A. I. Kibzun, A. V. Naumov, S. V. Ivanov, Bilevel optimization problem for railway transport hub planning, *UBS*, 2012, Issue 38, 140–160

УДК 519.8
ББК 22.18

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТНОГО УЗЛА[1]

Кибзун А. И.[2], **Наумов А. В.**[3], **Иванов С. В.**[4]
(*Московский авиационный институт*
(*национальный исследовательский университет*), *Москва*)

Предлагается математическая модель для оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла. Для моделирования используется двухэтапная двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием. В модели учтено воздействие конкурента в лице автомобильного перевозчика. В случае одного направления перевозок построен детерминированный эквивалент исходной задачи. В случае отсутствия конкуренции получен метод поиска приближённого решения задачи. Приводится модель для оценки объёма перевозок конкурента в случае отсутствия информации об этом объёме.

Ключевые слова: транспортная логистика, двухуровневая задача, двухэтапная задача стохастического программирования, квантильный критерий, детерминированный эквивалент.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*грант №11-07-13102-офи-м-2011-РЖД*) *и государственного финансирования целевых программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»* (*мероприятие 1.2.2, Госконтракт №14.740.11.1128*).

[2] *Андрей Иванович Кибзун, доктор физико-математических наук, профессор* (*kibzun@mail.ru*).

[3] *Андрей Викторович Наумов, кандидат физико-математических наук, доцент* (*naumovav@mail.ru*).

[4] *Сергей Валерьевич Иванов, аспирант* (*sergeyivanov89@mail.ru*).

Введение

Задачи оптимизации и управления сложными экономическими системами, в том числе транспортные задачи, являются предметом изучения ряда смежных математических дисциплин. Современная методология решения таких задач позволяет обеспечить: сквозную многоуровневую оптимизацию, логистическую координацию и интеграцию, согласование результатов стратегического и тактического управления на основе применения теории компромиссов и использовании автоматизированных систем принятия решений. Однако следует отметить, что в настоящее время практическая реализация логистических технологий в транспортных системах предполагает, с одной стороны, обязательный учёт динамики в принятии решения [1], так как в ходе реализации решения часто меняются условия поставок. При этом возникает необходимость учёта влияния на систему случайных факторов и возрастают требования к обеспечению высокого уровня надёжности достижения желаемого результата при реализации стратегии. С другой стороны, при принятии решения необходимо учитывать интересы различных субъектов на всех уровнях функционирования системы.

Учёт динамики при принятии решения можно осуществить с помощью двухэтапных задач стохастического программирования [12], в которых стратегия второго этапа позволяет корректировать исходную стратегию по факту возникновения реализации случайных параметров, действующих на систему. Традиционно двухэтапные задачи формулируются с критериальной функцией в форме математического ожидания. Критериальная функция в форме математического ожидания позволяет получать стратегию, обеспечивающую высокую прибыль «в среднем». Однако при моделировании сложных систем необходимо учитывать требования надёжности. Для этого может быть использована критериальная функция в форме квантили [3], что позволяет получать результат, гарантированный с заданной вероятностью.

Впервые двухэтапная задача квантильной оптимизации была сформулирована в [6]. Математические модели экономических систем, основанные на двухэтапной задаче квантильной оптимизации, описаны в работах [7, 8, 9]. Из-за сложности рассматриваемых постановок точные решения поставленных задач удаётся найти только в некоторых частных случаях.

Учёт интересов различных субъектов требует рассмотрения игровых моделей. Моделирование конкуренции возможно с помощью двухуровневых задач [11, 13]. К настоящему времени двухуровневые задачи в стохастической постановке формулировались только с критериальной функцией в форме математического ожидания [14].

В работе предлагается математическая модель для оптимизации деятельности крупного железнодорожного транспортного узла. В предлагаемой математической модели учитываются только грузовые перевозки. Целью оптимизации являются определение числа локомотивов, приписанных к транспортному узлу, определение оптимальных тарифов на перевозки и последующее распределение локомотивов по направлениям в зависимости от реализации случайного спроса на перевозки. Учтена возможность привлечения дополнительных локомотивов в случае недостатка собственных локомотивов транспортного узла. Также в модели учитывается воздействие конкурента в лице автомобильного перевозчика.

Предлагаемая математическая модель основана на двухэтапной двухуровневой задаче стохастического программирования с квантильным критерием. Данная постановка задачи является новой и сочетает в себе несколько известных подходов к моделированию сложных экономических отношений.

Процесс принятия решения в данной модели имеет двухэтапную структуру. Для моделирования двухэтапности структуры принятия решения используется двухэтапная задача стохастического линейного программирования. Стратегией первого этапа являются число локомотивов, приписанных к транспортному узлу, и тарифы на перевозки по каждому из направлений. На втором этапе имеющиеся локомотивы распределяются по направлениям транспортного узла в зависимости от реализации случайного спроса на перевозки. При этом имеется возможность привлечения за дополнительную плату локомотивов, не приписанных к транспортному узлу. Локомотивы обслуживают как направления из транспортного узла, так и направления из других транспортных узлов в рассматриваемый транспортный узел. Таким образом, стратегией второго этапа являются количество собственных локомотивов, выделенных на перевозки по каждому из направлений, и количество дополнительно привлечённых локомотивов на каждом из направлений.

Стратегия первого этапа выбирается на несколько плановых периодов. В каждом из плановых периодов стратегия второго этапа выбирается заново в зависимости от реализации случайного спроса и выбранной стратегии первого этапа.

Для учёта воздействия конкурента используется двухуровневая задача. Предполагается участие на рынке двух игроков: лидера (транспортного узла) и последователя (конкурента в лице автомобильного перевозчика). Последователь выбирает свою стратегию, зная стратегию лидера. Стратегией последователя являются цены на перевозки по каждому из направлений и соответствующие объёмы перевозок. Лидер при выборе своей оптимальной стратегии учитывает оптимальную стратегию последователя.

1. Постановка задачи

Рассматривается железнодорожный транспортный узел, обслуживающий n направлений, соответствующих другим транспортным узлам. Стратегией первого этапа являются вектор
$u \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$, где $u_i \in \mathbb{R}$ – тариф на перевозку одной тонны груза по i-му направлению, и величина $u_0 \in \mathbb{Z}$ – количество локомотивов, обслуживаемых в депо рассматриваемого транспортного узла.

Известны затраты c на содержание локомотива в течение одного планового периода.

Пусть $\overrightarrow{X}_i$ – спрос на перевозки из рассматриваемого транспортного узла по направлению к i-му транспортному узлу в течение планового периода; $\overleftarrow{X}_i$ – спрос на перевозки из i-го транспортного узла в направлении рассматриваемого транспортного узла, $i = \overline{1,n}$. Соответствующие реализации спроса будем обозначать $\overrightarrow{x}_i$, $\overleftarrow{x}_i$. Будем считать, что спрос измеряется в тоннах. Введём обозначения

$$X \triangleq (\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_2, \dots, \overrightarrow{X}_n, \overleftarrow{X}_1, \overleftarrow{X}_2, \dots, \overleftarrow{X}_n)^{\mathrm{T}},$$
$$x \triangleq (\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \dots, \overrightarrow{x}_n, \overleftarrow{x}_1, \overleftarrow{x}_2, \dots, \overleftarrow{x}_n)^{\mathrm{T}}.$$

Для каждого направления известен максимально возможный тариф $\bar{u}_i$ на перевозку одной тонны груза, $i = \overline{1,n}$. Данные величины регулируются антимонопольным комитетом. Обозначим $\bar{u} \triangleq (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)^{\mathrm{T}}$. Также известно максимально возможное (для содержания в депо) число локомотивов $\bar{u}_0$.

Доход транспортного узла, взятый с обратным знаком (являющийся потерями), равен оптимальному значению критериальной функции $\Phi(u_0, u, x)$ задачи второго этапа, которая будет сформулирована ниже.

Рассмотрим функцию квантили оптимального значения критериальной функции задачи второго этапа

$$\Phi_\alpha(u_0, u) \triangleq \min\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u_0, u, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора X. Задача первого этапа формулируется в виде

$$cu_0 + \Phi_\alpha(u_0, u) \to \min_{u_0, u} \tag{2}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant u_i \leqslant \bar{u}_i, \quad i = \overline{0,n}. \tag{3}$$

Обозначим оптимальное решение задачи первого этапа (u_0^*, u^*).

Критериальная функция (2) является суммой затрат на содержание локомотивов и потерь, которые связаны с реализацией стратегии второго этапа и не могут быть превышены с вероятностью α. Таким образом, критериальная функция (2) представляет собой минимальные потери, которые не могут быть превышены с вероятностью α.

Стратегией второго этапа является вектор
$y \triangleq (\overrightarrow{y}_1^{\mathrm{T}}, \overleftarrow{y}_1^{\mathrm{T}}, \overrightarrow{y}_2^{\mathrm{T}}, \overleftarrow{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^{4n}$, где $\overrightarrow{y}_1$, $\overleftarrow{y}_1$, $\overrightarrow{y}_2$, $\overleftarrow{y}_2 \in \mathbb{Z}^n$,

$\overrightarrow{y}_{1i}$ – количество локомотивов транспортного узла, задействованных на перевозки из рассматриваемого транспортного узла по направлению к i-му транспортному узлу; $\overleftarrow{y}_{1i}$ – количество локомотивов транспортного узла, задействованных на перевозки из i-го транспортного узла в рассматриваемый транспортный узел; $\overrightarrow{y}_{2i}$ – количество дополнительно привлекаемых локомотивов для перевозок из рассматриваемого транспортного узла по направлению к i-му транспортному узлу; $\overleftarrow{y}_{2i}$ – количество дополнительно привлекаемых локомотивов для перевозок из i-го транспортного узла в рассматриваемый транспортный узел.

Известны следующие величины: s_i^t – себестоимость перевозки состава по i-му направлению (направление к i-му транспортному узлу и обратно); d_i – стоимость привлечения дополнительного локомотива на i-е направление; $\tilde{s}_i^t$ – себестоимость перегонки локомотива без груза по i-му направлению; m – масса груза, перевозимого одним локомотивом; β – некоторый коэффициент, выражающий предпочтения заказчика перевозок. Если $\beta > 1$, то в случае равных тарифов на перевозки заказчик предпочитает перевозки железнодорожным транспортом, а если $0 < \beta \leqslant 1$, то заказчик предпочитает перевозки автомобильным транспортом.

Пусть $\overrightarrow{z}^*_{1i}$ – оптимальный объём перевозок груза из рассматриваемого транспортного узла по направлению к i-му транспортному узлу последователем; $\overleftarrow{z}^*_{1i}$ – оптимальный объём перевозок груза из i-го транспортного узла в направлении рассматриваемого узла; z^*_{2i} – оптимальная цена на перевозку груза по i-му направлению в объёме одной тонны автотранспортом.

Введём обозначения

$$z_1^* \triangleq (\overrightarrow{z}^*_{11}, \overrightarrow{z}^*_{12}, \ldots, \overrightarrow{z}^*_{1n}, \overleftarrow{z}^*_{11}, \overleftarrow{z}^*_{12}, \ldots, \overleftarrow{z}^*_{1n})^{\mathrm{T}},$$
$$z_2^* \triangleq (z^*_{21}, z^*_{22}, \ldots, z^*_{2n})^{\mathrm{T}}.$$

Множество оптимальных стратегий (z_1^*, z_2^*) последователя обозначим $Z(u, y, x)$. Данное множество зависит от стратегии лидера, реализации случайного спроса и определяется путём решения задачи последователя, которая будет сформулирована ниже.

Сформулируем задачу второго этапа лидера в оптимистической постановке [13]:

$$(4)\quad \Phi(u_0,u,x) \triangleq \min_y \min_{(z_1^*,z_2^*)\in Z(u,y,x)} \sum_{i=1}^{n} \Big((s_i^t - mu_i)(\overrightarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i}) + d_i(\overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i}) + \tilde{s}_i^t|\overrightarrow{y}_{1i} - \overleftarrow{y}_{1i}|\Big)$$

при ограничениях

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} \max\{\overrightarrow{y}_{1i}, \overleftarrow{y}_{1i}\} \leqslant u_0;$$

$$(6)\quad m(\overrightarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i}) \leqslant \overrightarrow{x}_i, \quad i = \overline{1,n};$$

$$(7)\quad m(\overleftarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{2i}) \leqslant \overleftarrow{x}_i, \quad i = \overline{1,n};$$

$$(8)\quad m(\overrightarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i}) \leqslant \overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{z}^*_{1i}, \text{ если } u_i \geqslant \beta z^*_{2i},\ i = \overline{1,n};$$

$$(9)\quad m(\overleftarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{2i}) \leqslant \overleftarrow{x}_i - \overleftarrow{z}^*_{1i}, \text{ если } u_i \geqslant \beta z^*_{2i},\ i = \overline{1,n};$$

$$(10)\quad \overrightarrow{y}_{li} \geqslant 0, \overleftarrow{y}_{li} \geqslant 0, \quad l = 1,2;\ i = \overline{1,n}.$$

Данная задача второго этапа для лидера сформулирована в оптимистической постановке. Это значит, что в случае, если для последователя несколько стратегий являются равноценными, он выбирает из них ту, которая является наиболее благоприятной для лидера. Возможен вариант рассмотрения пессимистической постановки. В этом случае лидер учитывает наихудшую для себя оптимальную стратегию последователя.

Критериальная функция задачи второго этапа для лидера представляет собой сумму потерь по всем направлениям. Для каждого из направлений потери представляют собой сумму трёх слагаемых: первое слагаемое $(s_i^t - mu_i)(\overrightarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i})$ является доходом от перевозок, взятым с обратным знаком; второе слагаемое $d_i(\overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i})$ является затратами на привлечение дополнительных локомотивов; третье слагаемое $\tilde{s}_i^t|\overrightarrow{y}_{1i} - \overleftarrow{y}_{1i}|$ представляет собой издержки, связанные с перегонкой локомотивов без груза.

Условие (5) ограничивает количество собственных используемых локомотивов величиной u_0, отражающей общее количество имеющихся локомотивов, которое является стратегией первого этапа. Ограничения (6), (7) означают, что объём перевозок не может превышать спрос на них. Ограничения (8), (9) означают, что в случае более выгодной ценовой политики последователя объём перевозок лидера не может превышать спрос, оставшийся после перевозок последователем.

Стратегией последователя являются переменные

$$z_1 \triangleq (\overrightarrow{z}_{11}, \overrightarrow{z}_{12}, \ldots, \overrightarrow{z}_{1n}, \overleftarrow{z}_{11}, \overleftarrow{z}_{12}, \ldots, \overleftarrow{z}_{1n})^{\mathrm{T}},$$
$$z_2 \triangleq (z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n})^{\mathrm{T}}.$$

где $\overrightarrow{z}_{1i}$ – объём перевозок автомобильным транспортом (в тоннах) из транспортного узла по i-му направлению; $\overleftarrow{z}_{1i}$ – объём перевозок автомобильным транспортом из i-го транспортного узла в рассматриваемый транспортный узел; z_{2i} – тариф на перевозку тонны груза автомобильным транспортом по i-му направлению.

Известны величины $\bar{z}_1$ – максимальный объём груза, который может перевезти конкурент; s_i^a – себестоимость перевозки груза в объёме одной тонны по i-му направлению автотранспортом; $\tilde{s}_i^a$ – стоимость перегонки пустого транспорта, способного перевезти тонну груза, по i-му направлению.

Задача последователя формулируется в следующем виде:

$$Z(u, y, x) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{z_1, z_2} \sum_{i=1}^{n} ((s_i^a - z_{2i})(\overrightarrow{z}_{1i} + \overleftarrow{z}_{1i}) + \tilde{s}_i^a |\overrightarrow{z}_{1i} - \overleftarrow{z}_{1i}|) \tag{11}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{\overrightarrow{z}_{1i}, \overleftarrow{z}_{1i}\} \leqslant \bar{z}_1; \tag{12}$$

$$0 \leqslant z_{2i} \leqslant \bar{u}_i, \quad i = \overline{1, n}; \tag{13}$$

$$\overrightarrow{z}_{1i} \leqslant \overrightarrow{x}_i, \quad i = \overline{1, n}; \tag{14}$$

$$\overleftarrow{z}_{1i} \leqslant \overleftarrow{x}_i, \quad i = \overline{1, n}; \tag{15}$$

$$\overrightarrow{z}_{1i} \leqslant \overrightarrow{x}_i - m(\overrightarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i}), \text{ если } \beta z_{2i} > u_i, \quad i = \overline{1, n}; \tag{16}$$

$$\overleftarrow{z}_{1i} \leqslant \overleftarrow{x}_i - m(\overleftarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{2i}), \text{ если } \beta z_{2i} > u_i, \quad i = \overline{1, n}; \tag{17}$$

$$\overrightarrow{z}_{1i} \geqslant 0, \ \overleftarrow{z}_{1i} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Критериальная функция (11) представляет собой сумму потерь последователя по всем направлениям. Для каждого из направлений потери являются суммой двух слагаемых: первое слагаемое $(s_i^a - z_{2i})(\overrightarrow{z}_{1i} + \overleftarrow{z}_{1i})$ есть доход от перевозок, взятый с обратным знаком, а второе слагаемое $\tilde{s}_i^a|\overrightarrow{z}_{1i} - \overleftarrow{z}_{1i}|$ – издержки на перевозки пустого транспорта.

Ограничение (12) связано с имеющимся количеством транспортных средств. Условие (13) ограничивает тарифы величиной, определяемой антимонопольным комитетом. Ограничения (14), (15) означают, что объём перевозок не может превышать спрос на них. Ограничения (16), (17) означают, что в случае более выгодной ценовой политики лидера объём перевозок последователя не может превышать величину спроса, оставшуюся после перевозок лидером.

2. Анализ модели

2.1. СЛУЧАЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим частный случай предложенной модели. Будем предполагать, что перевозки осуществляются по одному направлению и существует спрос только на перевозки из транспортного узла, а спрос на перевозки в рассматриваемый транспортный узел является нулевым, т.е. $\overleftarrow{X} \equiv 0$. Без ограничения общности будем предполагать, что стоимости перегонки транспорта без груза $\tilde{s}^t = 0$, $\tilde{s}^a = 0$. В случае отсутствия перевозок в обратном направлении данные величины можно включить в соответствующие себестоимости перевозок по направлению из транспортного узла.

В силу билинейности целевой функции и структуры ограничений задача последователя имеет следующее решение:

$$(19)\quad (\overrightarrow{z}^*_{11}, z^*_2) =$$
$$= \begin{cases} (\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}, \bar{u}_1)\,,\text{если } s^a - \bar{u}_1 \leqslant 0,\ \beta\bar{u}_1 \leqslant u_1; \\ \left(\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}, \frac{u_1}{\beta}\right),\text{если } s^a - \bar{u}_1 \leqslant 0,\ \beta\bar{u}_1 > u_1,\ (s^a - \frac{u_1}{\beta})\cdot \\ \cdot \min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\} \leqslant (s^a - \bar{u}_1)\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x} - m(\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2)\}; \\ (\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x} - m(\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2)\}, \bar{u}_1)\,,\text{если } s^a - \bar{u}_1 \leqslant 0, \\ \beta\bar{u}_1 > u_1,\ (s^a - \frac{u_1}{\beta})\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\} \geqslant \\ \geqslant (s^a - \bar{u}_1)\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x} - m(\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2)\}; \\ (0,0),\ \text{если } s^a - \bar{u}_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Найдём решение задачи лидера. Если $u_1 \geqslant \beta\bar{u}_1$, то $\overrightarrow{z}^*_{11} = \min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}$ при $s^a \leqslant u_1$ и $\overrightarrow{z}^*_{11} = 0$ при $s^a \geqslant u_1$, а ограничение (8) является активным, так как $u_1 \geqslant \beta z^*_2$. Из вида оптимальной стратегии последователя следует, что условие $u_1 < \beta z^*_2$ при оптимистической постановке задачи эквивалентно условию

$$\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2 \leqslant f(u_1, x),$$

где

$$f(u_1, x) \triangleq \left[\frac{\overrightarrow{x} - g(u_1, x)}{m}\right],$$
$$g(u_1, x) \triangleq \begin{cases} \max\left\{\frac{\min\left\{\frac{u_1}{\beta}, \bar{u}_1\right\} - s^a}{\bar{u}_1 - s^a}\min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}, 0\right\},\text{если } \bar{u}_1 > s^a; \\ 0,\text{иначе}, \end{cases}$$

$[\cdot]$ – целая часть числа.

Заметим, что $g(u_1, x) \leqslant \min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}$. Это значит, что если $u_1 < \beta\bar{u}_1$, то оптимальное решение задачи лидера будет достигаться при выполнении условия $u_1 < \beta z^*_2$. Кроме того, $g(u_1, x) = \min\{\bar{z}_1, \overrightarrow{x}\}$ при $u_1 \geqslant \beta\bar{u}_1$. Таким образом, оптимальное решение задачи второго этапа (задачи лидера) имеет вид

$$(\overrightarrow{y}_1^*, \overrightarrow{y}_2^*) = \\ = \begin{cases} \left(\min\left\{f(u_1,x),u_0\right\}, f(u_1,x) - \min\left\{f(u_1,x),u_0\right\}\right), \\ \text{ если } s^t - mu_1 + d \leqslant 0; \\ \left(\min\left\{f(u_1,x),u_0\right\}, 0\right), \text{если } 0 \leqslant s^t - mu_1 + d \leqslant d; \\ (0,0), \text{если } s^t - mu_1 \geqslant 0, \end{cases}$$

а оптимальное значение критериальной функции задачи второго этапа составляет

$$(20)\quad \Phi(u_0,u_1,x) = \min\left\{(s^t - mu_1)\min\left\{f(u_1,x),u_0\right\},0\right\} + \\ \min\left\{(s^t - mu_1 + d)\left(f(u_1,x) - \min\left\{u_0, f(u_1,x)\right\}\right),0\right\}.$$

Полученная функция $\Phi(u_0,u_1,x)$ обладает следующими свойствами:

1) не возрастает по $\overrightarrow{x}$ на $[0,+\infty)$;

2) непрерывна справа по $\overrightarrow{x}$ на $[0,+\infty)$.

Приведённые свойства позволяют в явном виде вычислить значение функции квантили оптимального значения критериальной функции задачи второго этапа. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если в задаче (2) $n = 1$, $\overleftarrow{X} \equiv 0$, $\overrightarrow{X} \geqslant 0$ (почти наверное по мере $\mathbf{P}\{\cdot\}$), то*

$$(21)\qquad \Phi_\alpha(u_0,u_1) = \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha),$$

где $\bar{x}_\alpha \triangleq (\overrightarrow{x}_\alpha, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{x}_\alpha \triangleq -\min\{\varphi\colon \mathbf{P}\{-\overrightarrow{X} \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$.

Доказательство. Так как $\Phi(u,x)$ не возрастает по $\overrightarrow{x}$ на $[0,+\infty)$,

$$(22)\quad \mathbf{P}\{\Phi(u_0,u_1,X) \leqslant \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha)\} \geqslant \mathbf{P}\{-\overrightarrow{X} \leqslant -\overrightarrow{x}_\alpha\} \geqslant \alpha,$$

а значит, $\Phi_\alpha(u_0,u_1) \leqslant \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha)$.

Теперь докажем, что $\Phi_\alpha(u_0,u_1) \geqslant \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha)$. Предположим противное: $\Phi_\alpha(u_0,u_1) = \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Из определения непрерывности справа и монотонности следует, что найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$(23)\quad \mathbf{P}\{\Phi(u_0,u_1,X) \leqslant \Phi(u_0,u_1,\bar{x}_\alpha) - \varepsilon\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{-\overrightarrow{X} \leqslant -\overrightarrow{x}_\alpha - \delta\} < \alpha,$$

что противоречит определению квантили, поэтому $\Phi_\alpha(u_0, u_1) = \Phi(u_0, u_1, \bar{x}_\alpha)$. Теорема доказана.

Таким образом, детерминированный эквивалент задачи (2) может быть записан в форме задачи нелинейного программирования

$$cu_0 + \Phi(u_0, u_1, \bar{x}_\alpha) \to \min_{u_0, u_1} \tag{24}$$

при ограничении

$$0 \leqslant u_i \leqslant \bar{u}_i, \quad i = 0, 1. \tag{25}$$

Множество возможных допустимых стратегий u_0 состоит из конечного числа элементов, а по аргументу u_1 критериальная функция задачи является полунепрерывной снизу, значит, по теореме Вейерштрасса решения задач (24) и (2) в исследуемом случае существуют.

Замечание 1. *Выбор оптимистической постановки задачи объясняется видом оптимальной стратегии последователя. При оптимистической постановке в случае двух равноценных стратегий последователь выбирает ту, которая требует привлечения меньшего количества транспортных средств. Кроме того, в силу целочисленности стратегий лидера u_0, $\overrightarrow{y}_1$, $\overrightarrow{y}_2$ возникновение случая неединственности решения задачи последователя является маловероятным.*

2.2. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ КОНКУРЕНЦИИ

Рассмотрим другой частный случай предложенной модели. Предположим отсутствие конкурента на рынке перевозок, т.е. $\bar{z}_1 = 0$. Очевидно, что в этом случае $u_i^* = \bar{u}_i$, $i = \overline{1, n}$. То есть при отсутствии конкуренции тарифы могут быть зафиксированы на максимальном уровне. Задача второго этапа при введении вектора дополнительных переменных $\psi \in \mathbb{R}^n$ может быть записана в виде

$$\Phi(u_0, \bar{u}, x) \triangleq \min_{y,\psi} \sum_{i=1}^{n} \Big((s_i^t - m\bar{u}_i)(\overrightarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i}) + d_i(\overrightarrow{y}_{2i} + \overleftarrow{y}_{2i}) + \tilde{s}_i^t \psi_i\Big) \tag{26}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{y}_{1i} - \overleftarrow{y}_{1i} \leqslant \psi_i, \quad i = \overline{1,n};\\
&\overleftarrow{y}_{1i} - \overrightarrow{y}_{1i} \leqslant \psi_i, \quad i = \overline{1,n};\\
&\overrightarrow{y}_{11} + \ldots + \overrightarrow{y}_{1n} \leqslant u_0;\\
&\overrightarrow{y}_{11} + \ldots + \overleftarrow{y}_{1n} \leqslant u_0;\\
&\qquad\ldots\\
&\overleftarrow{y}_{11} + \ldots + \overleftarrow{y}_{1n} \leqslant u_0;\\
&m(\overrightarrow{y}_{1i} + \overrightarrow{y}_{2i}) \leqslant \overrightarrow{x}_i, \quad i = \overline{1,n};\\
&m(\overleftarrow{y}_{1i} + \overleftarrow{y}_{2i}) \leqslant \overleftarrow{x}_i, \quad i = \overline{1,n};\\
&\overrightarrow{y}_{li} \geqslant 0, \overleftarrow{y}_{li} \geqslant 0, \quad l = 1,2,\ i = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Перепишем задачу (26) в матричном виде

(27) $$c_2^{\mathrm{T}}\tilde{y} \to \min_{\tilde{y}\in\mathbb{R}^{5n}}$$

при ограничениях

(28) $$A_2u_0 + B_2\tilde{y} \geqslant \bar{x}, \quad \tilde{y} \geqslant 0,$$

где $\tilde{y} \triangleq (y^{\mathrm{T}}, \psi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{5n}$;
$\bar{x} \triangleq (0,\ldots,0,x^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2^n+4n}$; c_2, B_2, A_2 – матрицы и векторы соответствующих размерностей, зависящие от параметров задачи; $\psi \in \mathbb{R}^n$ – вектор дополнительных переменных.

Пренебрежём требованием целочисленности переменных задачи второго этапа. Тогда, согласно теории двойственности, решения задач (27) и двойственной к ней совпадают. Таким образом,

(29) $$\Phi(u_0,\bar{u},x) = \max_{v\in V}(\bar{x} - A_2u_0)^{\mathrm{T}}v,$$

где v – вектор двойственных переменных;
$V \triangleq \{v \in \mathbb{R}^{2^n+4n}\colon B_2^{\mathrm{T}}v \leqslant c_2, v \geqslant 0\}$ – множество допустимых значений двойственных переменных. Если $x \geqslant 0$, $m > 0$, $u_0 \geqslant 0$, то решение задачи (29) существует, а значит, оно достигается в одной из вершин множества V. Поэтому

(30) $$\Phi(u_0,\bar{u},x) = \max_{j=\overline{1,J}}(\bar{x} - A_2u_0)v^j,$$

где v^j – вершины множества V; J – количество вершин множества V.

С учётом найденного вида функции $\Phi(u_0, \bar{u}, x)$ и оптимального значения тарифов, задача первого этапа (2) может быть сформулирована в следующем виде:

$$u_0^* \in \operatorname{Arg} \min_{u_0 \in [0, \bar{u}_0]} \{cu_0 + \\ + \min \left\{ \varphi \colon \mathbf{P} \left\{ \max_{j=\overline{1,J}} (\bar{x} - A_2 u_0)^{\mathrm{T}} v^j \leqslant \varphi \right\} \geqslant \alpha \right\} \right\} = \\ = \operatorname{Arg} \min_{u_0 \in [0, \bar{u}_0]} \hat{\Phi}_\alpha(u_0), \tag{31}$$

где

$$\hat{\Phi}_\alpha(u_0) \triangleq \min\{\varphi \colon \mathbf{P}\{\hat{\Phi}(u_0, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\},$$
$$\hat{\Phi}(u_0, x) \triangleq \max_{j=\overline{1,J}} \{cu_0 - (v^j)^{\mathrm{T}} A_2 + (v^j)^{\mathrm{T}} \bar{x}\}.$$

Задача (31) является одноэтапной задачей стохастического линейного программирования с квантильным критерием [5]. Таким образом, для решения задачи можно использовать методы, разработанные для этого класса задач. В частности для случая непрерывного распределения могут быть применены алгоритмы поиска гарантирующего решения [5, 10], т.е. обеспечивающего оценку сверху оптимального значения критериальной функции. Для случая дискретного распределения случайных параметров может быть получена эквивалентная смешанная задача линейного программирования при помощи метода, описанного в [2].

При переходе к задаче (29) было ослаблено требование целочисленности переменных. Это значит, что оптимальное решение задачи (26) может содержать нецелые значения. Заметим, что при округлении полученных результатов в меньшую сторону получается допустимое решение задачи. Это значит, что погрешность данного решения по значению критериальной функции не превышает величину

$$\sum_{i=1}^{n} (4(m\bar{u}_i - s_i^t) - 2d_i + \tilde{s}_i^t). \tag{32}$$

При поиске гарантирующего решения задачи (2) данную величину можно прибавить к значению критериальной функции задачи

(31) и таким образом получить оценку сверху оптимального значения критериальной функции задачи (2).

2.3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Для поиска решения задачи может быть предложен алгоритм, основанный на методе статистического моделирования. Идея данного алгоритма заключается в моделировании реализаций случайного спроса на перевозки и решении задачи второго этапа для полученных реализаций спроса методами нелинейного программирования. Таким образом можно построить оценку функции квантили оптимального значения критериальной функции задачи второго этапа. Для поиска оптимальной стратегии первого этапа могут быть применены квазиградиентные процедуры [4].

Одной из проблем при решении задачи в общем случае является оценка статистических характеристик спроса на перевозки. Предполагается, что математическое ожидание спроса меняется во времени, а его дисперсия остаётся постоянной. Суммарный спрос складывается из перевозок железнодорожным и автомобильным транспортом. Оценка математического ожидания спроса для каждого интервала времени наблюдения может быть получена на основе имеющейся статистики перевозок железнодорожным транспортом. Для этого необходимо оценить объём перевозок автомобильным транспортом по объёму перевозок железнодорожным транспортом и ценам на перевозки обоими видами транспорта. Соответствующая модель приводится в следующем разделе.

3. Модель оценки объёма перевозок автотранспортом на основе данных о перевозках железнодорожным транспортом

Введём обозначения: $C_{r,l}$ – цены на перевозку железнодорожным транспортом единицы объёма в заданном направлении в l-й интервал времени наблюдения (до и после изменения тарифов); $C_{a,l}$ – цены автомобильного перевозчика на перевозку единицы объёма в заданном направлении в l-й интервал; $V_{r,l}$ – объём груза, перевезенный железнодорожным транспортом в заданном направлении в l-й интервал; $V_{a,l}$ – объём груза, перевезенный автоперевозчиком в заданном направлении в l-й интервал.

Цены на перевозку $C_{r,l}$, $C_{a,l}$ можно считать известными, так как компании предоставляет такую информацию в открытом доступе. Будем считать также, что есть статистика по объемам перевозок $V_{r,l}$ для двух интервалов. По этим данным необходимо построить прогноз на объём перевозок автоперевозчиком $V_{a,l}$ для некоторого интервала.

Будем считать, что модель зависимости между объёмом и ценами для участников рынка следующая:

$$\frac{C_{r,l}}{C_{a,l}} = k\frac{V_{a,l}}{V_{r,l}}, \tag{33}$$

т.е. отношение цен на перевозку товара обратно пропорционально отношению объёмов перевозимого товара участниками рынка. Здесь $k \in (0, +\infty)$ является неизвестным коэффициентом, который необходимо найти. Коэффициент k в модели играет роль неценовых факторов: качества сервиса, времени, надёжности обслуживания и т.д.

Таким образом, задачу поиска $V_{a,l}$ можно свести к нахождению коэффициента k. Для этого составим систему, где будут уравнения типа (33) для некоторых периодов, $l = 1, 2$, и уравнение, связывающие суммарный спрос в этих интервалах наблюдений:

$$V_{a,1} + V_{r,1} = \gamma(V_{a,2} + V_{r,2}), \tag{34}$$

где γ – известный коэффициент, отражающий увеличение (или уменьшение) суммарного спроса от одного интервала времени к другому.

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{C_{a,1}}{C_{r,1}} = k\frac{V_{r,1}}{V_{a,1}}, \\ \frac{C_{a,2}}{C_{r,2}} = k\frac{V_{r,2}}{V_{a,2}}, \\ V_{r,1} + V_{a,1} = \gamma(V_{r,2} + V_{a,2}). \end{cases} \tag{35}$$

Эта система имеет аналитическое решение

$$k = \frac{(\gamma V_{r,2} - V_{r,1})C_{a,1}C_{a,2}}{V_{r,1}C_{r,1}C_{a,2} - \gamma V_{r,2}C_{r,2}C_{a,1}}. \tag{36}$$

На основе коэффициента k и модели (33) можно прогнозировать объём перевозок для автоперевозчика $V_{a,l}$ на последующие интервалы.

Рассмотрим некоторые способы оценки γ.

Можно построить грубую оценку γ, предполагая, что суммарный объём перевозок для двух различных интервалов отличается незначительно, тогда можно положить $\gamma = 1$. Другим способом оценки γ может являться отношение объёмов перевозок железнодорожным транспортом, т.е. $\gamma = \frac{V_{r,2}}{V_{r,1}}$. Третьи способом оценки γ может являться отношение объёмов перевозок у автоперевозчика, т.е. $\gamma = \frac{V_{a,2}}{V_{a,1}} = \frac{V_{r,1}C_{r,1}C_{a,2}}{V_{r,2}C_{r,2}C_{a,1}}$.

4. Результаты численных экспериментов

4.1. СЛУЧАЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Пусть грузоподъёмность локомотива $m = 5\,000$ т; максимально допустимый тариф $\bar{u}_1 = 80$ у.е.; себестоимость содержания локомотива $c = 2\,000$ у.е.; стоимость привлечения дополнительного локомотива $d = 5\,000$ у.е.; себестоимость перевозки локомотива $s^t = 300\,000$ у.е.; $\tilde{s}^t = 0$; коэффициент предпочтения заказчика $\beta = 1$; себестоимость перевозки тонны груза автотранспортом $s^a = 50$ у.е.; $\tilde{s}^a = 0$; максимально возможный объём перевозок конкурентом $\bar{z}_1 = 100\,000$ т; $\bar{u}_0 = 400$ шт.; $\overrightarrow{X} \sim \mathcal{N}(500\,000, 24\,000^2)$; $\overleftarrow{X} \equiv 0$. Результаты решения задачи (2) приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента для $n = 1$

α	u_0^*, шт.	u_1^*, у.е.	φ^*, у.е.
0,8	76	80,00	$-7{,}452 \cdot 10^6$
0,9	74	79,77	$-7{,}170 \cdot 10^6$
0,95	72	74,94	$-7{,}056 \cdot 10^6$

4.2. СЛУЧАЙ ДВУХ НАПРАВЛЕНИЙ ПЕРЕВОЗОК

Пусть грузоподъёмность локомотива $m = 5000$ т; максимально допустимые тарифы $\bar{u}_1 = 80$ у.е.; $\bar{u}_2 = 100$ у.е.; себе-

стоимость содержания локомотива $c = 2\,000$ у.е.; стоимость привлечения дополнительных локомотивов $d_1 = 5\,000$ у.е.;
$d_2 = 8\,000$ у.е.; себестоимость перевозки локомотива
$s_1^t = 300\,000$ у.е.; $s_2^t = 350\,000$ у.е.; $\tilde{s}_1^t = 30\,000$ у.е.;
$\tilde{s}_2^t = 35\,000$ у.е.; $\bar{z}_1 = 0$; $\bar{u}_0 = 400$ шт.; $\overrightarrow{X}_1 \sim \mathcal{N}(500\,000, 24\,000^2)$;
$\overrightarrow{X}_2 \sim \mathcal{N}(400\,000, 21\,000^2)$; $\overleftarrow{X}_1 \sim \mathcal{N}(600\,000, 27\,000^2)$;
$\overleftarrow{X}_2 \sim \mathcal{N}(350\,000, 26\,000^2)$. Случайные величины $\overrightarrow{X}_1$, $\overrightarrow{X}_2$, $\overleftarrow{X}_1$, $\overleftarrow{X}_2$ независимы.

Гарантирующие решения задачи (2) приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты численного эксперимента для $n = 2$

α	u_0^*, шт.	(u_1^*, u_2^*), у.е.	φ^*, у.е.
0,8	166	(80, 100)	$-41{,}891 \cdot 10^6$
0,9	163	(80, 100)	$-41{,}336 \cdot 10^6$
0,95	162	(80, 100)	$-40{,}904 \cdot 10^6$

Из таблиц 1 и 2 видно, что в случае одного направления требуются меньше локомотивов, чем для двух направлений, даже если предположить, что на втором направлении будет привлечено столько же локомотивов, что и на первом. Это связано с тем, что при учёте действий конкурента часть спроса удовлетворяет конкурент, а при отсутствии конкурента весь спрос удовлетворяет транспортный узел.

Прибыль транспортного узла в случае двух направлений значительно больше, чем в случае одного. Это связано с тем, что в этом случае перевозки осуществляются по четырём направлениям: по двум в транспортный узел и по двум из транспортного узла, кроме того, на втором направлении устанавливается более высокий тариф.

Заключение

В работе были представлены методы решения двухуровневой задачи оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла в двух частных случаях. Для случая одного направления перевозок получен детерминированный эквивалент задачи в виде задачи нелинейного программирования. В случае отсутствия конкурента задача сведена к одноэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Решение задачи в общем случае требует привлечения методов статистического моделирования и нелинейного программирования.

Литература

1. ДОЕНИН В.В. *Динамическая логистика транспортных процессов.* – М.: Компания «Спутник», 2010. – 246 с.
2. ИВАНОВ С.В., НАУМОВ А.В. *Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 95–108.
3. КИБЗУН А.И., КАН Ю.С. *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями.* – М.: Физматлит, 2009. – 372 с.
4. КИБЗУН А.И., МАТВЕЕВ Е.Л. *Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 64–78.
5. КИБЗУН А.И., НАУМОВ А.В. *Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации* // Космические исследования. – 1995. – Т. 33. – №2. – С. 160–165.
6. КИБЗУН А.И., НАУМОВ А.В. *Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №1. – С. 83–93.
7. НАУМОВ А.В. *Двухэтапная задача квантильной оптимизации бюджета госпиталя* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – №2. – С. 87–90.
8. НАУМОВ А.В. *Двухэтапная задача квантильной оптимизации инвестиционного проекта* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – №2. – С. 33–40.

9. НАУМОВ А.В., БОГДАНОВ А.Б. *Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №12. – С. 36–42.
10. НАУМОВ А.В., ИВАНОВ С.В. *Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №2. – С. 142–158.
11. BARD J. *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications.* – New York: Springer-Verlag, 1999. – 488 p.
12. BIRGE J., LOUVEAUX F. *Introduction to Stochastic Programming.* – New York: Springer-Verlag, 1997. – 510 p.
13. DEMPE S. *Foundations of Bilevel programming.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 2002. – 312 p.
14. WERNER A.S. *Bilevel Stochastic programming problems: analysis and application to telecommunications*: Dr. ing. thesis. – Section of Investment, Finance and Accounting, Dept of Industrial Economics and Technology Management, NUST, Norway, 2004. – 165 p.

BILEVEL OPTIMIZATION PROBLEM FOR RAILWAY TRANSPORT HUB PLANNING

Andrey Kibzun, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Doctor of Science, professor (kibzun@mail.ru).
Andrey Naumov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Cand.Sc., assistant professor (naumovav@mail.ru).
Sergey Ivanov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, postgraduate student (sergeyivanov89@mail.ru).

Abstract: We suggest a mathematical model for railway transport hub planning. The model is based on a two-stage bilevel stochastic programming problem with quantile criterion, and accounts for competition with a road carrier. In the case of a single-direction road we obtain a deterministic equivalent of the original problem. In the case of no competition we suggest an approximate method for this problem. We also suggest a model for unknown competitor traffic volume assessment.

Keywords: transport logistics, bilevel problem, two-stage stochastic programming problem, quantile criterion, deterministic equivalent.