.2. *Пусть* $\delta \in B_{out}(G_\pm, \mathbb{C})$. *Тогда* $\operatorname{clos}\delta(U)N_\mp(\Pi, \varkappa) = N_\mp(\Pi, \varkappa)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\delta \in B_{out}(G_+, \mathbb{C})$. Пусть $\varphi \in CM(\mathbb{D}, G_+)$. Положим $U_0 = \varphi^{-1}(U)$. Очевидно, $\varphi^{-1} \in B(G_+, \mathbb{C})$. В силу предложения 3.3(2) имеем $U_0N_-(\Pi, \varkappa) \subset N_-(\Pi, \varkappa)$. Нетрудно видеть, что U_0 — унитарный оператор. Тогда $U_0|N_-(\Pi, \varkappa)$ — изометрический оператор. Используя разложение Вольда и определение внешней функции [3], получаем $\operatorname{clos}\delta(U)N_-(\Pi, \varkappa) = \operatorname{clos}(\delta \circ \varphi)(U_0)N_-(\Pi, \varkappa) = N_-(\Pi, \varkappa)$. Случай $\delta \in B_{out}(G_-, \mathbb{C})$ получается из предыдущего путем дробно-линейного преобразования. •

Предложение 4.3. *Пусть для оператор-функций имеем*

$$\Theta_\pm^- \in B(G_\pm, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta^+ \in (B:F)(G_+, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta_{\varkappa\cdot}^\pm, \Theta_{\cdot\varkappa}^\pm \in (B:N)(G_\pm, [\mathfrak{N}]).$$

Тогда

1) $N(\Pi, \varkappa)^\perp = M(\Pi_*, \varkappa_*)$;
2) $NM_\pm(\Pi, \varkappa)^\perp = D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$;
3) $N_\pm(\Pi, \varkappa)^\perp = DM_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in N(\Pi, \varkappa)$. Тогда, согласно предложению 3.4(2), имеем при любом $g \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(f, g) &= \langle \pi_\pm^\dagger f, \pi_{*\mp}^\dagger g\rangle + \langle \tau_\pm^\dagger f, \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle = \langle (\Theta_{\varkappa\cdot}^\pm)^{-1}\varkappa_\pm^l\Delta^\pm\tau_\pm^\dagger f, \pi_{*\mp}^\dagger g\rangle + \langle \tau_\pm^\dagger f, \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle \\ &= \langle \tau_\pm^\dagger f, (\Delta^\pm)^\sim(\varkappa_\pm^l)^\sim(\Theta_{\varkappa\cdot}^\pm)^{-1\sim}\pi_{*\mp}^\dagger g + \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle \\ &= \langle \tau_\pm^\dagger f, \Delta_*^\mp\varkappa_{*\pm}^r(\Theta_{*\cdot\varkappa}^\pm)^{-1}\pi_{*\mp}^\dagger g + \tau_{*\mp}^\dagger g\rangle.\end{aligned}$$

Если $g \in M(\Pi_*, \varkappa_*)$, то по предложению 3.7(1) $\tau^\dagger_{*\mp} g = -\Delta^\mp_* \varkappa^r_{*\pm}(\Theta^\pm_{*\cdot\varkappa})^{-1}\pi^\dagger_{*\mp} g$. Следовательно, $(f, g) = \langle \tau^\dagger_\pm f, 0\rangle = 0 \implies M(\Pi_*, \varkappa_*) \subset N(\Pi, \varkappa)^\perp$.

Обратно, пусть $g \in N(\Pi, \varkappa)^\perp$. Тогда, согласно лемме 4.1, и, так как $\operatorname{clos}\operatorname{Ran}\Delta^\pm_* = \operatorname{Ran}\tau_{*\pm}$, получаем

$$\begin{aligned}0 &= (\chi_{\omega_k}(U) f, g) = \langle \chi_{\omega_k}\tau^\dagger_\pm f, \Delta^\mp_*\varkappa^r_{*\pm}(\Theta^\pm_{*\cdot\varkappa})^{-1}\pi^\dagger_{*\mp} g + \tau^\dagger_{*\mp} g\rangle \\ &= \langle \tau^\dagger_\pm f, \chi_{\overline{\omega}_k}\Delta^\mp_*\varkappa^r_{*\pm}(\Theta^\pm_{*\cdot\varkappa})^{-1}\pi^\dagger_{*\mp} g + \chi_{\overline{\omega}_k}\tau^\dagger_{*\mp} g\rangle \\ &= (\tau_\pm\tau^\dagger_\pm f, \tau_{*\mp}(\chi_{\overline{\omega}_k}\Delta^\mp_*\varkappa^r_{*\pm}(\Theta^\pm_{*\cdot\varkappa})^{-1}\pi^\dagger_{*\mp} g + \chi_{\overline{\omega}_k}\tau^\dagger_{*\mp} g)).\end{aligned}$$

Используя лемму 3.11 и равенство $\operatorname{Ran}\tau_\pm = \operatorname{Ran}\tau_{*\mp}$, для любого k получаем $\chi_{\overline{\omega}_k}(\Delta^\mp_*\varkappa^r_{*\varkappa}(\Theta^\pm_{*\cdot\varkappa})^{-1}\pi^\dagger_{*\mp} g + \tau^\dagger_{*\mp} g) = 0$. Тогда по предложению 3.7(1) $g \in M(\Pi_*, \varkappa_*)$. Следовательно, $N(\Pi, \varkappa)^\perp \subset M(\Pi_*, \varkappa_*)$.

2) Пусть $f \in NM_\pm(\Pi, \varkappa)$. Тогда по предложению 3.7(5) $f = \pi_\mp u_\mp$, $u_\mp \in L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i}}$. Пусть $g \in D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$. По определению $D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$ имеем $\pi^\dagger_{*\pm} g = \Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i} v_\mp$, $v_\mp \in E^2(\overline{G}_\mp, \mathfrak{N})$. Тогда в силу того, что $\Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i} u_\mp \in E^2(G_\mp, \mathfrak{N})$, имеем

$$\begin{aligned}(f, g) &= \langle \pi^\dagger_\mp f, \pi^\dagger_{*\pm} g\rangle + \langle \tau^\dagger_\mp f, \tau^\dagger_{*\pm} g\rangle = \langle u_\mp, \pi^\dagger_{*\pm} g\rangle \\ &= \langle u_\mp, \Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i} v_\mp\rangle = \langle (\Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i})^\sim u_\mp, v_\mp\rangle = \langle \Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i} u_\mp, v_\mp\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $NM_\pm(\Pi, \varkappa) \subset D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)^\perp$. Обратно, пусть $f \in D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)^\perp$. Возьмем $g = \tau_{*\pm} h \in D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$, где $h \in L^2(\overline{C}, \mathfrak{N})$ (см. предложение 3.7(3)). Тогда по лемме 4.1

$$0 = (f, g) = \langle \tau^\dagger_\mp f, \tau^\dagger_{*\pm}\tau_{*\pm} h\rangle = (\tau_\mp\tau^\dagger_\mp f, \tau_{*\pm}\tau^\dagger_{*\pm}\tau_{*\pm} h) = (\tau_\mp\tau^\dagger_\mp f, \tau_{*\pm} h).$$

Так как $\operatorname{Ran}\tau_\pm = \operatorname{Ran}\tau_{*\mp}$, получаем $\tau_\mp\tau^\dagger_\mp f = 0 \implies \tau^\dagger_\mp f = \tau^\dagger_\mp\tau_\mp\tau^\dagger_\mp f = 0 \implies f = \pi_\mp u_\mp$, $u_\mp \in L^2(C, \mathfrak{N})$. Возьмем теперь $g = \pi_{*\pm}\Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i} v_\mp \in D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)$, $v_\mp \in E^2(\overline{G}_\mp, \mathfrak{N})$ (см. предложение 3.7(3)). Тогда имеем

$$0 = (f, g) = (\pi_\mp u_\mp, \pi_{*\pm}\Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i} v_\mp) = \langle u_\mp, \Theta^\mp_{*\cdot\varkappa i} v_\mp\rangle = \langle \Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i} u_\mp, v_\mp\rangle.$$

В силу произвольности $v_\mp \in E^2(\overline{G}, \mathfrak{N})$ получаем $\Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i} u_\mp \in E^2(G_\mp, \mathfrak{N})$. Следовательно, $u_\mp \in L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot *i}} \implies D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)^\perp \subset NM_\pm(\Pi, \varkappa)$.

3) Имеем

$$DM_\mp(\Pi_*, \varkappa_*)^\perp = (D_\mp(\Pi_*, \varkappa_*) \cap M(\Pi_*, \varkappa_*))^\perp = NM_\pm(\Pi, \varkappa) \vee N(\Pi, \varkappa) \subset N_\pm(\Pi, \varkappa).$$

Обратно, пусть $g \in DM_{\mp}(\Pi_*, \varkappa_*)$. Тогда $g \in D_{\mp}(\Pi_*, \varkappa_*) \implies \pi_{*\pm}^{\dagger} g = \Theta_{*\cdot\varkappa i}^{\mp} v_{\mp}$, $v_{\mp} \in E^2(\overline{G}_{\mp}, \mathfrak{N})$. С другой стороны, $g \in M(\Pi_*, \varkappa_*) \implies$ (см. предложение 3.7(1)), $\tau_{*\pm}^{\dagger} g = -\Delta_*^{\pm} \varkappa_{*\mp}^{r} (\Theta_{*\cdot\varkappa}^{\mp})^{-1} \pi_{*\pm}^{\dagger} g = -\Delta_*^{\pm} \varkappa_{*\mp}^{r} (\Theta_{*\cdot\varkappa e}^{\mp})^{-1} v_{\mp}$. Далее, имеем

$$\Theta_{*\cdot\varkappa e}^{\mp} \in (B:D)(\overline{G}_{\mp}, [\mathfrak{N}]) \implies \exists \delta_{\mp} \in B_{out}(G_{\mp}, \mathbb{C}) : \delta_{\mp} (\Theta_{\varkappa *e}^{\mp})^{-1} \in B(G_{\mp}, [\mathfrak{N}]).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\delta_{\mp}(U) f, g) &= \langle \delta_{\mp} \pi_{\mp}^{\dagger} f, \pi_{*\pm}^{\dagger} g\rangle + \langle \delta_{\mp} \tau_{\mp}^{\dagger} f, \tau_{*\pm}^{\dagger} g\rangle \\ &= \langle \delta_{\mp} \pi_{\mp}^{\dagger} f, \Theta_{*\cdot\varkappa i}^{\mp} v_{\mp}\rangle + \langle \delta_{\mp} \tau_{\mp}^{\dagger} f, -\Delta_*^{\pm} \varkappa_{*\mp}^{r} (\Theta_{*\cdot\varkappa e}^{\mp})^{-1} v_{\mp}\rangle \\ &= \langle \delta_{\mp} (\Theta_{\varkappa\cdot *e}^{\mp})^{-1} (\Theta_{\varkappa\cdot}^{\mp} \pi_{\mp}^{\dagger} f - \varkappa_{\mp}^{l} \Delta^{\mp} \tau_{\mp}^{\dagger} f), v_{\mp}\rangle.\end{aligned}$$

Возьмем $f \in N_{\pm}(\Pi, \varkappa)$. Согласно предложению 3.4(2) и определению $N_{\pm}(\Pi, \varkappa)$, имеем $\Theta_{\varkappa\cdot}^{\mp} \pi_{\mp}^{\dagger} f - \varkappa_{\mp}^{l} \Delta^{\mp} \tau_{\mp}^{\dagger} f \in E^2(G_{\mp}, \mathfrak{N})$. Так как $v_{\mp} \in E^2(\overline{G}_{\mp}, \mathfrak{N})$, получаем $(\delta_{\mp}(U) f, g) = 0 \implies \delta_{\mp}(U) N_{\pm}(\Pi, \varkappa) \perp DM_{\mp}(\Pi_*, \varkappa_*)$, и по лемме 4.2 $N_{\pm}(\Pi, \varkappa) \perp DM_{\mp}(\Pi_*, \varkappa_*) \implies N_{\pm}(\Pi, \varkappa) \subset DM_{\mp}(\Pi_*, \varkappa_*)^{\perp}$. •

Следствие. $N_{\pm}(\Pi, \varkappa) = N(\Pi, \varkappa) \vee NM_{\pm}(\Pi, \varkappa)$.

Лемма 4.4. *Пусть* $W, W_* \in [H, \mathcal{H}]$, $WW_*^* = P$, $W_*^* W = I$, $P^2 = P$, *пусть* K — *подпространство в* H. *Тогда* $W_*^* \operatorname{clos} PK \oplus W^*(\operatorname{Ran} P^* \cap K^{\perp}) = H$.

Доказательство. Так как $P^* = W_* W^*$, $W_* = W_* W^* W_* = P^* W_*$, имеем $\operatorname{Ran} W_* = \operatorname{Ran} P^*$. Далее, $W_*^* \operatorname{clos} PK = \operatorname{clos} W_*^* PK = \operatorname{clos} W_*^* W W_*^* K = \operatorname{clos} W_*^* K$. Поэтому достаточно доказать, что $\operatorname{clos} W_*^* K \oplus W^*(\operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp}) = H$. Пусть $f \in K$, $g \in \operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp}$. Тогда $g \in \operatorname{Ran} P^*$, $P^* g = g$, откуда получаем $(W_*^* f, W^* g) = (f, W_* W^* g) = (f, P^* g) = (f, g) = 0$. Следовательно, $(W_*^* K)^{\perp} \supset W^*(\operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp})$. Обратно, пусть $h \in (W_*^* K)^{\perp}$. Тогда для любого $f \in K$ имеем $0 = (W_*^* f, h) = (f, W_* h) \implies g = W_* h \in \operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp}$; тогда $h = W^* W_* h = W^* g \in W^*(\operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp})$, т.е. $(W_*^* K)^{\perp} \subset W^*(\operatorname{Ran} W_* \cap K^{\perp})$. •

Предложение 4.5. *Пусть* $(S, M, N, \varkappa) \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Sys}_{\varkappa})$. *По предложению* 2.2 *для* $(S, M, N, \varkappa)$ *существует модель* $(\widehat{S}, \widehat{M}, \widehat{N}, \varkappa)$. *Пусть* $(\widehat{S}, \widehat{M}, \widehat{N}, \varkappa)$ *удовлетворяет условиям предложения* 4.3. *Тогда* 1) $N(S, M)^{\perp} = M(S^*, N^*)$; 2) $N_{\pm}(S, M)^{\perp} = DM_{\mp}(S^*, N^*)$; 3) $NM_{\pm}(S, M)^{\perp} = D_{\mp}(S^*, N^*)$.

Доказательство. 1) Положим в лемме 4.4 $K = N(\Pi, \varkappa)$. Тогда по предложению 4.3(1) $K^{\perp} = M(\Pi_*, \varkappa_*)$. Согласно предложения 3.9, $\widetilde{N}(\widehat{S}, \widehat{M}) = P_{\Theta} N(\Pi, \varkappa)$, $M(\widehat{S}_*, \widehat{M}_*) = \operatorname{Ran} P_{\Theta}^* \cap M(\Pi_*, \varkappa_*)$. По предложению 3.1(2) имеем $\widetilde{N}(S, M) = W_*^* \widetilde{N}(\widehat{S}, \widehat{M})$, $\widetilde{M}(S^*, N^*) = W^* \widetilde{N}(\widehat{S}_*, \widehat{M}_*)$. Тогда из леммы 4.4 получаем $N(S, M)^{\perp} = M(S^*, N^*)$. Аналогичным образом доказываются 2) $K = N_{\pm}(\Pi, \varkappa)$ и 3) $K = NM_{\pm}(\Pi, \varkappa)$. •

Следствие. $N_\pm(S,M) = N(S,M) \vee NM_\pm(S,M)$.

4.2. Слабые спектральные компоненты и двойственность. Будем предполагать, что при любых $f, g \in H$ существуют угловые граничные значения $((S-z)^{-1}, g)_\pm$ для почти всех $z \in C$. Слабые описания спектральных компонент приведены во Введении. Здесь же мы чуть подробнее остановимся на абсолютно непрерывном пространстве (см. [11, 12, 16] относительно приведенных здесь фактов). Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\omega \subset C$. Положим

$$\widetilde{N}^p(S,\omega) = \Big\{ f \in H : \forall g \in H\, \exists e(f,g,z) \in L^p(\omega,\mathbb{C})\, \forall a \in \rho(S)\quad ((S-a)^{-1}f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\omega \frac{e(f,g,z)}{z-a}dz \Big\}.$$

Отметим, что $e(f,g,z) = e_S(f,g,z) = ((S-z)^{-1}f,g)_+ - ((S-z)^{-1}f,g)_-$. Будем говорить, что $S \in A_\omega$, если $\exists C(\omega) \forall f, g \in H (\|e_S(f,g,z)\|_{L_1(\omega)} \leqslant C(\omega)\|f\|\|g\|)$. В этом случае $N^1(S,\omega) = \widetilde{N}^1(S,\omega)$, и существует оператор $E_S(\omega) \in [H]$ такой, что $E_S(\omega)^2 = E_S(\omega)$, $\operatorname{Ran} E_S(\omega) = N^1(S,\omega)$, $\operatorname{Ker} E_S(\omega) = M_{C\setminus\omega}(S)$. Если же существуют $\omega_k \subset C, k \in \mathbb{N}$, такие что $\omega_k \subset \omega_{k+1}$, $S \in A_{\omega_k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes}(C \setminus \omega_k) = 0$, то

$$N(S,\omega) = N^p(S,\omega) = \operatorname{clos} \widetilde{N}^p(S,\omega) = \operatorname{clos} \bigcup_{k=1}^{\infty} N^1(S, \omega \cap \omega_k).$$

Отметим, что $N(S,\omega)$ не зависит от p.

Перейдем теперь к описанию универсальных свойств слабых спектральных компонент. Но предварительно заметим, что если $X \in \mathcal{A}$, то $\widetilde{X}(S) = \{f \in H : \forall g \in H\ ((S-z)^{-1}f, g) \in (*)\}$, где $(*)$ означает некоторое условие (свое для каждого X).

Предложение 4.6. *Пусть $X \in \mathcal{A}$. Тогда*

1) $BS = SB \implies B\widetilde{X}(S) \subset \widetilde{X}(S)$;
2) $\forall a \in \rho(S)(S-a)^{-1}H_1 \subset H_1 \implies \widetilde{X}(S|H_1) = \widetilde{X}(S) \cap H_1$;
3) $Z_{21} \in [H_1, H_2]$, $Z_{21}^{-1} \in [H_2, H_1]$, $Z_{21}S_1 = S_2 Z_{21} \implies Z_{21}\widetilde{X}(S_1) = \widetilde{X}(S_2)$;
4) $P_+^2 = P_+$, $P_- = I - P_+$, $H_\pm = P_\pm H$, $SP_\pm = P_\pm S \implies \widetilde{X}(S) = \widetilde{X}(S|H_+) + \widetilde{X}(S|H_-)$;
5) $(z_2 = \varphi(z_1) = (az_1 + b)/(cz_1 + d))$ *или* $(\varphi \in CM(G'_+, \varphi(G'_+))$, $G_+ \subset G'_+, \sigma(S) \subset G'_+$, $X \in \mathcal{A} \setminus \{D_-, DM_-\}) \implies \widetilde{X}(\varphi(S)) = \widetilde{X}(S)$.

Доказательство. 1) $f \in \widetilde{X}(S) \implies ((S-z)^{-1}Bf, g) = (B(S-z)^{-1}f, g) = ((S-z)^{-1}f, B^*g) \in (*) \implies Bf \in \widetilde{X}(S)$.

2) $f \in \widetilde{X}(S|H_1) \implies f \in H_1, \forall g \in H$ $((S-z)^{-1}f,g) = ((S|H_1 - z)^{-1}f,g) \in (*) \implies f \in \widetilde{X}(S) \cap H_1$. Обратно, $f \in \widetilde{X}(S) \cap H_1 \implies \forall g \in H_1$ $((S|H_1 - z)^{-1}f,g) = ((S-z)^{-1}f,g) \in (*) \implies f \in \widetilde{X}(S|H_1)$.

3) $f \in \widetilde{N}(S_1) \implies ((S_2 - z)^{-1}Z_{21}f,g) = (Z_{21}(S_1 - z)^{-1}f,g) = ((S_1 - z)^{-1}f, Z_{21}^*g) \in (*) \implies Z_{21}f \in \widetilde{N}(S_2)$.

4) Случай $P_+^* = P_+$ очевиден. Сведем общий случай к нему. Пусть $P_+^* \neq P_+$. Возьмем $H' = H'_+ \oplus H'_-$ такое, что $\dim H'_\pm = \dim H_\pm$. Тогда существуют $Z_\pm \in [H_\pm, H'_\pm]$, причем $Z_\pm^{-1} \in [H'_\pm, H_\pm]$. Положим $Z = Z_+P_+ + Z_-P_-$, $S' = ZSZ^{-1}$. Тогда $Z^{-1} = Z_+^{-1}P'_+ + Z_-^{-1}P'_-$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(S) &= Z^{-1}\widetilde{X}(S') = Z^{-1}(\widetilde{X}(S'|H'_+) \oplus \widetilde{X}(S'|H'_-)) \\ &= Z_+^{-1}\widetilde{X}(S'|H'_+) + Z_-^{-1}\widetilde{X}(S'|H'_-) = \widetilde{X}(S|H_+) + \widetilde{X}(S|H_-).\end{aligned}$$

5) Следует из равенств $(S_2 - z_2)^{-1} = (cz_1 + d)/(ad - bc)(cS_1 + d)(S_1 - z_1)^{-1}$ и $(\varphi(S) - \varphi(z))^{-1} = \varphi'(S)^{-1}(S - z)^{-1} + \chi(S, z)$, где $\chi(\zeta, z) = \frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} - \frac{1}{\varphi'(\zeta)(\zeta - z)}$. Оператор-функция $\chi(S,z)$ определена, так как $\sigma(S) \subset G'_+$, причем $\chi(S,z) \in B(G'_+, [H])$. •

Замечания. Справедливы также следующие свойства. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}$. Тогда

1)

$$\begin{aligned}&(Z_{21} \in [H_1, H_2],\ Z_{21}^{-1} \in [H_2, H_1],\ Z_{21}S_1 = S_2Z_{21}) \\ &\quad\implies (X(S_1) \oplus Y(S_1^*) = H_1 \iff X(S_2) \oplus Y(S_2^*) = H_2);\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}&(P_+^2 = P_+,\ P_- = I - P_+,\ H_\pm = P_\pm H,\ SP_\pm = P_\pm S) \\ &\quad\implies (X(S) \oplus Y(S^*) = H \iff X(S|H_\pm) \oplus Y((S|H_\pm)^*) = H_\pm);\end{aligned}$$

3)

$$(z_2 = \varphi(z_1) = (az_1 + b)/(cz_1 + d))$$

или

$$\begin{aligned}&(\varphi \in CM(G'_+, \varphi(G'_+)), G_+ \subset G'_+, \sigma(S) \subset G'_+,\ X, Y \in \mathcal{A} \setminus \{D_-, DM_-\}) \\ &\quad\implies (X(S) \oplus Y(S^*) = H \iff X(\varphi(S)) \oplus Y(\varphi(S)^*) = H).\end{aligned}$$

Для слабых спектральных компонент справедливы следующие соотношения ортогональности.

Предложение 4.7. 1) $N(S) \perp M(S^*)$; 2) $N_\pm(S) \perp DM_\mp(S^*)$; 3) $NM_\pm(S) \perp D_\mp(S^*)$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in \widetilde{N}^1(S)$, $g \in M(S^*)$. Имеем $e_S(f,g,z) = e_{S^*}(g,f,\overline{z}) = 0$. Так как $f \in \widetilde{N}^1(S)$, получаем $((S-a)^{-1}f,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{0}{z-a}dz = 0 \Longrightarrow ((S-a)^{-1}f,g) = 0$ при любых $a \in \rho(S) \Longrightarrow (f,g) = 0$.

2) Пусть $f \in \widetilde{N}_\pm(S)$, $g \in DM_\mp(S^*)$. Так как $g \in \widetilde{M}(S^*)$, имеем $((S-z)^{-1}f,g)_+ = ((S-z)^{-1}f,g)_-$. Так как $f \in \widetilde{N}_\pm(S)$, имеем $((S-z)^{-1}f,g)_\pm \in E^2(G_\pm,\mathbb{C}) \subset L^2(C,\mathbb{C})$. С другой стороны, так как $g \in \widetilde{D}_\mp(S^*)$, имеем $((S-z)^{-1}f,g)_\mp = (f,(S^*-\overline{z})^{-1}g)_\mp \in D(G_\mp,\mathbb{C})$. Тогда по принципу максимума Смирнова [29] $((S-z)^{-1}f,g)_\mp \in E^2(G_\mp,\mathbb{C})$. Следовательно, $((S-z)^{-1}f,g)_\pm = ((S-z)^{-1}f,g)_\mp \in E^2(G_\pm,\mathbb{C}) \cap E^2(G_\mp,\mathbb{C}) = \{0\}$. Тогда имеем $((S-z)^{-1}f,g) = 0 \Longrightarrow (f,g) = 0$.

3) Доказывается аналогичным образом. •

Перейдем теперь к связи слабых и модельных описаний спектральных компонент.

Предложение 4.8. *Пусть* $f \in \mathcal{K}_\Theta$, $g \in \mathcal{H}$. *Тогда*

1) $((\widehat{S}-a)^{-1}f,g) = ((U-a)^{-1}f,g) \pm (n(a), (P_{*\pm}h)(\overline{a}))$, $a \in G_\pm$, *где* $n(a) = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^\dagger_\mp f)(a)$, $h = (\varkappa^l_{*+}\pi^\dagger_{*-} + \varkappa^l_{*-}\pi^\dagger_{*+})g$;
2) $e_S(f,g,z) = e_U(f,g,z) + (\Theta^+_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_- f)(z), (P_{*+}h)(\overline{z})) + (\Theta^-_{\cdot\varkappa}(z)^{-1}(\pi^\dagger_+ f)(z), (P_{*-}h)(\overline{z}))$, *где* $e_U(f,g,z) = ((\pi^\dagger_\pm f)(z), (\pi^\dagger_{*\mp}g)(\overline{z})) + ((\tau^\dagger_\pm f)(z), (\tau^\dagger_{*\mp}g)(\overline{z}))$.

Доказательство. 1) Согласно предложению 2.8(1), имеем $(\widehat{S}-a)^{-1}f = (U-a)^{-1}(f + \pi_+\varkappa^r_+ n(a) + \pi_-\varkappa^r_- n(a))$. Пользуясь предложением 2.4(3), леммой 2.3(3), предложением 2.5(3) и предложением 3.4(2), получаем

$$
\begin{aligned}
&((U-a)^{-1}(\pi_+\varkappa^r_+ n(a) + \pi_-\varkappa^r_- n(a)), g)\\
&\quad= \langle 1/(z-a)\pi^\dagger_+(\pi_+\varkappa^r_+ + \pi_-\varkappa^r_-)n(a), \pi^\dagger_{*-}g\rangle\\
&\qquad+ \langle 1/(z-a)\tau^\dagger_+(\pi_+\varkappa^r_+ + \pi_-\varkappa^r_-)n(a), \tau^\dagger_{*-}g\rangle\\
&\quad= \langle -1/(z-a)\Theta^-_{\cdot\varkappa}n(a), \pi^\dagger_{*-}g\rangle + \langle 1/(z-a)\Delta^+\varkappa^r_- n(a), \tau^\dagger_{*-}g\rangle\\
&\quad= \langle n(a)/(z-a), -\Theta^{-\sim}_{\cdot\varkappa}\pi^\dagger_{*-}g + \varkappa^{r\sim}_-\Delta^{+\sim}\tau^\dagger_{*-}g\rangle\\
&\quad= \langle n(a)/(z-a), -\Theta^-_{*\varkappa}\pi^\dagger_{*-}g + \varkappa^l_{*-}\Delta^-_*\tau^\dagger_{*-}g\rangle\\
&\quad= \langle n(a)/(z-a), (\varkappa^l_{*+}\pi^\dagger_{*-} + \varkappa^l_{*-}\pi^\dagger_{*+})g\rangle\\
&\quad= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(n(a), h(\overline{z}))}{z-a}dz\\
&\quad= \pm(n(a), (P_{*\pm}h)(\overline{a})).
\end{aligned}
$$

2) Имеем

$$
\begin{aligned}
((U-a)^{-1}f,g) &= \langle 1/(z-a)\pi_{\pm}^{\dagger}f, \pi_{*\mp}^{\dagger}g\rangle + \langle 1/(z-a)\tau_{\pm}^{\dagger}f, \tau_{*\mp}^{\dagger}g\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{((\pi_{\pm}^{\dagger}f)(z), (\pi_{*\mp}^{\dagger}g)(\overline{z})) + ((\tau_{\pm}^{\dagger}f)(z), (\tau_{*\mp}^{\dagger}g)(\overline{z}))}{z-a}\,dz.
\end{aligned}
$$

Переходя к предельным значениям и используя формулы Сохоцкого–Племеля, получаем требуемое соотношение. •

Предложение 4.9. *Пусть для оператор-функций имеем*

$$
\Theta_{\pm}^{-} \in B(G_{\pm}, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta^{+} \in (B:F)(G_{+}, [\mathfrak{N}]), \quad \Theta_{\varkappa\cdot}^{\pm}, \Theta_{\cdot\varkappa}^{\pm} \in (B:N)(G_{\pm}, [\mathfrak{N}]).
$$

Тогда 1) $M_{\omega}(\widehat{S}, \widehat{M}) \subset M_{\omega}(\widehat{S})$; 2) $N(\widehat{S}, \widehat{M}) \subset N(\widehat{S})$; 3) $D_{\pm}(\widehat{S}, \widehat{M}) \subset D_{\pm}(\widehat{S})$; 4) $NM_{\pm}(\widehat{S}, \widehat{M}) \subset NM_{\pm}(\widehat{S})$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in M_{\omega}(\widehat{S}, \widehat{M})$. Тогда согласно лемме 4.8(2), предложению 3.4(2), лемме 2.3(3), предложениям 2.5(3), 3.7(2) имеем для почти всех $z \in \omega$

$$
\begin{aligned}
&e_S(f,g,z) \\
&\quad = e_U(f,g,z) + (\Theta_{\cdot\varkappa}^{+}(z)^{-1}(\pi_{-}^{\dagger}f)(z), (P_{*+}h)(\overline{z})) + (\Theta_{\cdot\varkappa}^{-}(z)^{-1}(\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (P_{*-}h)(\overline{z})) \\
&\quad = e_U(f,g,z) + (\Theta_{\cdot\varkappa}^{-}(z)^{-1}(\pi_{+}^{\dagger}f)(z), h(\overline{z})) \\
&\quad = e_U(f,g,z) + ((\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\Theta_{\cdot\varkappa}^{-}(z)^{-1})^{*}(\varkappa_{*+}^{l}\pi_{*-}^{\dagger} + \varkappa_{*+}^{l}\pi_{*+}^{\dagger})g(\overline{z})) \\
&\quad = e_U(f,g,z) + ((\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\Theta_{\cdot\varkappa}^{-}(z)^{-1})^{*}(-\Theta_{\cdot\varkappa}^{-\sim}\pi_{*-}^{\dagger}g + \varkappa_{-}^{r\sim}\Delta^{+\sim}\tau_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) \\
&\quad = ((\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\pi_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) + ((\tau_{+}^{\dagger}f)(z), (\tau_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) \\
&\qquad - ((\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\pi_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) + ((\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\Theta_{\cdot\varkappa}^{-}(z)^{-1})^{*}(\varkappa_{-}^{r\sim}\Delta^{+\sim}\tau_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) \\
&\quad = ((\tau_{+}^{\dagger}f + \Delta^{+}\varkappa_{-}^{r}(\Theta_{\cdot\varkappa}^{-})^{-1}\pi_{+}^{\dagger}f)(z), (\tau_{*-}^{\dagger}g)(\overline{z})) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $f \in M_{\omega}(\widehat{S})$.

2) Согласно предложению 3.14, оператор $\widehat{S}|N(\widehat{S}, \widehat{M}, \omega_k)$ подобен нормальному оператору с абсолютно непрерывным спектром, содержащимся в ω_k. Поэтому $N(\widehat{S}, \widehat{M}, \omega_k) \subset N(\widehat{S}, \omega_k)$. Для произвольного ω включение выполняется в силу предложения 3.13 и такого же свойства для слабых компонент, указанного в начале этого подпараграфа.

3) Согласно предложению 4.8(1), $((\widehat{S}-a)^{-1}f,g) = ((U-a)^{-1}f,g) \pm (n(a), (P_{*\pm}h)(\overline{a}))$, $a \in G_\pm$. Кроме того, $((U-a)^{-1}f,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e_U(f,g,z)}{z-a}dz \in D(G_\pm,\mathbb{C})$ по теореме Смирнова. Пусть $f \in D_\pm(\widehat{S},\widehat{M})$. Тогда согласно предложению 3.2(2) имеем $\pi_\mp^\dagger = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}v_\pm$, $v_\pm \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. Далее, имеем $\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e} \in (B:D)(G_\pm,[\mathfrak{N}]) \Longrightarrow (\Theta^\pm_{\cdot\varkappa e})^{-1} = 1/\delta_\pm\Omega_\pm$, $\delta_\pm \in B_{out}(G_\pm,\mathbb{C})$, $\Omega_\pm \in B(G_\pm,[\mathfrak{N}])$. Отсюда $n(a) = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}(\pi^\dagger_\mp f)(a) = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa}(a)^{-1}\Theta^\pm_{\cdot\varkappa i}(a)v_\pm = \Theta^\pm_{\cdot\varkappa e}(a)^{-1}v_\pm = 1/\delta_\pm(a)\Omega_\pm(a)v_\pm \in D^2(G_\pm,\mathfrak{N})$. Очевидно, $P_{*\pm}h \in E^2(\overline{G}_\pm,\mathfrak{N})$. Тогда

$$(n(a),(P_{*\pm}h)(a)) \in D(G_\pm,\mathbb{C}) \Longrightarrow ((\widehat{S}-a)^{-1}f,g) \in D(G_\pm,\mathbb{C}) \Longrightarrow f \in D(\widehat{S}).$$

4) Отметим, что [3] $\Theta^\mp_{\varkappa\cdot} \in (B:N)(G_\mp,[\mathfrak{N}]) \Longrightarrow \Theta^\mp_{\varkappa\cdot i} \in (B:N)(G_\mp,[\mathfrak{N}])$. Поэтому мы можем считать $E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}} = E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot i}}$ модельным пространством (см. пример в параграфе 1), для которого выполняются все условия предложения 1.4. Отсюда $\mathrm{clos}(L^\infty(C,\mathfrak{N}) \cap E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}}) = E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}}$. Тогда согласно предложениям 3.7(5), 3.9(2) получаем $NM_\pm(\widehat{S},\widehat{M}) = \mathrm{clos}\, P_\Theta NM_\pm(\Pi,\varkappa) = \mathrm{clos}\, P_\Theta\pi_\mp L_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}} = \mathrm{clos}\, P_\Theta\pi_\mp E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}} = \mathrm{clos}\, P_\Theta\pi_\mp(L^\infty(C,\mathfrak{N})\cap E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}})$. Пусть $u_\mp \in L^\infty(C,\mathfrak{N})\cap E_{\Theta^\mp_{\varkappa\cdot}}$. Тогда $f = P_\Theta\pi_\mp u_\mp \in \widetilde{NM}_\pm(\widehat{S},\widehat{M})$, и множество таких f всюду плотно в $NM_\pm(\widehat{S},\widehat{M})$. Используя предложение 3.10(3), получаем при любом $g \in K$

$$\begin{aligned}
&((\widehat{S}-a)^{-1}f,g)\\
&= ((\widehat{S}-a)^{-1}P_\Theta\pi_\mp u_\mp,g) = \left(P_\Theta\pi_\mp\frac{u_\mp}{z-a},g\right) = \left(\frac{u_\mp}{z-a},\pi_\mp^*P_\Theta^*g\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(u_\mp,\pi^*_\mp P^*_\Theta g)}{z-a}dz \in E^2(G_\pm,\mathfrak{N}),
\end{aligned}$$

так как $\pi^*_\mp P^*_\Theta g \in L^2(C,\mathfrak{N})$ и $u_\mp \in L^\infty(C,\mathfrak{N})$. Следовательно, $f \in \widetilde{N}_\pm(\widehat{S})$. Далее, $f \in \widetilde{NM}_\pm(\widehat{S},\widehat{M}) \Longrightarrow f \in M(\widehat{S},\widehat{M}) \subset M(\widehat{S}) \Longrightarrow f \in \widetilde{NM}_\pm(\widehat{S})$. •

Предложение 4.10. *Пусть* $(S,M,N,\varkappa) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sys}_\varkappa)$. *По предложению* 2.2 *для* $(S,M,N,\varkappa)$ *существует модель* $(\widehat{S},\widehat{M},\widehat{N},\varkappa)$. *Пусть* $(\widehat{S},\widehat{M},\widehat{N},\varkappa)$ *удовлетворяет условиям предложения* 4.9. *Тогда* $X(S) = X(S,M)$, $X \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Применяя предложения 4.9, 3.1(2), 4.6(3), получаем $X(S,M) \subset X(S)$, $X(S^*,N^*) \subset X(S^*)$, если $X \in \{M,N,D_\pm,NM_\pm\}$. Далее, используя предложения 4.5, 4.7, имеем

$$\begin{aligned}
N(S,M) &\subset N(S) \subset M(S^*)^\perp \subset M(S^*,N^*)^\perp = N(S,M),\\
NM_\pm(S,M) &\subset NM_\pm(S) \subset D_\mp(S^*)^\perp \subset D_\mp(S^*,N^*)^\perp = NM_\pm(S,M).
\end{aligned}$$

Отсюда $N(S) = N(S,M)$, $NM_\pm(S) = NM_\pm(S,M)$. Аналогично имеем $M(S) = \widetilde{M}(S) = M(S,M)$, $D_\pm(S) = \widetilde{D}_\pm(S) = D_\pm(S,M)$, и, следовательно, $DM_\pm(S) = \widetilde{DM}_\pm(S) = DM_\pm(S,M)$. Согласно следствию из предложения 4.5, имеем

$$N_\pm(S,M) = NM_\pm(S,M) \vee N(S,M) = NM_\pm(S) \vee N(S) \subset N_\pm(S),$$
$$N_\pm(S) \subset DM_\mp(S^*)^\perp = DM_\mp(S^*,N^*)^\perp = N_\pm(S,M),$$

откуда $N_\pm(S) = N_\pm(S,M)$. •

Следствие. 1) $\widetilde{X}(S) = X(S)$, $X \in \mathcal{A}_i$; 2) $N_\pm(S) = NM_\pm(S) \vee N_\pm(S)$.

Теорема С. *Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости $C^{4+\varepsilon}$, $U, S \in [H]$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$. Тогда* 1) $N(S)^\perp = M(S^*)$; 2) $N_\pm(S)^\perp = DM_\mp(S^*)$; 3) $NM_\pm(S)^\perp = D_\mp(S^*)$.

Доказательство. Согласно теореме В, для оператора S существует функциональная модель, для которой $M, N \in \mathfrak{S}_2$. Тогда выполняются условия предложения 4.10, и требуемые соотношения ортогональности вытекают из предложения 4.5. •

Следствие. $(N_+(S) \vee N_-(S))^\perp = M_s(S^*)$.

Замечания. 1) В случае гладкости $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 1/2$, для кривой C разложение $N(S) \oplus M(S^*) = H$ (в неявном виде) другим способом было установлено в [12].

2) Для случая, если C — аналитическая кривая, теорема С может быть выведена из модели для окружности и свойств слабых спектральных компонент.

3) Отметим также, что для теоремы С функциональная модель выступает инструментом обоснования. Формулировка же самой теоремы не использует никаких модельных терминов.

Список литературы

[1] Nikol'skiĭ N. K., Vasyunin V. I., *Elements of spectral theory in terms of the free functional model. I. Basic constructions*, Holomorphic Spaces (Berkeley, CA, 1995) (Sh. Axler, J. McCarthy, D. Sarason, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 211-302.

[2] Douglas R. G., *Canonical models*, Topics in Operator Theory, Math. Surveys, No. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, pp. 161-218.

[3] Sz.-Nagy B., Foiaş C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam-London, 1970; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1970.

[4] Набоко С. Н., *К спектральному анализу несамосопряженных операторов*, Докл. АН СССР **232** (1977), №1, 36–39.

[5] Набоко С. Н., *Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **147** (1980), 86–114.

[6] Makarov N. G., Vasyunin V. I., *A model for noncontraction and stability of the continuous spectrum*, Complex Analysis and Spectral Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer, Berlin–New York, 1981, pp. 365–412.

[7] Павлов Б. С., *Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **39** (1975), №1, 123–148.

[8] Сахнович Л. А., *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром*, Тр. Моск. мат. о-ва **19** (1968), 211–270.

[9] Веселов В. Ф., Набоко С. Н., *Определитель характеристической функции и сингулярный спектр несамосопряженного оператора*, Мат. сб. **129** (1986), №1, 20–39.

[10] Makarov N. G., *Canonical subspaces of almost unitary operators*, A. Haar Memorial Conference. Vol. 1, 2 (Budapest, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 49, North-Holland, Amsterdam–New York, 1985, pp. 611–621.

[11] Тихонов А. С., *Абсолютно непрерывный спектр линейного оператора*, 1988. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, №2471-Ук88).

[12] Тихонов А. С., *Абсолютно непрерывный спектр и теория рассеяния для операторов со спектром на кривой*, Алгебра и анализ **7** (1995), №1, 200–220.

[13] Соломяк Б. М., *Теория рассеяния для почти унитарных операторов и функциональная модель*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **178** (1989), 92–119.

[14] Рыжов В. А., *Абсолютно непрерывные и сингулярные подпространства несамосопряженного оператора*, Зап. науч. семин. ПОМИ **222** (1995), 163–202.

[15] Adamyan V. M., Neidhard H., *On the absolutely continuous subspace for non-selfadjoint operators*, Math. Nachr. **210** (2000), 5–42.

[16] Tikhonov A. S., *Inner-outer factorization of J-contractive-valued functions*, Operator Theory and Related Topics (Odessa, Ukraine, 1997). Vol. II, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 118, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 405–415.

[17] Arov D. Z., *Three problems about J-inner matrix-functions*, Linear and Complex Analysis Problem Book, Lecture Notes in Math., vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin etc., 1984, pp. 164–168.

[18] Arov D. Z., Dym H., *J-inner matrix functions, interpolation and invers problems for canonical systems. I. Foundations*, Integral Equations Operator Theory **29** (1997), 373–454.

[19] Tikhonov A. S., *Extreme factorizations of transfer functions for conservative transmission linear systems*, Proceedings CD of the Fourteenth International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000), Perpignan, 2000 (electronic); `http://www.univ-perp.fr/mtns2000/`.

[20] Бродский М. С., *Унитарные операторные узлы и их характеристические функции*, Успехи мат. наук **33** (1978), №4, 141–168.

[21] Yakubovich D. V., *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators*, J. Funct. Anal. **136** (1996), no. 2, 294–330.

[22] Yakubovich D. V., *A similarity version of the Nagy–Foias model, duality and exact controllability*, Conference on Operator Theory (17; Timişoara, 1998): Abstracts.

[23] Abrahamse M. B., Douglas R. G., *A class of subnormal operators related to multiply-connected domains*, Adv. Math. **19** (1976), no. 1, 106–148.

[24] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[25] Duren P. L., *Theory of H^p spaces*, Pure Appl. Math., vol. 38, Academic Press, New York–London, 1970.

[26] Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Определение и основные свойства характеристической функции J-узла*, Функц. анал. и его прил. **4** (1970), №1, 88–90.

[27] Zygmund A., *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, New York, 1959; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1965.

[28] Pommerenke C., *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[29] Garnett J. B., *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., vol. 96, Academic Press, New York–London, 1981; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1984.

Таврический Национальный Университет
кафедра математического анализа
95007 Крым
г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4
Украина
E-mail: tikhonov@club.cris.net

Поступило 26 марта 2002 г.