

УДК 517.958:539.3

ХАОТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МЕХАНИКЕ УПРУГИХ СИСТЕМ¹⁾

© 1997 г. О. В. Костенко, Е. П. Кубышкин

(Ярославль)

Поступила в редакцию 02.02.96 г.
Переработанный вариант 03.09.96 г.

Рассматривается краевая задача, описывающая динамику распределенного ротора (вала), одна из опор которого испытывает периодическое воздействие (вибрацию). Выявлены условия существования хаотического колебательного режима (странного аттрактора), для которого вычислены характеристические показатели и ляпуновская размерность. Выявлен механизм его возникновения.

ВВЕДЕНИЕ

Роторы (валы) являются основными элементами многих энергетических, транспортных и других механизмов, навигационных приборов и служат для передачи крутящих моментов и кругового движения. Изучению динамики роторов посвящена обширная литература как теоретического, так и прикладного характера. Как правило, основной вопрос, интересующий исследователей – условия возникновения и характер колебаний роторов, вызывающих вибрацию. Настоящая работа посвящена изучению влияния периодической вибрации одной из опор распределенного однородного ротора на его динамику. Периодическая вибрация может возникнуть вследствие неоднородности подшипника или других внешних факторов. Показано, что в этом случае могут возникнуть хаотические колебания. Указанный механизм возникновения хаотических колебаний может быть использован позитивно, например в вибраторах.

Математической моделью рассматриваемой механической системы является некоторая нелинейная краевая задача. В качестве математического аппарата исследования используется метод интегральных многообразий и теория бифуркаций систем с распределенными параметрами [1], [2]. С математической точки зрения задача сводится к анализу “критического случая трех пар чисто мнимых корней при наличии внутреннего резонанса” в некотором частном случае. Возможность возникновения хаотических аттракторов в этом критическом случае является также новым математическим результатом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(au + b \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} \right) + (1 - ib\Omega) \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + c|u|^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{s=0} = p(t), \quad \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = u|_{s=1} = \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0, \quad (1.2)$$

$$0 \leq s \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Здесь $u(s, t) = x(s, t) + iy(s, t)$, $i = \sqrt{-1}$; a, b, c и Ω – положительные постоянные; $p(t) = v \exp(i\omega t)$, $0 < v \leq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Краевая задача (1.1), (1.2) является (в безразмерных переменных) математической моделью динамики распределенного однородного вращающегося ротора (вала) постоянного сечения из вязкоупругого материала (модель Фойгта), одна из опор которого испытывает периодическое

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01178а).

воздействие (вибрацию) [3], [4]. При этом $x(s, t)$, $y(s, t)$ характеризуют проекции средней линии ротора на взаимно перпендикулярные оси;

$$a = hl^2/(EI m)^{1/2}, \quad b = (EI/m)^{1/2} \mu/l^2, \quad c = rl^4/(EI m)^{1/2}, \quad \Omega = (m/EI)^{1/2} l^2 \Omega_*,$$

где l – длина ротора, m – погонная масса ротора, EI – изгибная жесткость сечения ротора, μ – коэффициент внутреннего трения материала ротора, h и r – соответственно, линейный и нелинейный коэффициенты внешнего трения, Ω_* – угловая скорость вращения ротора.

Ниже изучаются условия возникновения хаотических колебательных режимов (странных аттракторов) краевой задачи (1.1), (1.2).

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

В (1.1), (1.2) положим $u(s, t) = v(s, t) + p(t)g(s)$, $g(s) = 2s^3 - 3s^2 + 1$. В результате имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(a v + b \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} \right) + (1 - ib\Omega) \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + c |v|^2 \frac{\partial v}{\partial t} + g(s) \dot{p}(t) + \\ + [ag(s) + cg^3(s)p^2(t) + cg^2(s)(v + \bar{v})p(t) + cg(s)|v|^2] \dot{p}(t) + \\ + cg(s)(v + \bar{v}) \frac{\partial v}{\partial t} p(t) + cg^2(s) \frac{\partial v}{\partial t} p^2(t) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v|_{s=0} = \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{s=0} = v|_{s=1} = \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0. \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $H = L_2[0, 1]$ комплекснозначных функций и оператор $\mathbf{B}v \equiv v^V$, действующий в нем, с областью определения $D(\mathbf{B}) = \{v | v \in W_2^4[0, 1], v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$ (штрихи обозначают производную).

Оператор \mathbf{B} является самосопряженным и положительно-определенным; обратный оператор вполне непрерывен. Спектр оператора состоит из чисел $\gamma_1^4 < \dots < \gamma_n^4 < \dots$, где γ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{ch} \gamma \cos \gamma = 1$ и имеют вид

$$\gamma_1 = 4.729; \quad \gamma_2 = 7.853; \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2}(2n+1) + O\left(\exp\left[-\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]\right).$$

Собственные функции оператора \mathbf{B} имеют вид $w_n(s) = w_n^*(s) / \|w_n^*(s)\|_{L_2}$, где $w_n^*(s) = (\sin \gamma_n - \operatorname{sh} \gamma_n)[\operatorname{ch}(s) - \cos(s)] + (\operatorname{ch} \gamma_n - \cos \gamma_n)[\operatorname{sh}(s) - \sin(s)]$.

Обозначим через $\mathbf{H} = H \otimes H$ гильбертово пространство элементов $v = (v_1, v_2)$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1)_{L_2} + (u_2, v_2)_{L_2}.$$

Введем в рассмотрение действующий в \mathbf{H} оператор

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -(1 - ib\Omega)\mathbf{B} & -(a\mathbf{I} + b\mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{I} – тождественный оператор в \mathbf{H} . Область определения $D(\mathbf{A}) = D(\mathbf{B}) \otimes D(\mathbf{B})$.

Положим $v(t) = (v(s, t), \partial v(s, t)/\partial t)$ и перепишем краевую задачу (2.1), (2.2) в виде одного операторного уравнения в \mathbf{H} :

$$\dot{v} = \mathbf{A}v + \mathbf{F}(v) + v\mathbf{F}_0(\omega t, v; v), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{F}(v) = \operatorname{col}(0, -c|v_1|^2 v_2)$, явный вид гладкого нелинейного оператора $\mathbf{F}_0(\tau, v; v) = \mathbf{F}_0(\tau + 2\pi, v; v)$ легко может быть получен по (2.1), (2.2) с учетом (1.2).

Для доказательства разрешимости и единственности решения задачи Коши уравнения (2.4) при условии $v(0) \in D(A)$, $t > 0$ достаточно перейти к эквивалентному интегральному уравнению в \mathbf{H} , используя эволюционный оператор линейной части. Затем применить один из методов последовательных приближений [5].

Рассмотрим сначала линейное уравнение

$$\dot{v} = Av. \tag{2.5}$$

Устойчивость решений уравнения (2.4) определяют (см. [6]) точки спектра пучка операторов

$$L(\lambda) \equiv \lambda I - A, \tag{2.6}$$

где I – тождественный оператор в \mathbf{H} , и которые, в свою очередь, являются решениями последовательности квадратичных уравнений

$$p_n(\lambda) \equiv \lambda^2 + (a + b\gamma_n^4)\lambda + (1 - ib\Omega)\gamma_n^4 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.7}$$

При $\Omega = 0$ все многочлены (2.7) устойчивы, т.е. их корни принадлежат левой открытой комплексной полуплоскости и их вещественные части отделены от нуля. Следовательно, решения уравнения (2.5) асимптотически устойчивы. При увеличении Ω корни каждого из уравнений ведут себя следующим образом: вещественная часть одного из корней монотонно стремится к $+\infty$, а другого – к $-\infty$. При этом корень n -го уравнения пересекает мнимую ось при $\Omega_n = \gamma_n^2 + a/(b\gamma_n^2)$ в точке $\lambda = i\sigma_n$ ($\sigma_n = \gamma_n^2$). Отсюда следует, что потеря устойчивости решений уравнения (2.5) может происходить по любой собственной функции оператора A в зависимости от $a^v = a/b$. При $0 < a^v < a_1^v$ это происходит по первой функции, $a_1^v < a^v < a_2^v$ – по второй и т.д., где $a_n^v = \gamma_n^2 \gamma_{n+1}^2$. Отметим, что при $a^v = a_n^v$, $\Omega = \Omega_n = \Omega_{n+1} = \gamma_n^2 + \gamma_{n+1}^2$ потеря устойчивости решений уравнения (2.5) происходит сразу по двум собственным формам оператора A (n -й и $(n+1)$ -й).

Положим $v = 0$ и будем считать, что $|a^v - a_n^v|, |\Omega - \Omega_n| \ll 1$. Потеря устойчивости нулевого решения уравнения (2.4) в этом случае приводит к образованию установившихся автоколебательных режимов. Подробный анализ характера и условий возникновения автоколебательных режимов уравнения (2.4) в окрестности точки (a_n^v, Ω_n) приведен в [7]. При этом в окрестности (a_n^v, Ω_n) существуют области, при значении параметров из которых уравнение (2.4) имеет одно либо два устойчивых периодических решения (асинхронные прецессии с частотами колебаний, близкими к σ_n и σ_{n+1} соответственно).

В дальнейшем без ограничения общности рассмотрим случай $n = 1$. Предположим, что

$$|\omega - 2\sigma_1 + \sigma_2| \ll 1, \tag{2.8}$$

т.е. частота колебаний опоры находится в окрестности некоторого комбинационного резонанса. Уравнение (2.4), таким образом, становится зависящим от четырех малых параметров $a^v - a_1^v$, $\Omega - \Omega_1$, $\omega - 2\sigma_1 + \sigma_2$, v . Цель дальнейшего – показать существование в пространстве этих параметров таких областей, при значении из которых уравнение (2.4) будет иметь хаотические стационарные режимы.

Введем малый параметр $\epsilon > 0$ и будем строить области вида

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1^v(1 + p\epsilon), & a &= a_1(1 + p\epsilon), & b &= b_1, \\ \Omega &= \Omega_1(1 + q\epsilon), & \omega - 2\sigma_1 + \sigma_2 &= \delta\epsilon, & v &= v_0\epsilon^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где p, q, δ, v_0 – величины порядка единицы.

В (2.1), (2.2) положим a, b, Ω, v согласно (2.9). В результате уравнение (2.4) примет вид

$$\dot{v} = A(\epsilon)v + F(v) + \epsilon^{1/2}v_0F_0(\omega t, v, v, \epsilon^{1/2}). \tag{2.10}$$

Оператор $A(\epsilon)$ легко строится по (2.3).

Отметим, что при $v_0 = 0$ амплитуда возникающих в (2.10) автоколебаний имеет порядок $O(\epsilon^{1/2})$. Выбор такой же амплитуды внешнего воздействия обусловлен спецификой рассматриваемого комбинационного резонанса.

Рассмотрим пучок операторов $L(\lambda; \varepsilon)$, полученный из (2.6) заменой a , b и Ω в соответствии с (2.9) (соответственно (2.7) примет вид $p_n(\lambda; \varepsilon)$). Его спектру принадлежат точки вида $\lambda_1(\varepsilon) = \tau_1(\varepsilon) + i\sigma_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon) = \tau_2(\varepsilon) + i\sigma_2(\varepsilon)$, где $\tau_1(0) = \tau_2(0) = 0$, $\sigma_1(0) = \sigma_1$, $\sigma_2(0) = \sigma_2$, а остальные точки спектра при всех малых ε лежат в левой открытой полуплоскости.

Согласно (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \tau_k(\varepsilon) &= \tau_k^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma_k(\varepsilon) = \sigma_k + \sigma_k^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \tau_k^1 = 2\kappa_k \sigma_k \alpha_k, \\ \sigma_k^1 &= \kappa_k (a_1 + b_1 \sigma_k^2) \alpha_k, \quad \alpha_k = \sigma_k (qb_1 \Omega_1 \sigma_k - p\alpha_1), \quad \kappa_k = [(a_1 + b_1 \sigma_k^2)^2 + 4\sigma_k^2]^{-1}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Положим

$$L(i\sigma_k; 0)e_k(s) = 0, \quad L^*(i\sigma_k; 0)h_k(s) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (e_{k_1}(s), h_{k_2}(s)) = \delta_{k_1 k_2}, \quad (2.12)$$

где $L^*(i\sigma_k; 0)$ – сопряженный с $L(i\sigma_k; 0)$ оператор;

$$e_k(s) = (1, i\sigma_k)w_k(s), \quad h_k(s) = (-i\sigma_k + a_1 + b_1 \sigma_k^2, 1)[\bar{p}'_k(i\sigma_k; 0)w_k(s)]^{-1}.$$

Разобьем \mathbf{H} на прямую сумму подпространств \mathbf{H}_+ и \mathbf{H}_- ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-$), первое из которых является линейной оболочкой вектор-функций $e_k(s)$, $k = 1, 2$, а второе – совокупностью вектор-функций вида $v \in \mathbf{H}$: $(v, h_k) = 0$, $k = 1, 2$.

Ниже $S_H(r_0)$ – шар радиуса r_0 в пространстве \mathbf{H} , $S(r_0) = D(A) \cap S_H(r_0)$, $S_{\pm}(r_0) = S(r_0) \cap \mathbf{H}_{\pm}$. Норма в \mathbf{H} индуцирована скалярным произведением.

Множество $\mathbf{M}(\varepsilon)$ точек $(v, t) \in S(r_0) \times \mathbb{R}$ будем называть интегральным многообразием уравнения (2.10), если из условия $(v_0, t_0) \in \mathbf{M}(\varepsilon)$ вытекает, что $(v(t; \varepsilon), t) \in \mathbf{M}(\varepsilon)$, $t_0 \leq t$, где $v(t; \varepsilon)$ – решение уравнения (2.10) с начальными условиями $v(t_0; \varepsilon) = v_0$.

Из результатов работ [3], [4] следует, что уравнение (2.10) имеет интегральное многообразие $\mathbf{M}(\varepsilon) \subset S(r_0) \times \mathbb{R}$, которое может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} w_{\pm} &= G(\tau, w_{\pm}, \bar{w}_{\pm}; \varepsilon^{1/2}), \quad w_{\pm} \in S_{\pm}(r_0), \\ G(\tau, w_{\pm}, \bar{w}_{\pm}; \varepsilon^{1/2}) &\equiv G(\tau + 2\pi, w_{\pm}, \bar{w}_{\pm}; \varepsilon^{1/2}), \quad G(\tau, 0, 0; 0) \equiv 0, \quad \tau = \omega t, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где G^* – достаточно гладкий по совокупности переменных нелинейный оператор, действующий при каждом τ и ε из $S_+(r_0)$ в $S_-(r_0)$.

Пусть $(v_0, t_0) \in S(r_0) \times \mathbb{R}$ – начальное условие решения $v(t, \varepsilon^{1/2})$ уравнения (2.10). Тогда

$$d(t, v(t; \varepsilon^{1/2}); \varepsilon^{1/2}) \leq kd(t_0, v_0; \varepsilon^{1/2}) \exp[-\alpha(t - t_0)], \quad k, \alpha > 0,$$

где $d(t, v; \varepsilon^{1/2})$ – расстояние от точки $v \in \mathbf{H}$ до многообразия $\mathbf{M}(\varepsilon)$ при фиксированном t .

Таким образом, асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение решений уравнения (2.10) с начальными условиями из шара $S(r_0)$ определяется поведением решений на интегральном многообразии (2.13). Последнее в свою очередь определяется поведением решений некоторой двумерной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Запишем элементы из \mathbf{H}_+ как $w_+ = z_1 e_1(s) + z_2 e_2(s)$, где z_1, z_2 – комплексные величины. В результате имеем

$$G(\tau, w_+, \bar{w}_+; \varepsilon^{1/2}) \equiv G(s, \tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}). \quad (2.14)$$

Систему дифференциальных уравнений, описывающую поведение траекторий на интегральном многообразии (2.13), (2.14), будем строить в нормализованном виде (см. [8]). С учетом условия (2.8) и $\sigma_2/\sigma_1 \neq 1, 2, 3$ (отсутствие младших резонансов) имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (\lambda_n^v(\varepsilon) + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + \varepsilon^{1/2} A_1 \exp(it) \bar{z}_1 z_2 + \\ &+ Z_1(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}) \equiv Z_1^*(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda_2^v(\varepsilon) + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + Z_2(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}) \equiv Z_2^*(\tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}),$$

где $\lambda_k^v = i\sigma_k + \varepsilon(\tau_k^1 + i\sigma_k^1)$, $k = 1, 2$; $\tau = \omega t$; постоянные A_1 и d_* подлежат определению; $Z_j(\cdot) = O(\varepsilon^{3/2}|z| + \varepsilon|z|^2 + |z|^4)$, $|z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$, $j = 1, 2$.

В (2.15) в явном виде выписаны лишь “главные” слагаемые соответствующих представлений.

Остановимся кратко на схеме вычисления коэффициентов системы (2.15). Представим (2.14) в виде

$$\mathbf{G}(s, \tau, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}g_0(\cdot) + z_1g_1(\cdot) + z_2g_2(\cdot) + \bar{z}_1g_{-1}(\cdot) + \bar{z}_2g_{-2}(\cdot) + z_1^2g_{20}(\cdot) + \dots \quad (2.16)$$

Здесь $g_*(\cdot) \equiv g_*(s, \tau, \varepsilon^{1/2})$ – достаточно гладкие по совокупности переменных функции, 2π – периодические по τ . Отметим, что $g_j(s, \tau; 0) \equiv e_j(s)$, $j = 1, 2$.

Условие принадлежности траекторий системы уравнений (2.15) многообразию (2.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}(\cdot)}{\partial \tau} \omega + \frac{\partial \mathbf{G}(\cdot)}{\partial z_1} Z_1^*(\cdot) + \frac{\partial \mathbf{G}(\cdot)}{\partial \bar{z}_1} \bar{Z}_1^*(\cdot) + \frac{\partial \mathbf{G}(\cdot)}{\partial z_2} Z_2^*(\cdot) + \frac{\partial \mathbf{G}(\cdot)}{\partial \bar{z}_2} \bar{Z}_2^*(\cdot) \equiv \\ \equiv \mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{G}(\cdot) + \mathbf{F}(\mathbf{G}(\cdot)) + \varepsilon^{1/2}v_0\mathbf{F}_0(\omega t, \mathbf{G}(\cdot), v, \varepsilon^{1/2}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Будем теперь в (2.17) с учетом разложения (2.16) последовательно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_1^2, \dots$. В результате для определения $g_*(\cdot)$ будем иметь следующее операторное уравнение:

$$\mathbf{L}(\varepsilon)g_*(\cdot) \equiv \frac{\partial g_*(\cdot)}{\partial \tau} \omega + [p_1\lambda_1^v(\varepsilon) + p_2\bar{\lambda}_1^v(\varepsilon) + p_3\lambda_2^v(\varepsilon) + p_4\bar{\lambda}_2^v(\varepsilon)]g_*(\cdot) - \mathbf{A}(\varepsilon)g_*(\cdot) = f(\cdot), \quad (2.18)$$

где $f(\cdot) = f(s, \tau, \varepsilon^{1/2})$ – некоторая известная функция, гладко зависящая от своих переменных, 2π -периодическая по τ . При этом коэффициенты системы уравнений (2.15) входят в $f(\cdot)$, причем при рассматриваемых степенях $z_j, \bar{z}_j, j = 1, 2$, – линейным образом. Операторное уравнение (2.18) не всегда разрешимо. Это определяется соотношением ω и $p_j, j = 1, 2, 3, 4$. При определенных соотношениях ω и $p_j, j = 1, 2, 3, 4$, оператор $\mathbf{L}(\varepsilon)$, рассматриваемый в классе 2π -периодических по τ функций со значениями в $D(\mathbf{A})$, имеет при $\varepsilon = 0$ нулевую точку спектра. При этом разрешимости добиваемся выбором коэффициентов системы уравнений (2.15), входящих в правую часть (2.18), которые определяются однозначно.

С учетом (2.12) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= -\kappa_1 c 2\sigma_1 [2\sigma_1 + i(a_1 + b_1\sigma_1^2)]g_1, & d_{11} &= -\kappa_1 c \sigma_1 [2\sigma_1 + i(a_1 + b_1\sigma_1^2)]e_{11}, \\ d_{12} &= -\kappa_1 c (\sigma_1 + \sigma_2) [2\sigma_1 + i(a_1 + b_1\sigma_1^2)]e_{12}, & d_{21} &= -\kappa_2 c (\sigma_1 + \sigma_2) [2\sigma_2 + i(a_1 + b_1\sigma_2^2)]e_{21}, \\ d_{22} &= -\kappa_2 c \sigma_2 [2\sigma_2 + i(a_1 + b_1\sigma_2^2)]e_{22}, & g_1 &= (g(s)e_1^2(s), e_2(s)), & e_{pq} &= (e_p^2(s), e_q^2(s))_{L_2}, & p, q &= 1, 2. \end{aligned}$$

3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перейдем в (2.15) к полярным переменным, положив $z_j = \rho_j \exp(it_j)$, $\rho \gg 0, j = 1, 2$, и введем “медленные” переменные $\rho_j, j = 1, 2$, $\theta = \omega t - 2\tau_1 + \tau_2$ и “быструю” переменную $\tau_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$. Нормируем теперь $\rho_j \rightarrow \varepsilon^{1/2}\rho_j, t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$. В результате имеем для $\rho_j, j = 1, 2$, и θ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= (\tau_1^1 + \text{Red}_{11}\rho_1^2 + \text{Red}_{12}\rho_2^2)\rho_1 + |A_1| \cos(\theta + \gamma_1)\rho_1\rho_2 + \varepsilon^{1/2}R_1(\omega t, r_1, r_2, \theta, \tau; \varepsilon^{1/2}), \\ \dot{\rho}_2 &= (\tau_2^1 + \text{Red}_{21}\rho_1^2 + \text{Red}_{22}\rho_2^2)\rho_2 + \varepsilon^{1/2}R_2(\omega t, r_1, r_2, \theta, \tau; \varepsilon^{1/2}), \\ \dot{\theta} &= \delta - 2\sigma_1^1 + \sigma_2^1 + \text{Im}(-2d_{11} + d_{21})\rho_1^2 + \text{Im}(-2d_{12} + d_{22})\rho_2^2 - 2|A_1| \sin(\theta + \gamma_1)\rho_2 + \\ &+ \varepsilon^{1/2}(-2T_1(\omega t, r_1, r_2, \theta, \tau; \varepsilon^{1/2})/\rho_1 + T_2(\omega t, r_1, r_2, \theta, \tau; \varepsilon^{1/2})/\rho_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $A_1 = |A_1| \exp(i\gamma_1)$, $R_j(\cdot)$, $T_j(\cdot)$ суть 2π -периодические по ωt и τ и достаточно гладкие по своим переменным функции.

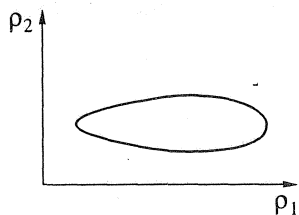
Поведение решений системы уравнений (3.1), равно как и уравнения (2.10), во многом определяется поведением решений "главной части" (при $\varepsilon = 0$) системы уравнений (3.1). Так, "грубым" стационарным решениям главной части системы (3.1) (т.е. устойчивым или неустойчивым с характеристическими показателями порядка $O(1)$) в уравнении (2.10) соответствуют также грубые стационарные решения, имеющие аналогичную структуру с точностью до замены переменных.

Остановимся теперь на анализе главной части системы (3.1). Для определенности считаем $a_1 = 1$, $p = -1$. Выполним замены: $t \rightarrow (2\kappa_1 \sigma_1^2)^{-1} t$, $\rho_j \rightarrow (c e_{jj})^{-1/2} \rho_j$, $(\delta - 2\sigma_1^1 + \sigma_2^1)(2\kappa_1 \sigma_1^2)^{-1} \rightarrow \delta$, $|A_1|(c e_{22})^{-1/2}(2\kappa_1 \sigma_1^2)^{-1} \rightarrow |A_1|$. В результате имеем систему уравнений

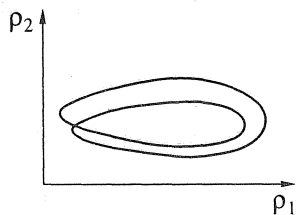
$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= [\alpha_1(q) - \rho_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)e_{12}/(\sigma_1 e_{22})\rho_2^2]\rho_1 + |A_1|\rho_1\rho_2 \cos(\theta + \gamma_1), \\ \dot{\rho}_2 &= [\alpha_2(q) - (\sigma_1 + \sigma_2)e_{21}/(\sigma_2 e_{11})\rho_1^2 - \rho_2^2]\rho_2, \\ \dot{\theta} &= \delta - (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 \sigma_2)^{-1} \alpha_1(q) + (\sigma_1 + \sigma_2)(2\sigma_1 \sigma_2)^{-1} \alpha_2(q) + \\ &+ [(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 \sigma_2)^{-1} - (\sigma_1 + \sigma_2)^2(2\sigma_2^2 \sigma_1)^{-1} e_{12}/e_{11}]\rho_1^2 + \\ &+ [(\sigma_1 + \sigma_2)^2(\sigma_1^2 \sigma_2)^{-1} e_{12}/e_{22} - (\sigma_1 + \sigma_2)(2\sigma_1 \sigma_2)^{-1}]\rho_2^2 - 2|A_1| \sin(\theta + \gamma_1)\rho_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\alpha_1(q) = 1 + q(\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_2$, $\alpha_2(q) = 1 + q(\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_1$, $\sigma_1 = 22.36$, $\sigma_2 = 61.66$, $e_{11} = 0.9375$, $e_{12} = e_{21} = 1.112$, $e_{22} = 0.8375$. Система (3.2) анализировалась численно. Для вычисления траекторий использовалась программа численного интегрирования по методу Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага. Точность на шаге бралась 10^{-4} .

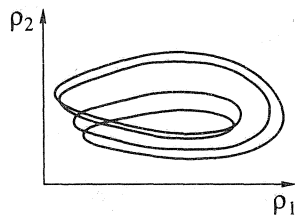
При $\delta = 70$, $q = 0.9$, $|A_1| = 35.704$, $\gamma_1 = 0.5$ система (3.2) имеет установившийся режим, являющийся странным аттрактором, который возникает через серию бифуркаций удвоения периода, соответственно, при $|A_1|_1 = 38.382$, $|A_1|_2 = 36.438$ и $|A_1|_3 = 35.817$. На фиг. 1-4 приведены проекции этих



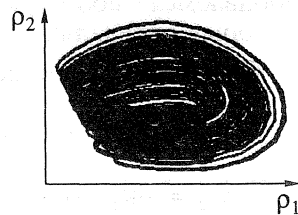
Фиг. 1.



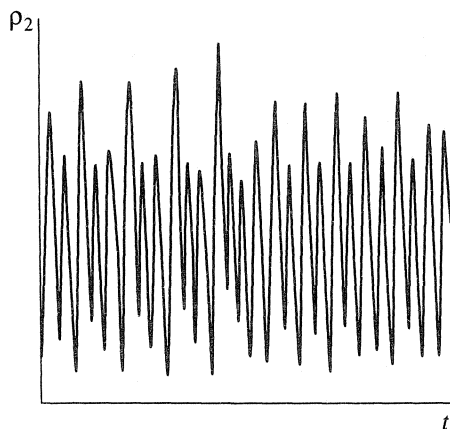
Фиг. 2.



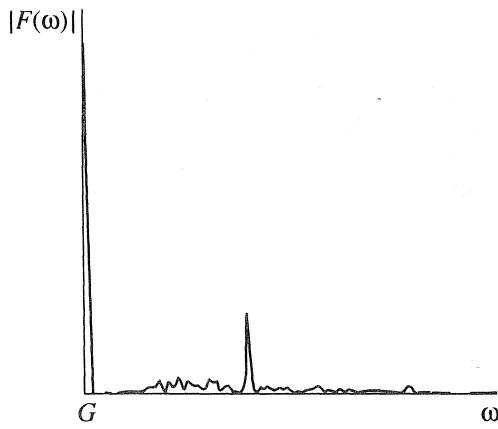
Фиг. 3.



Фиг. 4.

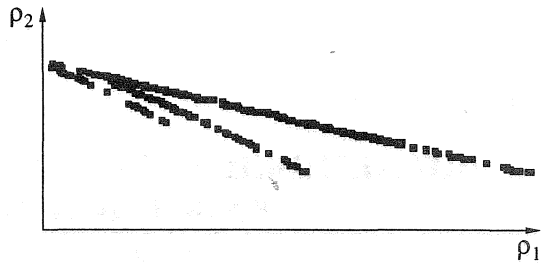


Фиг. 5.



Фиг. 6.

режимов на плоскость (ρ_1, ρ_2) . На фиг. 5 приведен график функции $\rho_2(t)$, соответствующий странному аттрактору, на фиг. 6 приведен модуль спектральной плотности функции $\rho_2(t)$. На фиг. 7 приведено отображение Пуанкаре плоскости $\theta = 1.5$. Хорошо видна фрактальная структура притягивающего множества. Для странного аттрактора вычислялась ляпуновская размерность (см. [9]):



Фиг. 7.

$$d_L = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \lambda_i,$$

где $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ – ляпуновские характеристические показатели траектории системы (3.2) на аттракторе, которые, соответственно, равны 3.37, -0.0025 , -24.1 ; k выбирается из условия $S(k) \geq 0$, а $S(k+1) < 0$ ($S(k) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$). Ляпуновская размерность $d = 2.139$ вычислялась по программе, приведенной в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
2. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
4. Позняк Э.Л. Автоколебания роторов с многими степенями свободы // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1977. № 2. С. 40–49.
5. Красносельский М.А., Вайнко Г.М., Забрейко П.П. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
7. Кубышкин Е.П. Автоколебания роторов с распределенными параметрами. // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1988. № 3. С. 59–65.
8. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica. 16D. P. 285–317.