V. A. Gritsenko, Modular forms and moduli spaces of abelian and $K3$ surfaces,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 6, 65–102

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 6

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ АБЕЛЕВЫХ И $K3$ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Гриценко

Автоморфные формы на ортогональной группе применяются к теории пространств модулей поляризованных абелевых и $K3$ поверхностей. Доказана неунирациональность пространств модулей абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1, m)$, где $m \geqslant 13$ — целое свободное от квадратов ($m \neq 14$, 15, 30) и неунирациональность двойного накрытия пространства модулей поляризованных $K3$ поверхностей. В случае пространств модулей $K3$ поверхностей со структурой уровня $q \geqslant 3$ доказано, что соответствующее пространство модулей имеет общий тип. Построены примеры сингулярных модулярных форм на классической однородной области четвертого типа.

Введение

Данная работа посвящена приложениям теории модулярных форм многих переменных к алгебраической геометрии.

Описание геометрического типа „многообразий модулей"— один из классических вопросов алгебраической геометрии. Пространства модулей абелевых многообразий размерности g были исследованы в работах Д. Мамфорда, Е. Фрайтага и И. Тая, которые доказали, что многообразие модулей имеет общий тип для $g \geqslant 7$ (см. [27, 9, 38]). Для $g = 2$ справедлив совершенно противоположный результат, доказанный Игузой (см. [21]). Многообразие модулей в этом случае рационально. Аналогичный результат справедлив и для многообразий модулей абелевых поверхностей с поляризацией типов $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$ (последний случай тесно связан с известным расслоением Хоррокса–Мамфорда) и $(1, 7)$ (см. [18, 5]). Ниже мы докажем, что многообразие модулей абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1, t)$ не является унирациональным, начиная с $t = 13$.

В этой статье мы исследуем также геометрические свойства многообразия модулей алгебраических $K3$-поверхностей (см. [22, 6]). Стандартный пример $K3$ поверхности — неособая поверхность степени 4 (квартика) в $\mathbb{P}^3$. Линейное пространство однородных форм четвертой степени от четырех переменных имеет размерность 35. Размерность группы $GL_4(\mathbb{C})$ равна 16, поэтому любую квартику можно привести к форме, содержащей только 19 коэффициентов. Этот факт является общим для всех проективных $K3$ поверхностей в $\mathbb{P}^n$ для любого n. Возьмем произвольную нормальную $K3$ поверхность в $\mathbb{P}^n$ и рассмотрим обильный дивизор

D, соответствующий общему гиперплоскому сечению. Степень $(D \cdot D)$ рассматриваемой поверхности равна $2n-2$, и все такие поверхности образуют 19-мерное семейство.

На $K3$ поверхности X существует единственная, с точностью до множителя, двумерная голоморфная дифференциальная форма ω_X, при помощи которой определяются 22 интеграла

$$X \longrightarrow \int_{\gamma_1} \omega_X, \dots, \int_{\gamma_{22}} \omega_X$$

по циклам γ_i, образующим базис группы гомологий $H_2(X, \mathbb{Z})$, которые определяют точку — *период поверхности* X — в проективном пространстве. Таким образом, получается 19-мерная область периодов алгебраических $K3$ поверхностей, которая однозначна восстанавливается по своим периодам в силу теоремы Торелли, доказанной в статье Пятецкого-Шапиры и Шафаревича [33]. Область периодов является однородной симметрической областью четвертого типа в классификации Картана. Легко учесть зависимость отображения периодов от выбора обильного дивизора D и базиса в группе гомологий. Для этого нужно профакторизовать построенную область по некоторой подгруппе ортогональной группы унимодулярной решетки $H_2(X, \mathbb{Z})$. Точки построенного таким образом пространства модулей определяют $K3$ поверхности с точностью до изоморфизма, а само пространство модулей обладает структурой квазипроективного многообразия.

В отличие от чисто алгебраического подхода Мамфорда, Фрайтаг и Тай использовали при изучении модулей абелевых многообразий аналитические методы теории зигелевых модулярных форм. Вопрос об изучении автоморфных форм на ортогональной группе в связи с изучением многообразия модулей $K3$ поверхностей впервые был поставлен А. Вейлем в его отчете [40] в 1958 г.

В этой статье при помощи теории автоморфных форм относительно ортогональной группы мы построим канонические дифференциальные формы (т.е. сечения канонического линейного расслоения на многообразиях модулей абелевых $K3$-поверхностей) и оценим размерность пространств таких дифференциалов. Построенные формы образуют подпространство в пространстве когомологий Ходжа типа $(3,0)$ данных многообразий, следовательно, его размерность дает оценку снизу на геометрический род.

Отметим, что мы не можем использовать стандартные алгебраико-геометрические методы (например, теорему Римана-Роха), поэтому совсем не тривиальным является вопрос о существовании хотя бы одного элемента в пространстве канонических дифференциалов.

В основе конструкции канонических дифференциальных форм лежит чисто арифметическая конструкция подъема модулярных форм Якоби (т.е., модулярных форм относительно полупрямого произведения группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и группы Гейзенберга ранга N) до автоморфных форм относительно ортогональной группы сигнатуры $(2, N+2)$ из статьи автора [11]. Основную идею этого подъема мы изложим в §1. §2 посвящен модулярным формам на ортогональной группе и соответствующим кольцам Гекке. В §3 доказывается основная теорема о подъеме модулярных форм, а в §4 рассматривается ее применение к теории сингулярных форм. Приложениям к геометрии посвящены §5 и §6.

Данная работа была выполнена в университете г. Геттингена (см. препринт [16]) в научном фонде SFB 170 „Geometrie und Analysis“, всем руководителям и участникам которого автор выражает свою искреннюю благодарность.

§1. Тэта-функция и кольца Гекке

В этом параграфе мы изложим основную для данной статьи конструкцию подъема модулярных форм, предложенную в работе автора [11], на примере модулярных форм относительно специальной линейной группы $SL_2(\mathbb{Z})$. В этом случае мы получим представление тэта-функции

$$\theta(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(2\pi i n^2\tau)$$

в виде суммы по полугруппе некоторых операторов Гекке.

Рассмотрим кольцо Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_1)=\mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}),SL_2(\mathbb{Q}))$ специальной линейной группы $\Gamma_1=SL_2(\mathbb{Z})$ и кольцо Гекке $\mathcal{H}_\infty=\mathcal{H}(\Gamma_\infty,\Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$ ее параболической подгруппы

$$\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & b\\ 0 & \pm1\end{pmatrix},\quad b\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Эти кольца порождены двойными классами типа $\Gamma_1 g\Gamma_1$ и $\Gamma_\infty\begin{pmatrix}a^{-1} & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\Gamma_\infty$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, $g\in SL_2(\mathbb{Q})$. Естественное вложение линейных пространств, определяемое соотношением

$$\mathrm{Im}\colon \Gamma_1 g\Gamma_1=\sum_i\Gamma_1 g_i\to\sum_i\Gamma_\infty g_i\to\sum_j\Gamma_\infty h_j\Gamma_\infty$$

(нужно разложить двойной класс в сумму левых смежных классов $\sum_i\Gamma_1 g_i$ с верхне треугольными матрицами g_i и собрать вместе двойные классы относительно группы Γ_∞), является гомоморфизмом соответствующих колец Гекке, и мы можем рассматривать $\mathcal{H}_\infty$ как расширение кольца $\mathcal{H}(\Gamma_1)$. Например,

$$\mathrm{Im}\left(SL_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}SL_2(\mathbb{Z})\right)=[p^{-1}]+[p^{+1}]+\sum_{\substack{b\in p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\\ b\neq0}}\Gamma_\infty\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
[n^{-1}]&=\Gamma_\infty\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n^{-1}\end{pmatrix}\Gamma_\infty=\Gamma_\infty\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n^{-1}\end{pmatrix},\\
[n^{+1}]&=\Gamma_\infty\begin{pmatrix}n^{-1} & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\Gamma_\infty=\sum_{a\in n^{-1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\Gamma_\infty\begin{pmatrix}n^{-1} & a\\ 0 & n\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Кольцо $\mathcal{H}_\infty$ не является коммутативным и обладает делителями нуля:

$$[n^{-1}][n^{+1}] \neq [n^{+1}][n^{-1}] \qquad \text{и} \qquad [n^{-1}]([n^{-1}][n^{+1}] - [n^{+1}][n^{-1}]) = 0.$$

Отображения $j_\pm \colon n^{\pm 1} \to [n^{\pm 1}]$ являются вложениями мультипликативной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}^\times$ и полугруппы $\mathbb{N}^{-1}$ чисел, обратных натуральным, в кольцо Гекке $\mathcal{H}_\infty$. Можно распространить эти вложения по линейности до вложения колец многочленов $\mathbb{Q}[X]$ и $\mathbb{Q}[X^{-1}]$, которые совпадают с кольцами Гекке тривиальной группы $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$ и $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^{-1})$. В результате мы получаем три коммутативных подкольца кольца Гекке $\mathcal{H}_\infty$:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{H}(\{1\},\ \mathbb{N}^\times),\ \mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^{-1}) \\ & & j_+ \Big\downarrow j_- \\ \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}),\ SL_2(\mathbb{Q})) & \xrightarrow{\ \mathrm{Im}\ } & \mathcal{H}(\Gamma_\infty(\mathbb{Z}), \Gamma_\infty(\mathbb{Q})). \end{array} \tag{1.2}$$

$\mathbb{Z}$-периодические функции переменной τ можно рассматривать как автоморфные функции относительно параболической подгруппы Γ_∞. Определим, как обычно, естественное представление кольца Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$ на пространстве $\mathbb{Z}$-периодических функций (автоморфных функций относительно группы Γ_∞). Например, элементы $[n^{\pm 1}]$ действуют следующим образом на функцию $e(\tau) = \exp(2\pi i\tau)$ (ср. с леммой 2.6 ниже):

$$e(\tau)|\,[n^{-1}] = e(n^2\tau), \qquad e(\tau)|\,[n^{-1}][n^{+1}] = n^2 e(\tau),$$
$$e(n^2\tau)|\,[n^{+1}] = n^2 e(\tau), \qquad e(n^2\tau)|\,[n^{+1}][n^{-1}] = n^2 e(n^2\tau).$$

В итоге, мы можем представить классическую тэта-функцию в виде суммы по полугруппе операторов Гекке $\{[n^{-1}],\ n \in \mathbb{N}\}$:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2\tau) = 1 + 2 \sum_{[n^{-1}]\in\mathcal{H}(\{1\},\mathbb{N}^{-1})} e(\tau)|\,[n^{-1}].$$

Можно переписать последнее равенство, используя формальные мультипликативные обозначения:

$$\theta(\tau) = 1 + 2e(\tau)|\prod_p (1 - [p^{-1}])^{-1} = 1 + 2e(\tau)|j_-(\zeta(1)). \tag{1.3}$$

Ниже мы обобщим предложенное определение тэта-функции на случай ортогональной группы $SO(2, n)$ сигнатуры $(2, n)$. Мы возьмем параболическую подгруппу, сохраняющую изотропную плоскость, вместо параболической подгруппы Γ_∞, которая сохраняет изотропную прямую, и модулярную форму относительно этой параболической подгруппы (модулярную форму Якоби) вместо периодической функции $\exp(2\pi i\tau)$. Построенные таким образом функции дадут нам примеры канонических дифференциальных форм (или сечений канонического линейного расслоения) на пространствах модулей абелевых поверхностей с неглавной поляризацией и на естественном двулистном накрытии пространства модулей поляризованных $K3$ поверхностей.

§2. Модулярные формы и формы Якоби

Под решеткой мы будем понимать $\mathbb{Z}$-модуль конечного ранга с целочисленной невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot\,,\cdot)$. Решетка L называется *четной*, если $(l,l) \in 2\mathbb{Z}$ для любого элемента $l \in L$. Зафиксируем четную решетку L сигнатуры $(2,\ N+2)$, содержащую две гиперболические плоскости. (Гиперболическая плоскость — это решетка $\mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$ с условиями $\langle e,e\rangle = \langle f,f\rangle = 0$ и $\langle e,f\rangle = 1$). Выберем следующий базис в данной решетке

$$L = \mathbb{Z}e_1 \perp \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2} \perp \mathbb{Z}e_{-1} \tag{2.1}$$

с отрицательно определенной решеткой L_0 ранга N и четырьмя изотропными векторами $e_1, e_2,\ e_{-1}, e_{-2}$, удовлетворяющими соотношению $(e_i, e_j) = \delta_{i,-j}$. Мы будем отождествлять L с решеткой $\mathbb{Z}^{N+4}$, а квадратичную форму на решетке L с соответствующей $(N+4) \times (N+4)$-матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -S_0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

с положительно определенной симметрической матрицей S_0, имеющей четные элементы на главной диагонали. Пусть $V_\mathbb{R} = L \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ и $V_\mathbb{C} = L \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ — квадратичные пространства над полями вещественных и комплексных чисел. Пространство $V_\mathbb{R}$ имеет сигнатуру $(2, N+2)$. Область

$$\mathcal{D} = \{\, z \in \mathbb{P}(V_\mathbb{C}) : (z,z) = 0,\ (z,\bar{z}) > 0 \,\}$$

в проективном пространстве $\mathbb{P}(V_\mathbb{C})$ имеет две компоненты связности, преобразуемые одна в другую комплексным сопряжением. Обозначим через $G_\mathbb{R}^{(0)}$ компоненту связности вещественной ортогональной группы $O(V_\mathbb{R})$ и через K — ее максимально компактную подгруппу. Пара $(G_\mathbb{R}^{(0)}, K)$, состоящая из групп изоморфных $SO_0(2, N+2)$ и $SO(2) \times SO(N+2)$, является симметрической парой BD-типа. Ограниченная симметрическая область $X = G_\mathbb{R}^{(0)}/K$ комплексной размерности $N+2$ является областью типа IV в классификации Картана. Известно, что X изоморфно $G_\mathbb{R}^{(0)}$-орбите в области $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} \approx G_\mathbb{R}^{(0)} x_0 \cup G_\mathbb{R}^{(0)} \overline{x_0} \approx \mathcal{D}^+ \cup \overline{\mathcal{D}^+}$$

(вложение Бореля). Через $G_\mathbb{R}$ мы будем обозначать подгруппу $O(V_\mathbb{R})$, сохраняющую компоненту $\mathcal{D}^+$ (элементы $O(V_\mathbb{R})$ со спинорной нормой 1).

Определим реализацию $\mathcal{D}^+$ в виде цилиндрической области $\mathbb{C}^{N+2}$. С этой целью введем подрешетку

$$L_1 = \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2} \tag{2.2}$$

решетки L и обозначим через S_1 соответствующую четную квадратичную форму на L. Обозначим через $H^+ = \{u+iv,\ u,v \in \mathbb{R},\ v>0\}$ обычную верхнюю полуплоскость и определим область в $\mathbb{C}^{N+2}$

$$\mathcal{H}_{N+2} = \left\{ {}^tZ = (\omega, {}^t\mathfrak{z}, \tau) \in H^+ \times \mathbb{C}^N \times H^+ : \frac{1}{2}S_1[\operatorname{Im} Z] > 0 \right\}, \tag{2.3}$$

где $\operatorname{Im} Z$ обозначает мнимую часть вектор-столбца Z. Вложение области $\mathcal{H}_{N+2}$ в проективное пространство задается следующим образом:

$$pr\,(Z) = pr\,\left({}^t(\omega, z_1, \ldots, z_N, \tau)\right) = {}^t\!\left(-\frac{1}{2}S_1[Z] : \omega : z_1 \ldots z_N : \tau : 1\right).$$

Действие элемента $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{N+4}$ ортогональной группы $G_{\mathbb{R}}$ на области $\mathcal{H}_{N+2}$ определяется формулой

$$pr\,(g\langle Z\rangle)J(g,Z) = g \cdot pr\,(Z),$$

или

$$g\langle Z\rangle = {}^t\!\left(\frac{-\frac{1}{2}g_{i1}S_1[Z] + g_{i2}\omega + \sum\limits_{j=3}^{N+2} g_{i,j}z_{j-2} + g_{i,N+3}\tau + g_{i,N+4}}{-\frac{1}{2}g_{N+4,1}S_1[Z] + g_{N+4,2}\omega + \sum\limits_{j=3}^{N+2} g_{N+4,j}z_{j-2} + g_{N+4,N+3}\tau + g_{N+4,N+4}}\right),$$

где

$$J(g,Z) = -\frac{1}{2}g_{N+4,1}S_1[Z] + g_{N+4,2}\,\omega + \sum_{j=3}^{N+2} g_{N+4,j}z_{j-2} + g_{N+4,N+3}\tau + g_{N+4,N+4}$$

— голоморфный фактор автоморфности на $G_{\mathbb{R}} \times \mathcal{H}_{N+2}$. Стабилизатор решетки L в группе $G_{\mathbb{R}}$ является арифметической группой

$$\Gamma_L = O(L) \cap G_{\mathbb{R}}. \tag{2.4}$$

Определение модулярных форм относительно ортогональной группы можно найти, например, в [3] и [30].

Определение. Голоморфная функция F, заданная на области $\mathcal{H}_{N+2}$, называется модулярной формой веса k относительно группы Γ_L, если для любого $g \in \Gamma_L$ выполняется

$$(F|_k g)(Z) := J(g,Z)^{-k}F(g\langle Z\rangle) = F(Z).$$

Аналогичное определение можно дать и для подгруппы конечного индекса Γ' группы Γ_L.

Ортогональная группа $G_{\mathbb{R}}$ является группой ранга 2, следовательно, она содержит максимальные параболические подгруппы двух различных типов, а модулярные формы допускают два типа разложения Фурье. Так как $F(Z+l) = F(Z)$ для любого $l \in L_1$, то можно построить разложение Фурье функции $F(Z)$ относительно переменной Z

$$F(Z) = \sum_{\substack{l \in \widehat{L}_1,\ il \in \mathcal{H}_{N+2} \\ S_1[l] \geqslant 0}} f(l) \exp(2\pi i^t l S_1 Z),$$

где

$$\widehat{L}_1 = \{\, l \in L_1 \otimes \mathbb{Q} : \forall\, l \in L_1\ {}^t l S_1 l \in \mathbb{Z} \,\}$$

— двойственная решетка. Разложение Фурье-Якоби — это разложение Фурье по переменной ω

$$F(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = \sum_{m \geqslant 0} \varphi_m(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i m\omega).$$

Легко доказать, что нулевой коэффициент Фурье $\varphi_0(\tau, \mathfrak{z}) = \varphi_0(\tau)$ зависит только от переменной τ и равен значению оператора Зигеля на функции F

$$\Phi(F(\omega, \mathfrak{z}, \tau)) = \lim_{v \to \infty} F(iv, \mathfrak{z}, \tau) = \varphi_0(\tau)$$

(см. [3, 32]).

Функции $\varphi_m(\tau, \mathfrak{z})$ являются SL_2-модулярными формами по переменной τ при фиксированном $\mathfrak{z}$ и функциями Якоби N переменных $(z_1, \ldots, z_N) = {}^t\mathfrak{z}$ для фиксированного τ.

Определим теперь модулярные формы Якоби на ортогональной группе (см. [11] и [37]). С этой целью рассмотрим параболическую подгруппу $P_{\mathbb{R}}$ группы $G_{\mathbb{R}}$, сохраняющую изотропную плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$:

$$P_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} A^* & X_1 & IT \\ 0 & U & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{R}} \right\},$$

$$A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}), \quad X \in M_{N,2}(\mathbb{R}), \quad U \in G_{\mathbb{R}}(S_0), \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^* = I^t A^{-1} I, \quad X_1 = I^t A^{-1} X S_0 U, \quad {}^t T A + {}^t A T = S_0[X].$$

Определим также подгруппу параболической группы P, не содержащую анизотропной части U.

Определение. Вещественной *группой Якоби* $\Gamma^J(L \otimes \mathbb{R}) = \Gamma^J_{\mathbb{R}}$ называется подгруппа параболической группы, порожденная элементами

$$\{A\} = \mathrm{diag}(A^*, E_N, A), \quad A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad A^* = I^t A^{-1} I \tag{2.5}$$

и

$$\{X\,;r\}=\{x,y;r\}=\begin{pmatrix}1&0&{}^tyS_0&{}^txS_0y-r&\frac{1}{2}S_0[y]\\0&1&{}^txS_0&\frac{1}{2}S_0[x]&r\\0&0&E_N&x&y\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{2.6}$$

где $x,\ y\in M_{N,1}(\mathbb{R})$ и $r\in\mathbb{R}$.

Легко проверить, что

$$\{X_1;r_1\}\cdot\{X_2;r_2\}=\{x_1,y_1;\,r_1\}\cdot\{x_2,y_2;\,r_2\}=\{X_1+X_2;\,r_1+r_2+{}^tx_1S_0y_2\},$$
$$\{X;\,r\}\cdot\{A\}=\{A\}\cdot\{XA;\,r+\tfrac{1}{2}({}^tx_AS_0y_A-{}^txS_0y)\},$$

где x_A и y_A являются столбцами матрицы XA.

Элементы $\{X,r\}$ порождают нормальную подгруппу группы Якоби, изоморфную *группе Гейзенберга* $H(L_0\otimes\mathbb{R})$ размерности $2N+1$, которая является центральным расширением абелевой группы

$$0\to\mathbb{R}\to H(L_0\otimes\mathbb{R})\to(L_0\otimes\mathbb{R})\times(L_0\otimes\mathbb{R})\to 0.$$

Центр $C_{\mathbb{R}}$ группы Якоби порожден элементами типа

$$\nabla(r)=\{0,0;r\}\qquad(r\in\mathbb{R}).\tag{2.7}$$

Образующие группы Якоби действуют следующим образом на симметрической области $\mathcal{H}_{N+2}$:

$$\{A\}\langle Z\rangle={}^t(\omega-\frac{cS_0[\mathfrak{z}]}{2(c\tau+d)},\ \frac{\mathfrak{z}}{c\tau+d},\ A\langle\tau\rangle),\qquad A\langle\tau\rangle=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$
$$\{\,x,\ y;\ r\}\langle Z\rangle={}^t(\omega+r+{}^txS_0\mathfrak{z}+\tfrac{1}{2}S_0[x]\tau,\ \mathfrak{z}+x\tau+y,\ \tau).$$

Эти формулы определяют также действие группы Якоби на $(\tau,\mathfrak{z})$-области $H^+\times\mathbb{C}^N$, которое мы будем обозначать через $\gamma\langle\tau,\mathfrak{z}\rangle$.

Голоморфный автоморфный фактор $J_{k,m}(\gamma;\tau,\mathfrak{z})$ *веса* k и *индекса* m для $\gamma\in\Gamma^J_{\mathbb{R}}$ может быть определен следующим образом. Выберем для пары $(\tau,\mathfrak{z})$ комплексную переменную ω так, чтобы $(\omega,\,\mathfrak{z},\,\tau)=Z\in\mathcal{H}_{N+2}$. Обозначим через $\omega\{g\langle Z\rangle\}$ ω-компоненту $g\langle Z\rangle$ для $g\in G_{\mathbb{R}}$, тогда

$$J_{k,m}(\gamma;\tau,\mathfrak{z}):=J(\gamma,Z)^k\exp(-2\pi im\ \omega\{\gamma\langle\omega,\,\mathfrak{z},\,\tau\rangle\})\exp(2\pi i\,m\omega),$$

где $j(\gamma,Z)$ — фактор автоморфности, определенный выше. В частности, для образующих группы Якоби выполняется

$$J^{-1}_{k,m}(\{A\};\tau,\mathfrak{z})=(c\tau+d)^{-k}\exp(-\pi i\frac{cmS_0[\mathfrak{z}]}{c\tau+d}),$$
$$J^{-1}_{k,m}(\{x,\ y;r\};\tau,\mathfrak{z})=\exp(2\pi im(r+{}^txS_0\mathfrak{z}+\tfrac{1}{2}S_0[x]\tau)).$$

Это определение задает действие $\Gamma^J_{\mathbb{R}}$ на функциях $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ на области $H^+ \times \mathbb{C}^N$

$$(\varphi|_{k,m}\gamma)(\tau,\mathfrak{z}) := J^{-1}_{k,m}(\gamma;\tau,\mathfrak{z})\varphi(\gamma\langle\tau,\mathfrak{z}\rangle). \tag{2.8}$$

Целочисленная группа Якоби, которую мы будем обозначать через Γ^J или $\Gamma^J(L)$, есть, по определению, пересечение вещественной группы Якоби с арифметической группой Γ_L (см. (2.4)). Γ^J равно полупрямому произведению группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и целочисленной группы Гейзенберга $H(L_0)$

$$\Gamma^J = \Gamma^J(L) = \Gamma^J_{\mathbb{R}} \cap \Gamma_L = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes H(L_0).$$

Определение. *Формой Якоби веса* k *и индекса* m $(k, m \in \mathbb{N})$ называется голоморфная на $H^+ \times \mathbb{C}^N$ функция, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$(\varphi|_{k,m}\gamma)(\tau,\mathfrak{z}) = \varphi(\tau,\mathfrak{z})$$

для произвольного $\gamma \in \Gamma^J$ и обладающая разложением Фурье

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\, l\in\widehat{L}_0 \\ 2nm - S_0[l]\geqslant 0}} f(n,l)\exp(2\pi i(n\tau + {}^t l S_0 \mathfrak{z})),$$

где

$$\widehat{L}_0 = \{\, l \in L_0 \otimes \mathbb{Q} : \forall\, l \in L_0 \quad {}^t l S_0 l \in \mathbb{Z}\,\}.$$

φ называется *параболической формой*, если $f(n,l) = 0$ для произвольных (n,l) со свойством $2nm = S_0[l]$.

Мы будем обозначать пространства модулярных форм (параболических форм) Якоби веса k и индекса m через $\mathbf{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ (соответственно $\mathbf{J}^{cusp}_{k,m}(\Gamma^J)$).

Для образующих группы Γ^J форма Якоби φ веса k и индекса m удовлетворяет следующим функциональным уравнениям

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = (c\tau + d)^{-k}\exp\Big(-\pi i m\frac{cS_0[\mathfrak{z}]}{c\tau+d}\Big)\varphi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau+d}\Big), \tag{2.9}$$

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \exp(2\pi i m({}^t x S_0 \mathfrak{z} + \tfrac{1}{2}S_0[x]\tau))\varphi(\tau, \mathfrak{z} + x\tau + y) \tag{2.10}$$

для произвольных $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $x, y \in \mathbb{Z}^N$.

Замечание. Определение форм Якоби эквивалентно тому факту, что функция $\widetilde{\varphi}(\omega,\mathfrak{z},\tau) = \varphi(\tau,\mathfrak{z})\exp(2\pi i m\omega)$ является модулярной формой относительно подгруппы Γ^J, имеющей конечный индекс в целочисленной параболической подгруппе $P_{\mathbb{Z}}$. Коэффициенты Фурье-Якоби $\varphi_m(\tau,\mathfrak{z})$ модулярной формы $F(Z)$ веса k являются примерами форм Якоби веса k и индекса m.

Свойства форм Якоби от $(N+1)$-переменных $(\tau, z_1, \ldots, z_N)$ в основном аналогичны свойствам форм Якоби двух переменных (τ, z) (см. книгу Эйхлера и Загира [8]).

Лемма 2.1. *Коэффициенты Фурье* $f(n,l)$ *формы Якоби* $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ *веса* k *и индекса* m *зависят только от нормы* $2mn - S_0[l]$ *вектора* $(n,l,m) \in L_1$ *и от класса вектора* l *в конечной дискриминантной группе* $G_m(L_0) = \widehat{L}_0/mL_0$ *решетки* L_0. *Кроме того,*

$$f(n,l) = (-1)^k f(n,-l).$$

Доказательство. Рассмотрим разложение Фурье функции, стоящей в правой части тождества (2.10),

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{n,l} f(n,l)\exp(2\pi i(\tau(n + {}^t x S_0 l + \tfrac{m}{2}S_0[x]) + {}^t(l+mx)S_0\mathfrak{z})).$$

Следовательно,

$$f(n,l) = f(n + {}^t x S_0 l + \tfrac{m}{2}S_0[x], l + mx).$$

Это доказывает первое утверждение леммы. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно использовать (2.9) с $A = -E_2$.

Ограничение $\varphi(\tau,0)$ формы Якоби на верхнюю полуплоскость H^+ является $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярной формой того же веса. Легко доказать справедливость следующей леммы (см. [EZ], теорема 1.3).

Лемма 2.2. *Пусть даны форма Якоби* $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ *веса* k *и индекса* m *и* $x,y \in L\otimes\mathbb{Q}$. *Тогда функция*

$$\varphi_X(\tau) = \varphi(\tau, x\tau + y)\exp(\pi i S_0[x]\tau)$$

является модулярной формой веса k *относительно подгруппы* $\Gamma' \subset SL_2(\mathbb{Z})$ *конечного индекса, зависящей только от* $X = (x,y)$.

Для фиксированного τ функция $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ является классической функцией Якоби N переменных $\mathfrak{z} = {}^t(z_1,\dots,z_N)$. Тэта-функции квадратичной формы S_0

$$\theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{l\in L_0} \exp\bigl(\pi i m S_0[l+\tfrac{h}{m}]\tau + 2\pi i^t(l+\tfrac{h}{m})mS_0\mathfrak{z}\bigr),$$

где $m\in\mathbb{N}$ и $h\in G_m(L_0) = \widehat{L}_0/mL_0$, образуют базис пространства функций Якоби.

Лемма 2.3. *Форма Якоби веса* k *и индекса* m *допускает разложение*

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{h\in G_m(L_0)} \varphi_h(\tau)\theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}),$$

где функции $\varphi_h(\tau)$ *имеют следующие разложения Фурье в бесконечности*

$$\varphi_h(\tau) = \sum_{\substack{r\geqslant 0\\ 2r\equiv -qS_0[h] \bmod 2qm}} f_h(r)\exp(2\pi i\frac{r\tau}{qm})$$

с

$$f_h(r) = f(\tfrac{2r+qS_0[h]}{2qm}, h),$$

где $f(n,l)$ — коэффициенты Фурье формы Якоби $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$, а q — ступень квадратичной формы S_0 (qS_0^{-1} является целочисленной и четной формой).

Доказательство. Согласно лемме 2.1 коэффициенты Фурье $f(n,l)$ формы $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ зависят только от нормы $(nm - \frac{1}{2}S_0[l]) \in \frac{\mathbb{Z}}{q}$ и класса вектора l по модулю mL_0. Следовательно,

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{h\in\widehat{L}_0/mL_0} \sum_{l\in L_0} \sum_{\substack{r\geqslant 0\\ r\equiv -\frac{q}{2}S_0[h] \mod qm}} f(\tfrac{2r+qS_0[h+ml]}{2qm}, h+ml)\exp(\tfrac{2\pi i r\tau}{qm})$$
$$\times \exp(\pi i m S_0[l+\tfrac{h}{m}] + 2\pi i\, {}^t(ml+h)S_0\mathfrak{z}).$$

Используя тождество

$$f\Big(\frac{2r+qS_0[h+ml]}{2qm}, h+ml\Big) = f\Big(\frac{2r+qS_0[h]}{2qm}, h\Big),$$

мы получаем разложение леммы.

Можно переписать разложение предыдущей леммы, используя векторнозначные функции:

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = {}^t\vec{\Phi}(\tau)\cdot\vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}),$$

где

$$\vec{\Phi}(\tau) = \big(\varphi_h(\tau)\big)_{h\in G_m(L_0)} \quad \text{и} \quad \vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}) = \big(\theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z})\big)_{h\in G_m(L_0)}.$$

Для произвольной матрицы $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ векторнозначный тэта-ряд преобразуется по следующей формуле (см., например, [30]):

$$\vec{\Theta}_{m,S_0}\Big(M\langle\tau\rangle, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^{\frac{N}{2}}U(M)\vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z})\exp\Big(\frac{\pi i m c S_0[\mathfrak{z}]}{c\tau+d}\Big),$$

где $U(M)$ — унитарная матрица,

$$U(M)_{h,g} = \begin{cases} \epsilon(\det mS_0)^{-\frac{1}{2}}c^{-\frac{N}{2}}\lambda_{h,g}, & \text{если } c\neq 0,\\ \delta_{h,ag}\exp(\dfrac{abS_0[h]}{m}), & \text{если } c = 0,\end{cases}$$

с

$$\lambda_{h,g} = \sum_{l\in L/cL} \exp\Big(\frac{\pi i}{c}(amS_0[l+\tfrac{h}{m}] - 2\,{}^t g S_0(l+\tfrac{h}{m}) + \tfrac{d}{m}S_0[g])\Big)$$

и

$$\begin{cases} \epsilon = \exp(\frac{\pi i N}{4}), & \text{если } c > 0, \\ \epsilon = \exp(-\frac{\pi i N}{4}), & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

В частности, для образующих модулярной группы $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ выполняются тождества

$$\theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau+1,\mathfrak{z}) = \exp(\pi i m^{-1} S_0[h])\, \theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}),$$
$$\vec{\Theta}_{m,S_0}(-\frac{1}{\tau},\frac{\mathfrak{z}}{\tau}) = \tau^{\frac{N}{2}} \exp(\pi i \tau^{-1} m S_0[\mathfrak{z}]) U(J) \vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau,\mathfrak{z}),$$

где

$$U(J) = (\det S_0)^{-\frac{1}{2}} (i/m)^{\frac{N}{2}} \bigl(\exp(-2\pi i \frac{{}^t g S_0 h}{m})\bigr)_{g,h\in \widehat{L}_0'/mL_0}.$$

Это дает нам функциональные уравнения для компонент $\vec{\Phi}(\tau)$

$$\varphi_h(\tau+1,\mathfrak{z}) = \exp(-\pi i \tfrac{S_0[h]}{m})\varphi_h(\tau) \quad \text{и} \quad \vec{\Phi}(-\tfrac{1}{\tau}) = \tau^{k-\frac{n}{2}} \overline{U}(J)\vec{\Phi}(\tau). \tag{2.11}$$

Следовательно, $\vec{\Phi}(\tau)$ — векторнозначная модулярная форма, и линейное пространство форм Якоби индекса m зависит лишь от дискриминантной группы $G_m(L_0) = \widehat{L}_0/mL_0$ с заданной на ней квадратичной формой

$$q_{m,L}(h+mL_0, h+mL_0) = (h,h)_{L_0} + 2\mathbb{Z}.$$

Лемма 2.4. *Пусть заданы две четные решетки M_1 и M_2 ранга N_1 и N_2. Предположим, что конечные квадратичные пространства*

$$(G_{m_1}(M_1),\ q_{m_1,M_1}) \qquad \text{и} \qquad (G_{m_2}(M_2),\ q_{m_2,M_2})$$

изоморфны. Тогда изоморфны следующие линейные пространства форм Якоби:

$$\mathbf{J}_{k_1,m_1}(M_1) \approx \mathbf{J}_{k_1+\frac{N_2-N_1}{2},m_2}(M_2).$$

Доказательство. Соответствие

$${}^t\vec{\Phi}(\tau)\cdot\vec{\Theta}_{m_1,S_{M_1}}(\tau,\mathfrak{z}) \to {}^t\vec{\Phi}(\tau)\cdot\vec{\Theta}_{m_2,S_{M_2}}(\tau,\mathfrak{z})$$

определяет изоморфизм линейных пространств. Чтобы доказать это, воспользуемся формулой (2.11) и напомним, что $N_1 \equiv N_2 \pmod 8$ для квадратичных форм с изоморфными дискриминантными группами (см. [29], теорема 1.3.1).

Компоненты векторнозначной модулярной формы $\vec{\Phi}(\tau)$ являются модулярными формами относительно некоторых конгруэнц-подгрупп, которые могут быть явно вычислены при помощи стандартных трансформационных формул тэта-рядов четных квадратичных форм.

Лемма 2.5. *Пусть ступень квадратичной формы* S_0 *равна* q. *Тогда коэффициенты* $\varphi_h(\tau)$ *формы Якоби* $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ *веса* k *и индекса* m *удовлетворяют следующему функциональному уравнению*:

$$\varphi_{ah}(\tau) = \chi_{S_0}(A)\exp(\tfrac{\pi i a b S_0[h]}{m})(c\tau + d)^{\frac{N}{2}-k}\varphi_h(A\langle\tau\rangle)$$

для $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(mq)$, *где* $\chi_S(A)$ — *корень восьмой степени из единицы из функционального уравнения тэта-ряда квадратичной формы* S_0. *Если* $n = 2n_1$ — *четное, то*

$$\chi_S(A) = (\operatorname{sign} d)^{n_1}\left(\frac{(-1)^{n_1}\det mS_0}{|d|}\right)$$

— *вещественный характер Дирихле. В частности, функция* $\varphi_0(\tau)$ *является модулярной формой веса* k *относительно группы* $\Gamma_0(mq)$, *а функции* $\varphi_h(\tau)$ $(h \neq 0)$ — *модулярными формами веса* k *относительно главной конгруэнц-подгруппы* $\Gamma(mq)$.

Следствие 2.6. *Для унимодулярной решетки (в этом случае ступень* $q = 1$*) форма Якоби индекса один пропорциональна тэта-ряду решетки* L

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \varphi(\tau)\theta_{1,S}(\tau, \mathfrak{z}),$$

где $\varphi(\tau)$ — $SL_2(\mathbb{Z})$*-модулярная форма веса* k.

Прежде чем определить кольца Гекке групп Якоби, мы напомним определение абстрактных колец Гекке (см., например, [2, 9]).

Определение. Пара (Γ, G), где Γ есть подгруппа полугруппы G, называется парой Гекке, если любой двойной смежный класс $\Gamma g\Gamma$ $(g \in G)$ является объединением конечного числа левых и правых классов относительно группы Γ. *Кольцо Гекке* $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ пары (Γ, G) является, по определению, Γ-инвариантным подпространством $\mathbb{Q}$-векторного пространства всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i \Gamma g_i \quad (a_i \in \mathbb{Q},\ g_i \in G),$$

где представление группы Γ на этом пространстве определяется левым умножением

$$X \to X \cdot \gamma = \sum_i a_i \Gamma(g_i\gamma).$$

Для любых двух элементов этого пространства $X = \sum_i a_i \Gamma h_i$ и $Y = \sum_j b_j \Gamma g_j$ их произведение определено по формуле

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j \, \Gamma(h_i g_j).$$

Произведение не зависит от выбора системы представителей g_i, h_j, и $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ — ассоциативное кольцо с единицей.

Элементы $\Gamma g \Gamma = \sum_i \Gamma g_i$ $(g \in G)$ образуют базис векторного пространства $\mathcal{H}(\Gamma, G)$, и наше определение эквивалентно стандартному определению кольца Гекке.

Обозначим через $SO_{\mathbb{Q}}(L)$ специальную ортогональную группу решетки L над полем рациональных чисел. Через G^J обозначим пересечение группы $SO_{\mathbb{Q}}(L)$ с параболической подгруппой $P_{\mathbb{R}}$ (см. (2.5))

$$G^J = \left\{ g = \begin{pmatrix} A^* & m^2 X_1 & T \\ 0 & E_N & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in SO_{\mathbb{Q}}(L), \ \det A > 0 \right\}.$$

Пара (Γ^J, G^J), где Γ^J — группа Якоби решетки L, удовлетворяет приведенному выше определению, следовательно, мы можем определить кольцо Гекке $\mathcal{L}^J = \mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$. Более общие кольца Гекке типа $\mathcal{L}^J$, определенные над локальными полями, были определены и исследованы в [12] и [13]. Кольцо $\mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$ является аналогом кольца Гекке $\mathcal{H}_\infty$ из §1. Мы зафиксировали изотропную плоскость $\{e_1, e_2\}$ в решетке L. На этой плоскости действует группа $SL_2(\mathbb{Z})$, что позволяет нам определить в следующей лемме два вложения кольца Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$ в кольцо Гекке $\mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$, которые являются аналогами вложений $j_\pm$ из §1.

Лемма 2.7. *Пусть дан произвольный элемент $SL_2(\mathbb{Z}) A \, SL_2(\mathbb{Z})$, где $A \in M_2^+(\mathbb{Z})$, кольца Гекке специальной линейной группы. Тогда отображения*

$$\mathrm{Im}_- : SL_2(\mathbb{Z}) A \, SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma^J \operatorname{diag}\big((\det A) A^*, \, E_N, \, (\det A)^{-1} A\big) \Gamma^J$$
$$\mathrm{Im}_+ : SL_2(\mathbb{Z}) A \, SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma^J \operatorname{diag}\big(A^*, \, E_N, \, A\big) \Gamma^J,$$

где $A^* = I^t A^{-1} I$, являются гомоморфными вложениями колец Гекке (см. (2.5), (2.6)).

Доказательство. Легко проверить, что класс

$$H(L_0) \mathrm{diag}\big((\det A) A^*, \, E_N, \, (\det A)^{-1} A\big) H(L_0),$$

где $H(L_0)$ — целочисленная группа Гейзенберга решетки L_0, имеет в своем разложении только один левый класс для любого целого A. Следовательно, мы имеем разложение

$$\mathrm{Im}_-(SL_2(\mathbb{Z}) A \, SL_2(\mathbb{Z})) = \sum_i \Gamma^J \operatorname{diag}\big((\det A) A_i^*, \, E_N, \, (\det A)^{-1} A_i\big),$$

если

$$SL_2(\mathbb{Z})\, A\, SL_2(\mathbb{Z}) = \sum_i SL_2(\mathbb{Z})\, A_i.$$

Это доказывает первую часть леммы. Существует антиавтоморфизм $*$ кольца $\mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$, который определен на двойных классах по правилу

$$(\Gamma^J g \Gamma^J)^* = \Gamma^J g^{-1} \Gamma^J$$

(см. [A], предложение 3.1.7). Применяя эту инволюцию к первому вложению, мы получаем второе. Лемма доказана.

Мы определили группу Якоби как подгруппу конечного индекса целочисленной параболической подгрупп ортогональной группы. Следовательно, можно определить действие элементов кольца Гекке $\mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$ на пространстве функций на области $\mathcal{H}_{N+2}$, инвариантных относительно действия (2.8) (см. замечание после (2.10)).

Пусть дана Γ^J-инвариантная функция $\psi(\omega, \mathfrak{z}, \tau)$ веса k:

$$(\psi|_k \gamma)(Z) := J(\gamma; Z)^{-k} \psi(\gamma\langle Z\rangle) = \psi(Z) \qquad \text{для } \gamma \in \Gamma^J.$$

Тогда для любого элемента $X = \sum_g a_g \Gamma^J g \in \mathcal{L}(\Gamma^J, G^J)$ мы полагаем

$$(\psi|_k X)(Z) = \sum_g a_g\, (\psi|_k g)(Z).$$

В следующей лемме доказывается, что последняя формула определяет представление кольца $\mathcal{L}^J$ на градуированном пространстве $\oplus_m \mathbf{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ форм Якоби веса k.

Лемма 2.8. *Пусть даны элемент*

$$X = \Gamma^J \begin{pmatrix} D^* & X_1 & T \\ 0 & E_N & X \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \Gamma^J$$

кольца Гекке $\mathcal{L}^J$ и произвольная форма Якоби $\varphi \in \mathbf{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ веса k и индекса m. Функция $\widetilde{\varphi}(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = \varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i m\omega)$ инвариантна относительно действия Γ^J и

$$\psi(\tau, \mathfrak{z}) = (\varphi|_{k,m} X)(\tau, \mathfrak{z}) := \big(\varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp i m\omega|_k X\big) \exp(-2\pi i \frac{m\omega}{\det D})$$

является формой Якоби веса k и индекса $\frac{m}{\det D}$, если это целое число, и тождественно равна нулю в противном случае.

Доказательство. Домножим матрицы двойного класса X на натуральное число d так, чтобы получить целочисленные матрицы. Тогда можно выбрать следующую систему представителей в классе X

$$X = \sum_{*} \sum_{r \in a_1\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} \Gamma^J d^{-1} \begin{pmatrix} b_1 & * & * & * & * \\ 0 & a_1 & * & * & *+r \\ & & dE_N & 0 & 0 \\ & & & a & * \\ & & & 0 & b \end{pmatrix},$$

так как элементы $\nabla(r)$ с $r \in \mathbb{Z}$ (см. (2.7)) принадлежат центру группы Якоби. Можно выделить следующий множитель с переменной ω в любом $*$-слагаемом:

$$\sum_{r \in a_1\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} \exp(2\pi i \frac{ma_1\,\omega + mr}{b}),$$

который равен нулю, если ma_1b^{-1} не является целым. Число $a_1^{-1}b$ равно $\det D$ для любого левого смежного класса в разложении X. Это доказывает лемму.

Обозначим через $T(q)$ стандартный элемент кольца Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$

$$T(q) = \sum_{\substack{ab=q \\ a|b}} SL_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}).$$

Образы этого элемента относительно вложений леммы 2.7 (ср. с (1.1)) обозначим через

$$T_-(q) := \mathrm{Im}_-(T(q)), \qquad T_+(q) := \mathrm{Im}_+(T(q)). \tag{2.12}$$

Следствие 2.9. *Если $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ форма Якоби веса k и индекса m, то*

$$(\varphi|_{k,m}T_-(q))(\tau, \mathfrak{z}) \quad \text{— форма Якоби индекса } mq,$$
$$(\varphi|_{k,m}T_+(q))(\tau, \mathfrak{z}) \quad \text{— форма Якоби индекса } \frac{m}{q} \text{ или } \equiv 0.$$

Замечание. Существует третий подмодуль кольца $\mathcal{L}^J$, который не очень сильно отличается от коммутативного кольца. Это модуль

$$\mathcal{SL}^0 = \Big\{ \sum_g a_g \Gamma^J g \Gamma^J;\ g = \mathrm{diag}(D^*, E_N, D), \quad \det D = 1 \Big\}$$

(см. [12]). Элементы модуля $\mathcal{SL}^{(0)}(\Gamma^J, G^J)$ не меняют индекса форм Якоби, и можно доказать, что операторы $|_k\mathcal{SL}^{(0)}(\Gamma^J, G^J)$ образуют коммутативное кольцо по крайней мере для „хороших“ m (см. §5, [12]). Это кольцо является аналогом кольца $\mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Q}))$ из диаграммы (1.2).

§3. Арифметический подъем

В теории автоморфных форм хорошо известна конструкция тэта-подъема, связанного с теорией двойственных редуктивных пар (см., например, [24]). Для двойственной редуктивной пары $(SL_2, SO(2,n))$ можно построить отображение из пространства модулярных форм на SL_2 в пространство модулярных форм на $SO(2,n)$. Это отображение является интегральным оператором с тэта-функцией пары $(SL_2, SO(2,n))$ в качестве ядра. Подъем для пары такого вида был построен Т. Одой, С. Раллисом и Г. Шифманом в [30] и [34]. Аналитический тэта-подъем переводит параболические формы целого или полуцелого веса относительно конгруэнц-подгруппы модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$ в параболические формы относительно некоторой подгруппы ортогональной группы. Если данная решетка L не является унимодулярной, получаются модулярные формы относительно конгруэнц-подгруппы с нетривиальным уровнем. В этой конструкции имеются также ограничения на вес поднимаемой формы, который должен быть достаточно большим. Не ясно также, как строить подъем непараболических форм.

Арифметическим подъемом или подъемом Якоби мы называем подъем из пространства форм Якоби в пространство модулярных форм относительно подходящей арифметической подгруппы ортогональной группы. В случае зигелевых модулярных форм рода два такой подъем был построен Г. Маассом (см. [8]), который в качестве модели использовал специальные свойства коэффициентов Фурье рядов Эйзейштейна. В этом случае имеется также изоморфизм между пространствами форм Якоби и специальными подпространствами модулярных форм полуцелого веса.

Подъем Якоби для группы $SO(2,n)$ был построен в работе автора [11] (см. также [37]). Ниже мы дадим полные доказательства результатов из статьи [11] и приведем новые примеры и приложения. Мы отметим, что наша конструкция применима к любой решетке (максимальной или нет) и к любой форме Якоби. Добавим, что для унимодулярной решетки образ арифметического подъема совпадает с образом тэта-подъема, построенного в [30]. В отличие от аналитического тэта-подъема арифметический подъем определен не только для параболических форм достаточно большого веса, но для любых модулярных форм, включая и константу! (См. §4, где этот подъем вычислен явно). Отметим, что в нашем подходе формы, полученные при подъеме, трактуются как „тэта-функции", построенные при помощи представления некоторого кольца изоморфного кольцу Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Используя эту аналогию, можно доказать, что подъем коммутирует с действием операторов Гекке. Это доказано в [14] в случае группы $SU(2,2)$ (или $SO(2,4)$). В §5 и §6 мы применяем эти функции для решения некоторых геометрических проблем.

Зафиксируем решетку L, как в (2.1). Γ_L обозначает целочисленную ортогональную группу решетки L (см. (2.4)). Через $\widetilde{\Gamma}_L$ обозначим подгруппу, состоящую из всех элементов арифметической подгруппы Γ_L, действующих тривиально на конечной дискриминантной группе $G(L) = \widehat{L}/L$ решетки L

$$\widetilde{\Gamma}_L = \{\, g \in \Gamma_L : \forall l \in \widehat{L}\ gl - l \in L \,\}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть дана форма Якоби φ веса k и индекса 1 относительно группы Якоби Γ_L^J*

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\, l\in\widehat{L}_0\\ 2n\geqslant S_0[l]}} f(n,l)\exp(2\pi i(n\tau + {}^t l S_0 \mathfrak{z})).$$

Если нулевой коэффициент $f(0,0)$ формы φ не равен 0, то мы предположим, что вес $k \geqslant 4$. Тогда функция $F_\varphi(\omega, \mathfrak{z}, \tau)$ на области $\mathcal{H}_{N+2}$, определенная при помощи следующего суммирования:

$$F_\varphi(\omega,\mathfrak{z},\tau) = f(0,0)E_k(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(m^{-1}\varphi|_{k,1}T_-(m)\right)(\tau,\mathfrak{z})\exp(2\pi i m\omega),$$

является модулярной формой веса k относительно ортогональной группы $\widetilde{\Gamma}_L$. Действие $|_{k,1}T_-(m)$ элементов (2.12) *определено в лемме* 2.8, *$E_k(\tau)$ — ряд Эйзейштейна веса k на группе $SL_2(\mathbb{Z})$*

$$E_k(\tau) = \gamma_k + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)\exp(2\pi i m\tau), \quad \gamma_k = \frac{(k-1)!\zeta(k)}{(2\pi i)^k}.$$

Более того, для максимальной решетки L функция F_φ является параболической формой, если φ — параболическая форма Якоби.

Замечание. Добавим тот же самый нормирующий множитель в определение действия элементов Гекке $T_-(m)$, что используется обычно в теории SL_2-модулярных форм

$$\varphi||_{k,1}T_-(m) := m^{k-1}\varphi|_{k,1}T_-(m).$$

Используя обозначения аналогичные обозначениям из §1, мы можем следующим образом переписать определение функции F_φ (положим для определенности $f(0,0) = 0$)

$$\begin{aligned} F_\varphi(Z) &= \sum_{m\geqslant 1} m^{-k}\widetilde{\varphi}||_{k,1}T_-(m)\\ &= \widetilde{\varphi}||_{k,1}\prod_p (1 - T_-(p)p^{-k} + T_-(p,p)p^{1-2k})^{-1}\\ &= \widetilde{\varphi}||_{k,1}L^{(-)}_{SL_2}(k), \end{aligned}$$

где $L^{(-)}_{SL_2}(k) = \mathrm{Im}_-(L_{SL_2}(k))$; Im_- — образ „формальной" L-функции Гекке группы SL_2 (ср. с (1.3)) и $\widetilde{\varphi}(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = \varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i \omega)$.

Доказательство. Первое слагаемое в определении функции F_φ совпадает с точностью до константы $f(0,0)$ с рядом Эйзейштейна веса k относительно группы $SL_2(\mathbb{Z})$, который является, конечно, формой Якоби веса k и индекса 0. Все слагаемые во второй сумме — формы Якоби индексов $m \geqslant 1$ (см. лемму 2.8). Следовательно, функция F_φ инвариантна относительно действия группы Якоби Γ^J. Например,

$$F_\varphi|_k \xi = F_\varphi \qquad \text{для} \quad \xi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma^J$$

(см. (2.5)). Вычислим разложение Фурье F_φ в бесконечности. В силу разложения леммы 2.7, элементы $T_-(m)$ имеют следующее разложение на левые смежные классы:

$$T_-(m) = \sum_{\substack{ad=m \\ b \bmod d}} \Gamma^J \left\{ m^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно,

$$\varphi|_{k,1} T_-(m)(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{\substack{ad=m \\ b \bmod d}} a^k m^{-1} \varphi\Big(\frac{a\tau + b}{d}, a\mathfrak{z}\Big).$$

Используя разложение Фурье функции φ, можно следующим образом переписать сумму по всем $m \geqslant 1$ в определении функции F_φ:

$$f(0,0) \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sigma_{k-1}(m) e(m\omega) + \sum_{ad=m} a^{k-1} \sum_{\substack{n_1>0,\, l \in \widehat{L}_0 \\ 2n_1 \geqslant S_0[l]}} f(dn_1, l)\, e(an_1\tau + a\,{}^t l S \mathfrak{z} + ad\omega)\Big).$$

Это дает

$$F_\varphi(\omega, l, \tau) = f(0,0)\gamma_k + \sum_{\substack{n,m \geqslant 0 \;\; l \in \widehat{L}_0 \\ 2nm - S_0[l] \geqslant 0 \\ (n,m) \neq (0,0)}} \sum_{a | (n,m;\, l)} a^{k-1} f\Big(\frac{nm}{a^2}, \frac{l}{a}\Big)\, e(n\tau + {}^t l S_0 \mathfrak{z} + m\omega).$$

Из последнего тождества следует, что $F_\varphi(\omega, \mathfrak{z}, \tau)$ инвариантна относительно замены переменных $\tau \to \omega$, $\omega \to \tau$. Эта замена реализуется ортогональным преобразованием ε, которое сохраняет элементы дискриминантной группы $G(L)$ и сохраняет область $\mathcal{H}_{N+2}$. Его определитель равен -1, а $J(\varepsilon, Z) = 1$. Иногда бывает полезно ограничится элементами определителя один. Тогда функция F_φ инвариантна относительно преобразования ϑ

$$\vartheta = \xi\varepsilon\xi\varepsilon = \begin{pmatrix} & & & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 \\ & & E_N & & \\ 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_L.$$

Группа Якоби Γ^J и элемент ε (соответственно ϑ) порождают группу $\widetilde{\Gamma}_L$ (соответственно $\widetilde{\Gamma}_L \cap G_{\mathbb{R}}^{(0)}$). Это можно доказать, используя стандартные рассуждения с трансвекциями.

Определение. Пусть дана произвольная $\mathbb{Z}$-решетка L' с симметричной билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для произвольного изотропного вектора $e \in L'$ и вектора $u \in L'$, ортогонального к e, обозначим через $\tau(e,u)$ следующий элемент из ортогональной группы:

$$\tau(e,u)\colon v \to v + u\,\langle e,v\rangle - e\,\langle u,v\rangle - e\tfrac{1}{2}\langle u,u\rangle\langle e,v\rangle.$$

Это отображение называется ортогональной трансвекцией (или *трансвекцией Эйхлера–Зигеля–Диксона*), если e является унимодулярным изотропным вектором (т.е. если существует вектор $e' \in L$ со свойством $\langle e,e'\rangle = 1$).

Ортогональные трансвекции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tau(e,u)v = v, \quad \text{если } v \perp e,\ u,$$
$$\tau(e,u+ex) = \tau(e,u), \qquad \tau(e,u)\tau(e,v) = \tau(e,u+v),$$
$$g\tau(e,u)g^{-1} = \tau(ge, gu/\mu(g)) \quad \text{для } {}^tgSg = \mu(g)S.$$

Легко проверить, что в случае решетки $L = \mathbb{Z}e_1 \perp \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2} \perp \mathbb{Z}e_{-1}$

$$\tau(e_2,x) = \{x,0;0\}, \qquad \tau(e_1,y) = \{0,y;0\},$$
$$\tau(e_1,e_2) = \{0,0;1\}, \qquad \tau(e_{-1},e_{-2}) = {}^t\{0,0;1\},$$
$$\tau(e_1,e_{-2}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \tau(e_{-1},e_2) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

где мы воспользовались (2.1) и (2.5)-(2.6). Эти трансвекции порождают группу Якоби Γ_L^J. Более того,

$$\vartheta\tau(e_2,x)\vartheta^{-1} = \tau(e_{-2},x), \qquad \vartheta\tau(e_1,y)\vartheta^{-1} = \tau(e_{-1},y).$$

Все трансвекции типов $\tau(e_1,*)$ и $\tau(e_{-1},*)$ содержатся в группе, порожденной Γ_L^J и элементом ϑ. Известно, что все трансвекции приведенных выше типов порождают группу всех трансвекций (см. [39]). Группа всех трансвекций совпадает в свою очередь с группой $\widetilde{\Gamma}_L$ для почти всех решеток, за исключением некоторых решеток с плохой редукцией по модулям 2 и 3, согласно результату М. Кнезера (см. [23]).

Мы приведем, однако, более элементарное доказательство инвариантности формы F_φ относительно группы $\widetilde{\Gamma}_L$, которое даст нам более детальную информацию о $F_\varphi(Z)$. Отметим, что форма F_φ инвариантна относительно действия ортогональной группы $\widetilde{\Gamma}_{L_1} \subset \widetilde{\Gamma}_L$ решетки $L_1 = \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2}$ сигнатуры $(1, N+1)$. Действительно, $g_1 \in \widetilde{\Gamma}_{L_1}$, поэтому вектора l и $g_1 l$ ($l \in \widehat{L}_1, g_1 \in \widehat{\Gamma}_{L_1}$) имеют равные нормы, L_1-классы и делители

$$S_1[g_1 l] = S_1[l] \quad \text{и} \quad g_1 l \equiv l \mod L_1.$$

Следовательно, $g_1 \in \widetilde{\Gamma}_{L_1}$ не меняет разложение Фурье формы F_φ, так как его коэффициенты

$$f(n,l,m) = \sum_{a|(n,l,m)} a^{k-1} f\left(\frac{nm}{a}^2, \frac{l}{a}\right)$$

зависят только от нормы $2nm - S_0[l]$ вектора (n,l,m), его делителя и образа l в дискриминантной группе $\widehat{L}_0/L_0$ (см. лемму 2.1).

Возьмем произвольную матрицу $g \in \widetilde{\Gamma}_L$. Ее первый столбец l_g принадлежит решетке L, и он является примитивным вектором в двойственной решетке $\widehat{L}$ (это означает, что группа $\widehat{L}/l_g\mathbb{Z}$ не имеет кручения), так как вектор l_g — унимодулярный. Ясно, можно преобразовать его в вектор $l_g \in L_1$, используя только элементы типа $\{A\}$ ($A \in SL_2(\mathbb{Z})$). Пусть $l_g^* \in L_1$ — вектор, двойственный к вектору l_g, т.е. вектор со свойством $S(l_g^*, \, l_g) = 1$. Используя ортогональные трансвекции, получаем

$$\tau(e_1, -l_g^*)\, l_g = l_g + e_1, \qquad \tau(e_{-1}, -l_g)(l_g + e_1) = e_1$$

(ср. с [LP], теорема 2.4). Это означает, что мы привели матрицу $g \in \widetilde{\Gamma}_L$ к элементу группы $\widetilde{\Gamma}_{L_1} \ltimes \Gamma^J$ и, следовательно, доказали, что группы $\widetilde{\Gamma}_{L_1}$, Γ^J и элемент ε (соответственно ϑ) порождают группу $\widetilde{\Gamma}_L$ (соответственно $\widetilde{\Gamma}_L \cap G_{\mathbb{R}}^{(0)}$) и что F_φ — модулярная форма относительно этой группы.

Докажем теперь утверждение о параболичности формы, полученной в результате подъема. С этой целью мы определим компактификацию Бейли–Бореля фактор-пространства $\mathcal{H}_{N+2}/\widetilde{\Gamma}_L$ (см. [4, 32, 35]).

Возьмем проективную реализацию $\mathcal{D}^+$ однородной области $\mathcal{H}_{N+2}$ в виде подмножества квадрики в проективном пространстве

$$\mathcal{D} = \{\, v \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) : v \cdot v = 0, \ v \cdot \overline{v} > 0 \,\}.$$

Компоненты границы области $\mathcal{D}^+$ являются максимальными связными аналитическими множествами X в $\overline{\mathcal{D}^+} \setminus \mathcal{D}^+$, где $\overline{\mathcal{D}^+}$ — замыкание $\mathcal{D}^+$ в проективном пространстве. Стабилизатор такого множества $N_X = \{\, g \in G_{\mathbb{R}} : gX = X \,\}$ является максимальной параболической подгруппой ортогональной группы $G_{\mathbb{R}}$. X называется рациональной компонентой, если группа N_X определена над $\mathbb{Q}$.

Определение. Модулярная форма F относительно арифметической подгруппы ортогональной группы называется параболической формой, если она обращается в нуль на любой рациональной компоненте границы области $\mathcal{D}^+$.

Известно, что рациональные компоненты границы X области $\mathcal{D}^+$ находятся в соответствии с изотропными подрешетками S решетки L $X_S = \mathbb{P}(S \otimes \mathbb{C}) \cap \overline{\mathcal{D}^+}$. Так как решетка L содержит только изотропные прямые и плоскости, то имеется только два типа рациональных граничных компонент: точки и кривые. Расклассифицируем их с точностью до $\widetilde{\Gamma}_L$-эквивалентности. Предположим, что решетка L является максимальной (т.е., что решетка L не содержится в качестве подрешетки в целочисленной четной решетке), тогда имеется только один класс нульмерных компонент.

Лемма 3.2. *Предположим, что L является максимальной целочисленной четной решеткой. Тогда все примитивные изотропные вектора в L будут $\widetilde{\Gamma}_L$-изоморфными.*

Доказательство. Как мы уже установили выше, группа $\widetilde{\Gamma}_L$ содержит все трансвекции. Любой примитивный вектор из L является примитивным и в решетке $\widehat{L}$, и, согласно известной теореме Эйхлера (см. [7], §10), в этом случае имеется только один $\widetilde{\Gamma}_L$-класс.

Множество одномерных компонент границы области $\mathcal{D}^+/\widetilde{\Gamma}_L$ были исследованы в [35] в случае $K3$ решеток ранга 21 (см. §5). Однако эти результаты остаются справедливыми и для произвольной максимальной целочисленной четной решетки с двумя изотропными плоскостями.

Лемма 3.3 (ср. [35], предложение 5.4.7). *Обозначим через $\mathcal{I}(L)$ множество всех примитивных изотропных плоскостей (подрешеток ранга два) в решетке L. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между классами Γ_L-эквивалентности этого множества и множеством классов $\mathcal{G}(L_0)$ в роде отрицательно-определенной решетки L_0*

$$\mathcal{I}(L)/\Gamma_L \approx \mathcal{G}(L_0).$$

Доказательство. В специальном случае максимальной решетки мы можем для каждой примитивной изотропной плоскости E найти ортогональную ей плоскость E'. Отображение

$$E \in \mathcal{I}(L) \to \text{ класс решетки } \{E^{\perp}/E\}$$

определяет требуемое взаимно-однозначное соответствие.

Нормализатор произвольной компоненты размерности 1 содержит группу $SL_2(\mathbb{Z})$, следовательно, граница многообразия $\mathcal{D}/\widetilde{\Gamma}_L$ содержит один нульмерный касп и конечное число эллиптических кривых $H^+/SL_2(\mathbb{Z})$.

Обозначим через $O(G(L_0))$ ортогональную группу конечной квадратичной формы $(\widehat{L}_0/L_0, q_{1,L_0})$ (см. лемму 2.4). Отметим, что $G(L_0) = \widehat{L}_0/L_0 = \widehat{L}/L = G(L)$. Определен естественный гомоморфизм ортогональных групп

$$\alpha\colon \Gamma_L \to O(G(L)),$$

который является сюръективным для решеток типа L (см. [29], предложение 1.14.2). По определению, группа $\widetilde{\Gamma}_L$ совпадает с ядром этого гомоморфизма. Следовательно, для плоскости $E \in \mathcal{I}$ и для класса $M \approx E^{\perp}/E \in \mathcal{G}(L_0)$ элементы слоя накрытия

$$\mathcal{I}(L)/\widetilde{\Gamma}_L \to \mathcal{I}/\Gamma_L$$

соответствуют правым классам $O(G_L)/\alpha(O(M))$ по α-образу ортогональной группы отрицательно-определенной решетке M (ср. с предложением 5.6.8 в [35]).

Теперь мы можем доказать утверждение теоремы о параболичности подъема.

Пусть дана форма Якоби φ индекса один. Возьмем произвольную одномерную рациональную компоненту границы X_E, которая отвечает изотропной плоскости $E \in \mathcal{I}(L)/\widetilde{\Gamma}_L$. Разложение Фурье-Якоби функции F_φ, определяемое этой компонентой, имеет вид

$$F_\varphi(\omega', \mathfrak{z}', \tau') = \psi_0(\tau') + \sum_{m\geqslant 0} \psi_m(\tau', \mathfrak{z}') \exp(2\pi i m\omega').$$

В соответствии с леммой 2.3 и с предыдущими рассуждениями о $\mathcal{I}/\widetilde{\Gamma}_L$ мы получаем

$$\psi_m(\tau', \mathfrak{z}') = \sum_{h\in G_L^{(m)}} \psi_h^{(m)}(\tau')\theta_{m,S_M}^{(h)}(\tau', \mathfrak{z}'),$$

где S_M совпадает с „минус" квадратичной формой решетки $M \approx E^{\perp}/E$ и нулевые компоненты ψ_0 одни и те же в разложениях для всех E. Следовательно, $\psi_0(\tau') \equiv 0$ и F_φ является параболической формой. Теорема доказана полностью.

Пример 3.4. Рассмотрим унимодулярную решетку L_0 ранга N. Согласно следствию 2.4 пространство форм Якоби веса k и индекса m изоморфно пространству $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярных форм веса $k - \frac{N}{2}$. Пусть

$$\varphi(\tau) = \sum_{n\geqslant 0} f(n) \exp(2\pi i n\tau)$$

форма веса $k - \frac{N}{2}$, и пусть $\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \varphi(\tau)\vartheta_S(\tau, \mathfrak{z})$ — соответствующая ей форма Якоби. Тогда форма $F_\varphi(Z)$, построенная в теореме 4.1, имеет следующее разложение Фурье

$$F_\varphi(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = f(0)\gamma_k + \sum_{\substack{n,m\geqslant 0, l\in L\\ (n,m)\neq(0,0)}} \sum_{a|(n,m;\, l)} a^{k-1} f\Bigl(\frac{2nm - S_0[l]}{2a^2}\Bigr) \exp(2\pi i(n\tau + {}^t l S\mathfrak{z} + m\omega)).$$

Это параболическая форма, если таковой была форма $\varphi(\tau)$.

§4. Сингулярные модулярные формы

В этом параграфе мы построим примеры так называемых сингулярных модулярных форм относительно ортогональной группы Γ_L. Это дает нам частичный ответ на проблему, поставленную Э. Фрайтагом. Мы ограничимся лишь примерами и надеемся вернуться к этой теме в одной из следующих публикаций.

Пусть дана решетка L сигнатуры $(2, N+2)$ (см. (2.1)).

Определение. Модулярная форма F относительно ортогональной группы Γ_L (или форма Якоби $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ индекса m относительно группы $\Gamma^J(L)$) называется *сингулярной*, если ее разложение Фурье содержит только коэффициенты Фурье с сингулярными номерами, т.е. если

$$f_F(n,l,m) \neq 0 \quad (\text{или } f_\varphi(n,l) \neq 0) \implies 2nm - S_0[l] = 0.$$

Можно дать также следующее эквивалентное определение: $F(\omega, \mathfrak{z}, \tau)$ называется сингулярной, если она содержится в ядре дифференциального оператора

$$D = \frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\tau} - S_0\left[\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\right]$$

(см. [10]).

Лемма 4.1. *Форма Якоби $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ является сингулярной тогда и только тогда, когда она имеет вес $\frac{N}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение формы φ относительно базисных якобиевых функций (см. лемму 2.3)

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = {}^t\vec{\Phi}(\tau)\vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau, \mathfrak{z}).$$

Произвольная компонента

$$\theta^{(h)}_{m,S_0}(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L} \exp\Big(\pi i\tau m S_0\Big[l + \frac{h}{m}\Big] + 2\pi i\, {}^t\mathfrak{z} m S_0\Big(l + \frac{h}{m}\Big)\Big)$$

вектора $\vec{\Theta}_{m,S_0}$ является сингулярной в смысле нашего определения, так как она содержит ненулевые коэффициенты Фурье только для $n = \frac{1}{2}mS_0[l + \frac{h}{m}]$ и $l = ml + h$. Если мы добавим множитель $\exp(2\pi i a\tau)$ ($a \in \mathbb{Q}$), то условие сингулярности будет неизбежно нарушено. Следовательно, $\vec{\Phi}(\tau) \equiv \mathrm{const}$, $\vec{\Phi}$ имеет вес нуль, и $k = N/2$.

Если вес формы Якоби $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ равен $\frac{N}{2}$, то вес $\vec{\Phi}$ равен нулю, голоморфные компоненты вектора $\vec{\varphi}$ являются константами, и $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ — сингулярная форма.

Следствие 4.2. *Если F является сингулярной модулярной формой, то ее вес равен $\frac{N}{2}$. Любая модулярная форма веса $\frac{N}{2}$ — сингулярна.*

Доказательство. Произвольный коэффициент Фурье-Якоби сингулярной формы F является сингулярной формой Якоби.

Следствие 4.3. *Если φ является сингулярной формой Якоби индекса один, тогда ее подъем F_φ, построенный в теореме* 3.1, *будет сингулярной модулярной формой относительно группы* $\widetilde{\Gamma}_L$.

Пример 4.4. Пусть дана унимодулярная решетка L сигнатуры $(2, N+2)$. В этом случае дискриминантная форма тривиальна $G(L) = \{0\}$, и существует единственная сингулярная форма Якоби веса $\frac{N}{2}$

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L} \exp(\pi i S_0[l]\tau + 2\pi i {}^t l S_0 \mathfrak{z}).$$

Сингулярная модулярная форма F_ϑ из теоремы 3.1 имеет следующее разложение Фурье:

$$F_\vartheta(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = \gamma_{\frac{N}{2}} + \sum_{\substack{n,m \geqslant 0,\, l \in L \\ 2nm = S_0[l] \\ (n,m) \neq (0,0)}} r_{\frac{N}{2}-1}(n, m; l) \exp(2\pi i(n\tau + {}^t l S_0 \mathfrak{z} + m\omega)),$$

где $r_{\frac{N}{2}-1}(n, m; l)$ обозначает сумму $(\frac{N}{2} - 1)$-степеней всех общих делителей чисел n, m и компонент вектора l, а $\gamma_{\frac{N}{2}}$ равно постоянному члену ряда Эйзейштейна группы $SL_2(\mathbb{Z})$ (см. теорему 3.1).

Лемма 4.5. *Предположим, что L максимальная целочисленная четная решетка. Сингулярная форма Якоби индекса один для группы Якоби Γ^J существует тогда и только тогда, когда решетка L унимодулярная.*

Доказательство. Предположим, что существует сингулярная форма Якоби $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$. Рассмотрим ее представление из леммы 2.3 $\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \vec{\Phi}(\tau)\vec{\Theta}_{m,S_0}(\tau, \mathfrak{z})$. Компоненты $\varphi_h(\tau)$ вектора $\vec{\Phi}$ — константы. Доказано (см. (2.11)), что

$$\varphi_h(\tau + 1, \mathfrak{z}) = \exp(-\pi i S_0[h])\varphi_h(\tau),$$

следовательно, константы φ_h могут быть не равны нулю только для изотропных векторов h в группе $G(L) = \widehat{L}/L$. Решетка L максимальна по условию, поэтому в дискриминантной группе имеется только один изотропный вектор $h = 0$. Принимая во внимание инвариантность вектора $\vec{\Phi}$ относительно преобразования

$\tau \to -\tau^{-1}$ (см. (2.11)), мы получаем, что $|G(L)| = 1$, и, следовательно, решетка L унимодулярная.

Для немаксимальных целочисленных четных решеток мы приведем другие примеры сингулярных форм Якоби индекса один.

В §2 мы ввели конечную квадратичную форму $q_{m,L}$ (см. определение перед леммой 2.4). Обозначим через $\mathrm{Is}(G_m(L_0))$ множество всех изотропных векторов дискриминантной формы $q_{m,L}$. Возьмем произвольную четную положительно определенную решетку L_0 с квадратичной формой S_0 на ней. Эта решетка является ортогональной компонентой решетки L сигнатуры $(2, N+2)$ (см. (2.1)). Если Γ^J совпадает с группой Якоби, построенной по паре (L_0, S_0), то обозначим через Γ^J_m группу Якоби, построенную по квадратичной форме mS_0. (Конечно, мы должны добавить к этой решетке еще две гиперболические плоскости). Выполняется следующая полезная лемма, справедливость которой легко следует из определений.

Lemma 4.6. *Если $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ является формой Якоби веса k и индекса m относительно группы Γ^J, то эта же функция $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ является формой Якоби веса k и индекса один относительно группы Γ^J_m.*

Пример 4.7. Возьмем произвольную четную унимодулярную решетку L сигнатуры $(2, N+2)$. Тогда

$$(\vartheta|d)(\tau, \mathfrak{z}) = \vartheta(\tau, \mathfrak{z})|_{k,1}\, T_-(d)$$

является формой Якоби веса $\frac{N}{2}$ и индекса d относительно группы Γ^J или формой индекса один относительно группы Γ^J_d. Легко проверить, что

$$(\vartheta|d)(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{h \in \mathrm{Is}(G_L^{(d)})} r_{\frac{N}{2}-1}\Big(\frac{S_0[h]}{2d}, d; h\Big)\, \theta^{(h)}_{d,S_0}(\tau, \mathfrak{z}).$$

Подъем этой формы, построенный в теореме 3.1, равен

$$F_{\vartheta|d}(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = r_{\frac{N}{2}-1}(d)\Big(\gamma_{\frac{N}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m)\exp(2\pi i m\tau)\Big)$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \big(\vartheta|_{k,1} T_-(dm)\big)(\tau, \mathfrak{z})\exp(2\pi i m d\omega),$$

где переменные $\tau, \mathfrak{z}, \omega$ удовлетворяют соотношению $2\,\mathrm{Im}(\tau)\,\mathrm{Im}(\omega) > dS_0[\mathrm{Im}\,\mathfrak{z}]$. Функция $F_{\vartheta|d}$ имеет следующее разложение Фурье

$$F_{\vartheta|d}(\omega, \mathfrak{z}, \tau) = r_{\frac{N}{2}-1}(d)\gamma_{\frac{N}{2}} + \sum_{\substack{n,m\geqslant 0,\, l\in L \\ 2nmd = S_0[l] \\ (n,m)\neq(0,0)}} r_{\frac{N}{2}-1}(n, md; l)\, \exp(2\pi i(n\tau + {}^t l S_0 \mathfrak{z} + m\omega)).$$

Это сингулярная модулярная форма относительно ортогональной группы $\widehat{\Gamma}_L^{(d)}$, построенной по квадратичной форме

$$S^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -dS_0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§5. Пространство модулей $K3$ поверхностей

Описание геометрического типа пространства модулей — один из классических вопросов алгебраической геометрии. Пространство модулей поляризованных $K3$ поверхностей может быть описано как многообразие $\Gamma \setminus \mathcal{H}_{19}$, где $\mathcal{H}_{19}$ — классическая девятнадцатимерная область типа IV в классификации Картана (см. §2), а Γ — арифметическая подгруппа ортогональной группы $O(2,19)$ сигнатуры (2, 19).

Прежде чем сформулировать основную теорему, дадим необходимые определения.

Определение. Компактная комплексно-аналитическая поверхность X называется $K3$ поверхностью, если она удовлетворяет двум следующим условиям:

1) поверхность X — регулярна, т.е., $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$;
2) канонический класс X — тривиальный.

Ниже мы будем рассматривать только алгебраические $K3$ поверхности.

Пример. Квартика $X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$.

Определение. Примитивной поляризацией $K3$ поверхности X называется примитивный дивизор D на X со следующими свойствами:

1) D — численно-эффективный (pseudo-ample), т.е. для любого эффективного дивизора S на X индекс пересечения D и S неотрицательный $(D \cdot S) \geqslant 0$;
2) $(D \cdot D) = 2m$, где m — натуральное число, называемое степенью поляризации.

Вторая группа целочисленных когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$ $K3$ поверхности изоморфна так называемой $K3$-решетке Λ_{K3}

$$\Lambda_{K3} = H \oplus H \oplus H \oplus (-E_8) \oplus (-E_8) = H^3 \oplus (-E_8)^2,$$

где H — гиперболическая плоскость, а $-E_8$ — унимодулярная решетка размерности 8 с отрицательно определенной квадратичной формой. Для произвольного примитивного вектора d в решетке Λ_{K3} со свойством $d^2 = 2m$ существует изометрия φ_X

$$\varphi_X \colon H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda_{K3}$$

такая, что $\varphi_X(D) = d$. Ортогональное дополнение $\{d\}^\perp$ в решетке Λ_{K3} имеет ранг 21, сигнатуру $(2,19)$ и изоморфно решетке

$$L_m = H^2 \oplus \langle -2m \rangle \oplus (-E_8)^2,$$

где $\langle -2m \rangle$ обозначает одномерную решетку, порожденную вектором l с $l^2 = -2m$.

Разложение Ходжа пространства вторых комплексных когомологий поверхности X имеет следующий вид

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X),$$

где

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(X) = 1, \qquad \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X) = 20.$$

Обозначим через ω_X голоморфную 2-форму, порождающую первую компоненту разложения Ходжа. Ее образ при изометрии φ_X принадлежит области $\mathcal{D}_m$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^{20}$

$$\varphi_X(\omega_X) \in \mathcal{D}_m = \{ v \in \mathbb{P}(L_m \otimes \mathbb{C}) : v \cdot v = 0,\ v \cdot \bar{v} > 0 \}.$$

Условия, наложенные на вектор v, эквивалентны условиям Ходжа–Римана на форму ω_X. Эта область является примером областей $\mathcal{D}$, введенных в начале §2. Она имеет две компоненты связности $\mathcal{D}_m^+$ и $\overline{\mathcal{D}_m^+}$.

Имеется естественное действие ортогональной группы решетки L_m на проективной области $\mathcal{D}_m$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}_m$ подгруппу группы ортогональных преобразований решетки L_m, определенную в (3.1), которая действует на компоненте связности $\mathcal{D}_m^+$:

$$\widetilde{\Gamma}_m = \{ \gamma : \gamma L_m = L_m,\ \gamma \mathcal{D}_m^+ = \mathcal{D}_m^+,\ \forall l \in \widehat{L}_m\ gl \equiv l \mod L_m \},$$

где $\widehat{L}_m$ — двойственная к L решетка.

Согласно теореме Торелли, доказанной Пятецким-Шапиро и Шафаревичем в [33] (см. также [26]) и теореме Куликова (см. [25]) о сюръективности периодического отображения, пространство периодов алгебраических $K3$ поверхностей с поляризацией степени m изоморфно фактор-пространству $\mathcal{K}_m = \widetilde{\Gamma}_m \setminus \mathcal{D}_m^+$. Это фактор-пространство имеет структуру квазипроективного алгебраического многообразия и является грубым (coarse) пространством модулей $K3$ поверхностей с поляризацией степени m.

Теорема 5.1. *Обозначим через $\mathcal{K}_m^{(2)} = \widehat{\Gamma}_m \setminus \mathcal{D}_m^+$ двойное накрытие пространства модулей поляризованных $K3$ поверхностей со степенью поляризации m, а через $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$ обозначим произвольную гладкую модель компактификации многообразия $\mathcal{K}_m^{(2)}$. Если m не является полным квадратом, то размерность Кодаиры многообразия $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$ неотрицательна. Размерность Кодаиры многообразия $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$ положительна, если свободная от квадратов часть m_f числа m больше трех.*

Следствие 5.2. *Многообразие $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$ не является унирациональным, если степень поляризации m не является полным квадратом.*

Если степень поляризации $m = m_f m_s^2$, где множитель m_f свободен от квадратов, то можно определить следующее стандартное накрытие фактор-пространств

$$\mathcal{K}_m \to \mathcal{K}_{m_f} \tag{5.1}$$

(см., например, [31]). Следовательно, при доказательстве теоремы 5.1 можно ограничится случаем, когда m свободно от квадратов.

Мы докажем теорему 5.1, построив при помощи теории модулярных форм относительно группы $\widehat{\Gamma}_m$ сечения канонического линейного расслоения на многообразии $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$.

Зафиксируем базис решетки L_m сигнатуры $(2,19)$, как это было сделано в (2.1)–(2.2). Имеется изоморфизм $\mathcal{D}_m^+ \approx \mathcal{H}_{19}$ между областью в проективность комплексном пространстве и цилиндрической областью размерности 19 (см. определение (2.3)), где

$$\mathcal{H}_{19} = \{\, Z = {}^t(\omega, {}^t\mathfrak{z}, \tau),\ \omega, \tau \in H_1,\ \mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{17} : \operatorname{Im}\omega \cdot \operatorname{Im}\tau - \tfrac{1}{2} S_m[\operatorname{Im}\mathfrak{z}] > 0 \,\},$$

а через S_m обозначена положительно определенная квадратичная форма решетки $\langle 2m \rangle \oplus E_8^2$.

Согласно определению, данному в §2, канонический фактор автоморфности $j(g,Z)$, определяемый при помощи Якобиана $g^*\varpi = j(g,Z)\varpi$ ($\varpi = d\omega \wedge d\mathfrak{z} \wedge d\tau$) отображения $g \in SO(2,19)$ имеет вес 19: $j(g,Z) = J(g,Z)^{-19}$ (см. [3, 30]). Из определения модулярных форм относительно группы $\widehat{\Gamma}_m$ следует, что дифференциальная форма $F(Z)\varpi^{\otimes k}$ является $\widehat{\Gamma}_m$-инвариантной, если форма $F(Z)$ имеет вес $19k$. Такие дифференциальные формы называются плюри-каноническими. Если $k = 1$, то соответствующая форма называется канонической. Справедлив следующий принадлежащий Е. Фрайтагу критерий продолжимости канонических дифференциальных форм, определенных на некомпактном сингулярном многообразии, на гладкую модель некоторой компактификации этого многообразия.

Лемма 5.3. *Форма $F(Z)\varpi$ может быть продолжена до элемента из пространства $H^0(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}, \Omega_{19}(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}))$, где $\Omega_{19}(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)})$ пучок канонических дифференциальных форм на гладкой компактификации многообразия $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$, если $F(Z)\varpi$ является квадратично интегрируемой.*

Доказательство. См. [9], предложение 3.2.1.

Хорошо известно, что $F(Z)\varpi$ квадратично интегрируемая, если $F(Z)$ — параболическая форма.

Лемма 5.4. *Обозначим через* $\mathfrak{S}_{19}(\widehat{\Gamma}_m)$ *пространство всех параболических форм веса* 19 *относительно группы* $\widehat{\Gamma}_m$. *Пусть* m *свободно от квадратов. Справедлива следующая оценка размерности пространства параболических форм:*

$$\dim \mathfrak{S}_{19}(\widehat{\Gamma}_m) \geqslant \sum_{j=1}^{m-1} \left(\{2j+10\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor \right),$$

где

$$\{2j+10\}_{12} = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor, & \text{если } \ k \not\equiv 2 \mod 12, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1, & \text{если } \ k \equiv 2 \mod 12, \end{cases}$$

совпадает с размерностью пространства параболических форм веса k *относительно группы* $SL_2(\mathbb{Z})$. *В частности, пространство* $\mathfrak{S}_{19}(\widehat{\Gamma}_m)$ *не пусто для любого свободного от квадратов числа* $m > 1$, *и оно содержит по крайней мере две параболических формы, если* $m > 3$.

Доказательство. Как это было уже доказано в лемме 2.4, размерность пространства форм Якоби индекса один для решетки L_m зависит только от дискриминантной группы $G(L_m)$ решетки L_m. Следовательно, следующие два пространства форм Якоби имеют одну и ту же размерность:

$$\dim \ \mathbf{J}_{19,1}(\langle -2m \rangle \oplus (-E_8)^2) = \dim \ \mathbf{J}_{11,1}(\langle -2m \rangle).$$

Форма Якоби индекса один и веса k относительно группы Якоби решетки $H^2 \oplus \langle -2m \rangle$ (см. §2) есть, по определению, голоморфная функция на $H^+ \times \mathbb{C}$ с разложением Фурье типа

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z},\, l \in \mathbb{Z} \\ 4nm - l^2 \geqslant 0}} f(n,l) \exp(2\pi i(n\tau + lz)),$$

удовлетворяющая следующим функциональным уравнениям:

$$\varphi(\tau, z) = (c\tau + d)^{-k} \exp\Big(-2\pi i \frac{mcz^2}{c\tau + d} \Big) \varphi\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d} \Big),$$

$$\varphi(\tau, z) = \exp(2\pi i m(x^2\tau + 2xz)) \varphi(\tau, z + x\tau + y)$$

для любых $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $x, y \in \mathbb{Z}$. Но как легко заметить, это эквивалентно определению форм Якоби *индекса* m и веса k из книги Эйхлера и Загира [EZ]. Формула для размерности этого последнего пространства известна (см. [8] и [36])

$$\dim \mathbf{J}_{k,m} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \{k+2j\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor, & k \text{ — четно}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \{k+2j-1\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor, & k \text{ — нечетно}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Следовательно,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{19,1}(\langle -2m\rangle \oplus (-E_8^2)) = \sum_{j=1}^{m-1} \{2j+10\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor.$$

Решетка L_m является максимальной четной целочисленной решеткой для любого m, свободного от квадратов. Применяя подъем, построенный в теореме 3.1, мы получаем доказательство леммы.

Согласно лемме 5.3 и лемме 5.4, для любого свободного от квадратов числа $m > 1$ (соответственно $m > 3$) существует по-крайней мере одно сечение (соответственно два сечения) канонического линейного расслоения многообразия $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$. Это доказывает теорему 5.1 и следующее следствие.

Следствие 5.5. *Пусть m — свободно от квадратов. Тогда выполняется следующая оценка геометрического рода:*

$$p_g(m) = h^{19,0}(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}, \Omega_{19}(\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}))$$

многообразия $\widetilde{\mathcal{K}}_m^{(2)}$

$$p_g(m) \geqslant \sum_{j=1}^{m-1} \{2j+10\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor = O(m).$$

Определим теперь главную конгруэнц-подгруппу

$$\Gamma_m(q) = \{\, g : gL_m = L_m,\ \forall l \in L_m\ (gl - l) \in qL_m \,\}$$

целочисленной ортогональной группы. Через $\Gamma_{m,q}$ обозначим пересечение $\widetilde{\Gamma}_m \cap \Gamma_m(q)$.

Лемма 5.6. *Главная конгруэнц-подгруппа не имеет элементов конечного порядка, если $q \geqslant 3$.*

Доказательство. Это утверждение справедливо для любой подгруппы группы $GL_n(q, \mathbb{Z})$ (см. [21], гл. V, лемма 3.9).

Группа $\Gamma_{m,q}$ — чистая (neat) группа в терминологии книги [1]. Согласно результатам, полученным в этой книге, в качестве $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q}$ можно взять гладкую тороидальную компактификацию многообразия $\mathcal{K}_{m,q} = \Gamma_{m,q} \setminus \mathcal{H}_{19}$.

Теорема 5.7. *Многообразие $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q}$ имеет общий тип для произвольного натурального числа m и любого $q \geqslant 3$.*

Как уже было отмечено выше, достаточно доказать теорему 5.7 только для m, свободных от квадратов.

Лемма 5.8. *Пространство* $\mathfrak{S}_{18}(\widehat{\Gamma}_m)$ *параболических форм веса* 18 *относительно группы* $\widehat{\Gamma}_m$ *не является пустым для любого свободного от квадратов числа* m, *включая случай* $m=1$.

Доказательство. См. доказательство леммы 5.4.

Лемма 5.9. *Размерность пространства модулярных форм веса* $19k$ *относительно группы* $\Gamma_{m,q}$ *имеет порядок* k^{19} *при* $k\to\infty$:

$$\dim\ \mathfrak{M}_{19k}(\Gamma_{m,q})=O(k^{19}).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из хорошо известного принципа пропорциональности Хирцебруха-Мамфорда, который дает главный член размерности пространства модулярных форм веса k при $k\to\infty$ (см. [28]). Рассмотрим проективную реализацию однородной области $\mathcal{H}_{19}$ в виде подмножества $\mathcal{D}^+_m$ проективной квадрики

$$\check{\mathcal{D}}_m=\{\,v\in\mathbb{P}(L_m\otimes\mathbb{C}):v\cdot v=0\,\}.$$

Согласно [28],

$$\dim\mathfrak{M}_{19k}(\Gamma_{m,q})\sim\operatorname{Vol}(\Gamma_{m,q}\setminus\check{\mathcal{D}}_m/)\,\dim H^0(\check{\mathcal{D}}_m,\Omega_{19}^{\otimes(-k+1)}(\check{\mathcal{D}}_m)),$$

где $\Omega_{19}(\check{\mathcal{D}}_m)$ — пучок голоморфных форм степени 19 на гладкой квадрике $\check{\mathcal{D}}_m$ в $\mathbb{P}^{20}$. Рассмотрим точную последовательность

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(19k-21)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{20}}(19k-19)\to\Omega_{19}^{\otimes(-k+1)}(\check{\mathcal{D}}_m)\to 0$$

и применим классические формулы Ботта

$$h^q(\mathbb{P}_n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k))=\begin{cases}C^k_{n+k}, & \text{если } q=0,\ k\geqslant 0 \text{ и } q=n,\ k\leqslant -n-1,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В результате имеем

$$h^0(\check{\mathcal{D}},\Omega_{19}^{\otimes(-k+1)}(\check{\mathcal{D}}_m))=C^{20}_{19k+1}-C^{20}_{19k-1}=O(k^{19}).$$

Доказательство теоремы 5.7. Опять достаточно рассмотреть только случай, когда m свободно от квадратов. Возьмем ненулевую параболическую форму F веса 18 относительно группы $\widehat{\Gamma}_m$ и произвольную форму G веса $19k$ относительно группы $\Gamma_{m,q}$. Произведение $F^{19k}G$, будучи параболической формой веса 19^2k, имеет первый ненулевой коэффициент Фурье-Якоби с номером $m\geqslant 19k$. Согласно критерию Тая (см. [1, гл. 4]) можно продолжить дифференциальную форму $F^{19k}G\varpi^{\otimes 19k}$ до плюри-канонической дифференциальной формы на гладкой компактификации $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q}$. Следовательно, для больших k размерность пространства плюри-канонических дифференциалов имеет максимально возможный порядок

$$\dim H^0(\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q},\Omega_{19}^{\otimes 19k}(\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q}))=O(k^{19}),$$

и многообразие $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,q}$ имеет общий тип.

§6. Пространство модулей абелевых поверхностей

В этом параграфе мы рассмотрим кратко случай пространства модулей абелевых поверхностей с неглавной поляризацией. Детальное изложение более сильных результатов, полученных в этом направлении, могут быть найдены в публикуемом препринте [7].

Хорошо известно, что комплексная абелева поверхность S с поляризацией типа $(1,m)$ $(m \in \mathbb{N})$ изоморфна тору

$$S \approx \mathbb{C}^2/L_Z,$$

где Z принадлежит верхней полуплоскости Зигеля рода два

$$\mathcal{H}_2 = \{Z = {}^tZ \in M_2(\mathbb{C}),\ \operatorname{Im}(Z) > 0\},$$

и $\mathbb{Z}$-решетка L_Z порождена строчками матрицы периодов

$$\begin{pmatrix} Z \\ e_m \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad e_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Относительно этого базиса поляризация задается кососимметрической формой $J_m = \begin{pmatrix} 0 & e_m \\ -e_m & 0 \end{pmatrix}$. Целочисленная симплектическая группа этой формы

$$Sp(J_m, \mathbb{Z}) = \{\, g \in M_4(\mathbb{Z}) : gJ_m{}^tg = J_m \,\}$$

называется парамодулярной группой. Эта группа действует на верхней полуплоскости Зигеля

$$Z \to g\langle Z\rangle = (AZ + Be_m)(CZ + De_m)^{-1}e_m,$$

а фактор-пространство

$$\mathcal{A}_m = Sp(J_m, \mathbb{Z}) \setminus \mathcal{H}_2$$

является, как хорошо известно, пространством модулей абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1,m)$. Компактификация этого пространства модулей обладает структурой квазипроективного алгебраического многообразия.

Теорема 6.1. *Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ — произвольная гладкая модель некоторой компактификации пространства модулей $\mathcal{A}_m$ абелевых поверхностей с поляризацией типа* $(1,m)$. *Предположим, что $m = m_s^2 m_f$, где m_f свободно от квадратов. Размерность Кодаиры многообразия $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ неотрицательна, если $m_f \geqslant 13$ и $m_f \neq 14, 15, 30$. Более того, размерность Кодаиры многообразия $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ положительна, если $m_f \geqslant 29$ и $m_f \neq 30, 35, 42$.*

Замечание. В публикуемом препринте [7] мы доказываем более сильный результат: многообразие $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ не является унирациональным, если $m \geqslant 13$ и $m \neq 14, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36$.

Отметим также, что в некоторых специальных случаях нам известна размерность Кодаиры пространства модулей абелевых поверхностей. О'Греди доказал в [31], что для квадрата простого числа p пространство $\mathcal{A}_{p^2}$, являющееся конечным накрытием рационального многообразия $\mathcal{A}_1$, имеет общий тип для $p \geqslant 17$.[1]

Пространство модулей $\mathcal{A}_p^{lev}$ абелевых поверхностей с поляризацией типа $(1,p)$ (p — простое) с дополнительной структурой уровня интенсивно исследуется в работах Хулека, Кана, Санкарана, Вайнтрауба (см. [18, 19, 20]). Многообразие $\mathcal{A}_p^{lev}$ является разветвленным накрытием степени $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ основного пространства модулей $\mathcal{A}_p$, и оно имеет общий тип для $p \geqslant 41$.

Как и для случая $K3$ поверхностей, достаточно доказать теорему 6.1 только для m свободных от квадратов (см. (5.1)). Ниже мы определим вложение парамодулярной группы в ортогональную группу сигнатуры $(2,3)$ и применим теорему 3.1 для построения канонических дифференциальных форм на пространстве модулей $\mathcal{A}_m$.

Напомним конструкцию известного изоморфизма между симплектической и ортогональной группами. Выше мы использовали специальную координатную реализацию ортогональной группы в определениях фактора автоморфности, модулярных форм и модулярного пространства $\mathcal{A}_m$, поэтому дадим подходящее для наших целей описание этого изоморфизма.

Зафиксируем решетку $M = \oplus_i \mathbb{Z}e_i$ ранга четыре и рассмотрим решетку ранга шесть, порожденную целочисленными бивекторами $\wedge^2 M = \oplus_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\mathbb{Z}e_i \wedge e_j$, с определенной на ней квадратичной формой $\operatorname{tr}(v \wedge v)$, где след берется относительно $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Симплектическая группа $Sp(J_m, \mathbb{Z})$ действует на решетке $\wedge^2 M$ и сохраняет квадратичную форму $\operatorname{tr}(v \wedge v)$, в силу известной инвариантности пфаффиана. Группа $Sp(J_m,\mathbb{Z})$ сохраняет также бивектор $w = -(me_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4)$ и, следовательно, действует на решетке $w^\perp$. Это дает нам инъективный антигомоморфизм симплектической группы по модулю ее центра $\pm E_4$ в ортогональную группу решетки $w^\perp$. Зафиксируем следующий базис этой решетки:

$$\{e_4 \wedge e_3,\ e_4 \wedge e_1,\ me_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2\}. \tag{6.2}$$

В этом базисе квадратичная форма $\operatorname{tr}(v \wedge v)$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -I \\ 0 & 2m & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $w^\perp$ изоморфна некоторой решетке рассмотренного в §2 типа:

$$w^\perp \approx L_m = H \oplus H \oplus \langle -2m \rangle. \tag{6.3}$$

[1] Недавно мы получили препринт С. Конды „On the Kodaira dimension of the moduli space of $K3$ surfaces", где он доказывает результат аналогичный результату О'Греди для пространства модулей $\mathcal{K}_{p^2}$ $K3$ поверхностей, однако без эффективной оценки на простое число p.

Отсюда мы получаем антивложение проективной симплектической группы $Sp(J_m, \mathbb{Z})/\{\pm E_4\}$ в специальную ортогональную группу решетки L_m. Обозначим через X координатный столбец бивектора $v \in w^{\perp}$. Тогда положим

$$g(v) = {}^t g V_X g = V_{\widetilde{g}X}, \qquad (g \in Sp(J_m, \mathbb{Q})),$$

где V_X — кососимметрическая матрица бивектора v, записанного в базисе (6.2).

Лемма 6.2. *Положим* $\varphi_m(\gamma) = \widetilde{\gamma^{-1}}$, *тогда определено вложение*

$$\varphi_m \colon Sp(J_m, \mathbb{Z}) \to \widehat{\Gamma}_{L_m},$$

где L_m *— решетка* (6.3)*, а* $\widehat{\Gamma}_{L_m}$ *— подгруппа индекса два ортогональной группы* $\widetilde{\Gamma}_{L_m}$ *(см.* (3.1)*), состоящая из всех элементов определителя один.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения $\widetilde{g}$ и того факта, что для произвольного $(g_{ij}) \in Sp(J_m, \mathbb{Z})$ элементы g_{21}, g_{23}, g_{41}, g_{43} сравнимы с 0 по модулю m и $g_{22}g_{44} - g_{24}g_{42} \equiv 1 \mod m$.

Образы образующих рациональной парамодулярной группы легко вычисляются

$$\varphi_m\begin{pmatrix} E_2 & e_m^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\nabla(m^{-1}), \qquad \varphi_m\begin{pmatrix} 0 & e_m^{-1} \\ -e_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m^{-1}I \\ 0 & 1 & 0 \\ -mI & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. обозначения (2.5), (2.7)). Вложим верхнюю полуплоскость Зигеля в однородную область $\mathcal{H}_3^{(m)}$ ортогональной группы решетки L_m

$$\epsilon_m\left(\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}\right) = {}^t\left(\frac{\tau}{m}, \frac{z}{m}, \omega\right).$$

Легко проверить, что вложения φ_m и ϵ_m коммутируют с действиями групп на однородных областях:

$$\epsilon_m(g\langle Z\rangle) = \varphi_m(g)\langle \epsilon_m(Z)\rangle,$$
$$J_{Sp}(g, Z) = \det(CZ + De_m)e_m^{-1} = J_{SO}(\varphi_m(g), \epsilon_m(Z))$$

для произвольных $g \in Sp(J_m, \mathbb{Q})$ и $Z \in H_2$. Эти формулы вместе с утверждением леммы 6.2 дают следующий результат.

Лемма 6.3. *Пусть F является параболической формой веса k относительно группы $\widehat{\Gamma}_{L_m}$, тогда функция*

$$G(Z) = F(\epsilon_m(Z))$$

является параболической формой того же самого веса относительно парамодулярной группы $Sp(J_m, \mathbb{Z})$.

Как и в утверждении леммы 5.4 мы можем оценить размерность пространства параболических форм относительно ортогональной группы $\widetilde{\Gamma}_{L_m}$, используя результаты теоремы 3.1, леммы 2.4 и формулы (5.2).

Пусть m — свободно от квадратов. Тогда справедливо следующее неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_3(\widetilde{\Gamma}_{L_m}) \geqslant \sum_{j=1}^{m-1} \left(\{2j+2\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor \right).$$

Следовательно, пространство $\mathfrak{S}_3(\widehat{\Gamma}_{L_m})$ не пусто для любого свободного от квадратов $m \geqslant 17$ или $m = 13$ с одним исключением для числа $m = 30$. Указанное пространство состоит по крайней мере из двух форм для свободного от квадратов $m \geqslant 29$ ($m \neq 30, 35, 42$). Утверждение теоремы 6.1 следует теперь из леммы 5.3 и леммы 6.3.

Аналогично следствию 5.5 мы имеем следующую оценку на геометрический род пространства модулей $\mathcal{A}_m$.

Следствие 6.4. *Пусть m — свободно от квадратов. Тогда геометрический род $p_g(m) = h^{3,0} = \dim H^0(\widetilde{\mathcal{A}}_m, \Omega_3(\widetilde{\mathcal{A}}_m)$ многообразия $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ удовлетворяет неравенству*

$$p_g(m) \geqslant \sum_{j=1}^{m-1} \{2j+2\}_{12} - \left\lfloor \frac{j^2}{4m} \right\rfloor = O(m)$$

(*см. лемму* 5.4). *Например*, $p_g(37) \geqslant 4$, $p_g(41) \geqslant 3$, $p_g(43) \geqslant 4$.

Список литературы

[1] Ash A., Mumford D., Rapoport M., Tai Y., *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, MSP, Brookline, 1975.

[2] Andrianov A. N., *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren der math. Wissensch., 286, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[3] Baily W. L., *Introductory lectures on automorphic forms*, Iwanomi Shoten and Princeton Univ. Press, 1973.

[4] Baily W. L., Borel A., *Compactification of arithmetic quotient of bounded domains*, Ann. Math. **84** (1966), 442–528.

[5] Birkenhake Ch., Lange H., *Moduli space of abelian surfaces with isogeny*, Preprint 153 University Erlangen, 1992, p. 18.

[6] Barth W., Peters C., Van de Ven A., *Compact complex surfaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[7] Eichler M., *Quadratische Formen und Orthogonal Gruppen*, Grundlehren der math. Wissensch., 63, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1952.

[8] Eichler M., Zagier D., *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math. 55, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985.

[9] Freitag E., *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der math. Wissensch., 254, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[10] Freitag E., *Singular modular forms and theta relations*, Lect. Notes in Math., vol. 1487, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[11] Гриценко В. А., *Функции Якоби n-переменных*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **168** (1988), 32–45; English transl., J. Soviet Math. **53** (1991), 243–252.

[12] Гриценко В. А., *Индукция в теории дзета-функций*, Алгебра и анализ **6** (1994), № 1, 1–76.

[13] Гриценко В. А., *Разложения многочленов Гекке классических групп*, Мат. сб. **137** (1988), 328–351; English transl., Math. USSR-Sb **65** (1990), 333–356.

[14] Гриценко В. А., *Функции Якоби и Эйлеровы произведения для Эрмитовых модулярных форм*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **183** (1990), 77–123; English transl., J. Soviet Math. **62** (1992), 2883–2914.

[15] Гриценко В. А., *Действие модулярных операторов на коэффициентах Фурье-Якоби модулярных форм*, Мат. сб. **119** (1982), 248–277; English transl., Math. USSR-Sb. **47** (1984), 237–268.

[16] Gritsenko V. A., *Modular forms and moduli spaces of of abelian and $K3$ surfaces*, Mathem. Gottingensis, SFB Geometrie und Analysis **26** (1993).

[17] Gritsenko V. A., *Moduli spaces of of abelian surfaces with nonprincipal polarization*, (in preparation).

[18] Hulek K., Kahn C., Weintraub S. H., *Singularities of the moduli spaces of certain abelian surfaces*, Comp. Math. **79** (1991), 231–253.

[19] Hulek K., Sankaran G. K., *The Kodaira dimension of certain moduli spaces of abelian surfaces*, Preprint.

[20] Hulek K., Weintraub S. H., *Bielliptic abelian surfaces*, Math. Ann. **283** (1989), 411–429.

[21] Igusa J., *Theta function*, Grundlehren der math. Wissensch., 254, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[22] Исковских В. А., Шафаревич И. Р., *Алгебраические поверхности*, Итого науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. напр., т. 36, 1989, с. 131—264.

[23] Kneser M., *Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen*, Math. Ann. **255** (1981), 453–462.

[24] Kudla S., *Seesaw dual reductive pairs*, Automorphic forms of several variables, Progress in Math. 46, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1983, pp. 244–268.

[25] Куликов В. С., *Вырождения поверхностей типа $K3$ и поверхностей Энриквеса*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **41** (1977), 1008–1042.

[26] Looijenga E., Peters C., *Torelli theorem for Kähler $K3$ surfaces*, Comp. Math. **42** (1981), 145–189.

[27] Mumford D., *On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety*, Lect. Notes in Math., vol. 997, 1983, pp. 348–375.

[28] Mumford D., *Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case*, Inv. math. **42** (1977), 239–272.

[29] Никулин В. В., *Целочисленные симметрические билинейные формы и их приложения*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **43** (1979), 105–167; English transl., Math. USSR-Izv. **14** (1980), 103–166.

[30] Oda T., *On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature* $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97–144.

[31] O'Grady K., *On the Kodaira dimension of moduli spaces of abelian surfaces*, Comp. Math. **72** (1989), 121–163.

[32] Pyatetskii-Shapiro I. I., *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[33] Пятетский-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р., *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа* $K3$, Изв. АН СССР. Сер. мат. **35** (1971), 530–572.

[34] Rallis S., Schiffmann G., *On a relation between* SL_2 *cusp forms and cusp forms on tube domain associated to orthogonal groups*, Trans. Amer. Math. Soc **263** (1981), 1–58.

[35] Scattone F., *On the compactification of moduli spaces for algebraic* $K3$ *surfaces*, Memoirs of AMS 374, AMS, 1987.

[36] Skoruppa N.-P., Zagier D., *A trace form for Jacobi forms*, J. reine und angew. Math. **393** (1989), 168–198.

[37] Sugano T., *Jacobi forms and theta lifting*, Preprint (1991).

[38] Tai Y., *On the Kodaira dimension of the moduli spaces of abelian varieties*, Inv. Math. **68** (1982), 425–439.

[39] Vasserstein L., *Normal subgroup of orthogonal groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **110** (1988), 955–973.

[40] Weil A., *Final report on contract AF 18 (603)–57*, Oeuvres Scientifiques/Collected Papers, Vol. 2, pp. 390–395.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки, 27.

Поступило 26 августа 1993 г.