Е. К. Склянин, Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера, *Докл. АН СССР*, 1979, том 244, номер 6, 1337–1341

Доклады Академии наук СССР
1979. Том 244, № 6

УДК 517.43+530.145 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Е. К. СКЛЯНИН

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ И КВАНТОВОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком Л. Д. Фаддеевым 15 XI 1978)

За последние годы были достигнуты значительные успехи в исследовании гамильтоновых систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Большой интерес для квантовой теории поля представляет задача квантования таких систем. Примером системы, динамика которой допускает полное описание как в классическом, так и в квантовом случае, является нелинейное уравнение Шредингера (н.у.Ш.) на оси

$$i\Psi_t=-\Psi_{xx}+2\varkappa\Psi^+\Psi\Psi. \tag{1}$$

Уравнение (1) в классическом варианте было исследовано методом обратной задачи в работе ([1]). В работе ([2]) был построен полный набор собственных волновых функций гамильтониана для системы бозонов с точечным взаимодействием, которая описывается квантовым уравнением (1). В ([3]) рассматривалось квазиклассическое квантование н.у.Ш. В ([4]) построен бесконечный набор квантовых интегралов движения уравнения (1).

В настоящей работе метод обратной задачи рассеяния для н.у.Ш в соответствии с идеями статьи ([5]) переносится на квантовый случай. Автор надеется, что полученные результаты могут оказаться полезными и для квантования других вполне интегрируемых систем.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную линейную задачу для классического н.у.Ш. ([1]). Пусть комплекснозначные функции $f(\lambda, x)$, $g(\lambda, x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(\lambda,x)&=\bar\psi(x)g(\lambda,x)-i\frac{\lambda}{2}f(\lambda,x),\\ \frac{\partial}{\partial x}g(\lambda,x)&=-i\varkappa f(\lambda,x)\psi(x)+i\frac{\lambda}{2}g(\lambda,x)\end{aligned}\tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to0 \text{ при } |x|\to0,\\ &f(\lambda,x)\to0,\ g(\lambda,x)-\exp(i\lambda x/2)\to0 \text{ при } x\to+\infty.\end{aligned}\tag{3}$$

Введем коэффициенты перехода (см. ([1])) $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ формулами

$$f(\lambda,x)-b(\lambda)\exp(-i\lambda x/2)\to0,\quad g(\lambda,x)-a(\lambda)\exp(i\lambda x/2)\to0 \text{ при } x\to-\infty. \tag{4}$$

Будем рассматривать a, b, f, g как функционалы от $\psi(\xi)$, $\bar\psi(\xi)$. Это позволяет нам ввести операторы $A(\lambda)=:a(\lambda):$, $B(\lambda)=:b(\lambda):$, $F(\lambda,x)=:f(\lambda,x):$,

$G(\lambda, x) = :g(\lambda, x):$ в пространстве Фока, заменив $\psi(\xi)$ и $\bar{\psi}(\xi)$ на операторы уничтожения и рождения $\Psi(\xi)$ и $\Psi^+(\xi)$, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[\Psi(\xi),\ \Psi^+(\eta)] = \delta(\xi - \eta), \tag{5}$$

и упорядочив их нормальным образом, т. е. расположив все $\Psi(\xi)$ справа, а $\Psi^+(\xi)$ слева, на что и указывает знак $::$. Иными словами, функционалы a, b, f, g являются виковскими символами операторов A, B, F, G ([6]).

Можно показать, что операторные функции $F(\lambda, x)$ и $G(\lambda, x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} F(\lambda, x) = i\Psi^+(x) G(\lambda, x) - i\frac{\lambda}{2} F(\lambda, x), \\ &\frac{\partial}{\partial x} G(\lambda, x) = -i\varkappa F(\lambda, x)\Psi(x) + i\frac{\lambda}{2} G(\lambda, x). \end{aligned} \tag{6}$$

Асимптотики (3) и (4) сохраняются и в квантовом случае, но понимаются теперь в смысле слабой сходимости операторов. Уравнения (6) и условия (3) эквивалентны интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} &F(\lambda, x) = -i\int_x^\infty d\xi \exp[i\lambda(\xi - x)/2]\Psi^+(\xi) G(\lambda, \xi), \\ &G(\lambda, x) = \exp(i\lambda x/2) + i\varkappa \int_x^\infty d\eta \exp[i\lambda(x - \eta)/2] F(\lambda, \eta)\Psi(\eta), \end{aligned} \tag{7}$$

интегрируя которые, получаем

$$\begin{aligned} F(\lambda, x) = &-i\exp(-i\lambda x/2)\Big[\int_x^\infty d\xi \exp(i\lambda\xi)\Psi^+(\xi) + \sum_{n=1}^\infty \varkappa^n \int d\xi_1 \ldots d\xi_{n+1} d\eta_1 \ldots \\ &\ldots d\eta_n \Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_{n+1})\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n)\theta(\xi_1 - \eta_1)\theta(\eta_1 - \xi_2)\ldots \\ &\ldots\theta(\xi_{n+1} - x)\exp i\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_{n+1} - \eta_1 - \ldots - \eta_n)\Big], \\ G(\lambda, x) = &\exp(i\lambda x/2)\Big[1 + \sum_{n=1}^\infty \varkappa^n \int d\xi_1 \ldots d\xi_n d\eta_1 \ldots d\eta_n \times \\ &\times \Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n)\theta(\xi_1 - \eta_1)\theta(\eta_1 - \xi_2)\ldots\theta(\eta_n - x)\times \\ &\times \exp i\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n - \eta_1 - \ldots - \eta_n)\Big], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geqslant 0$.

Используя формулы (8) и (5), легко получить, что

$$[F(\lambda, x),\ \Psi^+(y)] = [G(\lambda, x),\ \Psi(y)] = 0 \text{ при } y \leqslant x. \tag{9}$$

2. Рассмотрим теперь действие операторов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ на собственные функции интегралов движения ([4]) в N-частичном подпространстве, которые, как известно из ([2]), можно выбрать в виде

$$\varphi_N(x_1\dots x_N|k_1\dots k_N)=(N!)^{-1/2}\sum_{(l_1\dots l_N)} C_{l_1\dots l_N}\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}k_{l_j}x_j\right) \tag{10}$$

при $x_1>x_2>\dots>x_N$, симметрично продолжая на другие значения x, причем

$$C_{l_1\dots l_N}=\prod_{r<s}\left(1+\frac{\varkappa}{i(k_{l_r}-k_{l_s})}\right).$$

Используя явный вид волновых функций (10) и формулы (4), (8), можно получить, что

$$A(\lambda)\varphi_N(k_1\dots k_N)=\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\varkappa}{i(k_j-\lambda)}\right)\varphi_N(k_1\dots k_N),$$

$$B(\lambda)\varphi_N(k_1\dots k_N)=-i\varphi_{N+1}(k_1\dots k_N,\lambda). \tag{11}$$

Формулы (11) позволяют назвать $\ln A(\lambda)$ производящей функцией интегралов движения, а $B(\lambda)$ — оператором рождения частицы с импульсом λ (см. ([5])). Из (11) следуют коммутационные соотношения

$$[A(\lambda),A(\mu)]=[B(\lambda),B(\mu)]=0,$$

$$A(\lambda)B(\mu)=\left(1+\frac{\varkappa}{i(\mu-\lambda)}\right)B(\mu)A(\lambda). \tag{12}$$

В квазиклассическом пределе соотношения (12) переходят в соответствующие соотношения для скобок Пуассона a и b ([5]).

Как известно ([4]), волновые функции (10) не нормированы на δ-функцию. Нормированные операторы рождения и уничтожения даются, например, формулами

$$\Phi^+(\lambda)=B(\lambda)\,(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda)]^{-1/2},\qquad \Phi(\lambda)=(\Phi^+(\lambda))^+;$$
$$[\Phi(\lambda),\Phi^+(\mu)]=\delta(\lambda-\mu).$$

3. Фундаментальные коммутационные соотношения (12) могут быть доказаны и без использования явного вида волновых функций (10). Центральное место в доказательстве занимает описываемая ниже конструкция «удвоенной» системы дифференциальных уравнений (6), идея которой была подсказана автору работой ([7]).

Введем два четырехкомпонентных столбца $H_1(x)$ и $H_2(x)$ с компонентами

$$(F(\lambda,x)F(\mu,x),\,F(\lambda,x)G(\mu,x),\,G(\lambda,x)F(\mu,x),\,G(\lambda,x)G(\mu,x)),$$
$$(F(\mu,x)F(\lambda,x),\,G(\mu,x)F(\lambda,x),\,F(\mu,x)G(\lambda,x),\,G(\mu,x)G(\lambda,x))$$

соответственно. Из (3), (5), (6), (9) следует, что $H_1(x)$ и $H_2(x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dx}H_j(x)=[L_j(x)H_j(x)]_N,\qquad j=1,2, \tag{13}$$

с граничным условием

$$x\to+\infty,\quad H_j(x)-(0,\ 0,\ 0,\ \exp[i(\lambda+\mu)x/2])\to 0,\quad j=1,\ 2; \tag{14}$$

здесь $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — матрицы 4×4.

$$L_1(x)=\begin{pmatrix} -i(\lambda+\mu)/2 & i\Psi^+(x) & i\Psi^+(x) & 0 \\ -i\varkappa\Psi(x) & i(\mu-\lambda)/2 & 0 & i\Psi^+(x) \\ -i\varkappa\Psi(x) & -\varkappa & i(\lambda-\mu)/2 & i\Psi^+(x) \\ 0 & -i\varkappa\Psi(x) & -i\varkappa\Psi(x) & i(\lambda+\mu)/2 \end{pmatrix},$$

а матрица $L_2(x)$ подобна матрице $L_1(x)$; $L_2=RL_1R^{-1}$, где

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \alpha=\frac{i(\mu-\lambda)}{i(\mu-\lambda)+\varkappa},\quad \beta=\frac{\varkappa}{i(\mu-\lambda)+\varkappa}.$$

Знак $[\ ]_N$ в уравнениях (13) означает, что $\Psi(x)$ нужно писать справа, а $\Psi^+(x)$ слева, аналогично уравнению (6).

Из (13), (14) и подобия матриц $L_1(x)$ и $L_2(x)$ следует, что $H_2(x)=RH_1(x)$. Используя последнее равенство, а также (4), (5), (7), (9), можно доказать коммутационные соотношения (12).

4. Покажем в заключение, что, как и в классическом случае, уравнение движения (1) может быть получено как условие совместности двух систем линейных уравнений на функции F и G. Пусть операторы Ψ и Ψ^+, а вместе с ними через формулы (8) и F и G зависят от времени t так, что при всяком t выполняется коммутационное соотношение (5) и уравнение (6). Наложим на $F(\lambda, x, t)$ и $G(\lambda, x, t)$ еще одно условие

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}F=i\varkappa\Psi^+F\Psi+\Psi_x^+G-i\lambda\Psi^+G+i\frac{\lambda^2}{2}F, \\ &\frac{\partial}{\partial t}G=-i\varkappa\Psi^+G\Psi+\varkappa F\Psi_x+i\varkappa\lambda F\Psi-i\frac{\lambda^2}{2}G. \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда из уравнений (6), (15) и соотношения (9) следует, что $\Psi(x, t)$ удовлетворяет уравнениям движения (1) или

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=i[\mathcal{H},\Psi(x,t)],$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан, соответствующий уравнениям движения (1).

$$\mathcal{H}=-\int\Psi^+(x)\Psi_{xx}(x)\,dx+\varkappa\int\Psi^+(x)\Psi^+(x)\Psi(x)\Psi(x)\,dx.$$

Используя асимптотики (3) и (4), а также стандартную для метода обратной задачи рассеяния аргументацию ([1]), можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\lambda,t)=i[\mathcal{H},A(\lambda,t)]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B(\lambda,t)=i[\mathcal{H},B(\lambda,t)]=\lambda^2B(\lambda,t).$$

Последние формулы следуют также и из результатов пп.2, 3 (см. также ([5])).

Результаты, аналогичные перечисленным в настоящей работе, получены автором совместно с П. П. Кулишом также для ферромагнитной цепочки Гейзенберга.

Автор искренне благодарен Л. Д. Фаддееву и П. П. Кулишу за внимание к работе и полезные обсуждения.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат,* ЖЭТФ, т. 61, № 1, 118 (1971). [2] *Ф. А. Березин, Г. П. Похил, В. М. Финкельберг,* Вестн. МГУ, Математика, механика, № 1, 21 (1964). [3] *П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев,* Теоретич. и матем. физ., т. 28, № 1, 38 (1976). [4] *А. А. Цветков,* Вестн. МГУ, Матем., мех., № 4, 61 (1977). [5] *Е. К. Склянин, Л. Д. Фаддеев,* ДАН, т. 243, № 6 (1979). [6] *Ф. А. Березин,* Метод вторичного квантования, М., 1965. [7] *R. I. Baxter,* Ann. Phys. v. 70, № 1, 193 (1972).