Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k^k k!)}}{(n+1)!}$. (*Л. Радзивиловский*)
2. Если в конечной группе равенство $xy=yx$ выполнено для $>90\,\%$ пар (x,y), то группа абелева. (*Фольклор*)
3. Проекции k-угольника ($k\geqslant 3$) на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными k-угольниками. Докажите, что эти k-угольники конгруэнтны. (*Фольклор*)

4. Докажите неприводимость следующих многочленов.

а) **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $p(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число. При этом a_0 не делится на p; a_n не делится на p^2; $a_1, \ldots, a_n$ делятся на p.

б) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7$.

в) $P(x) = x^8 + x + 1$.

г) $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.

д) $x^{13} + 2x^{12} - 6x^{11} + 2x^{10} - 10x^8 + 4x^6 + 60x^5 - 44x^4 - 4x + 4$.

е) **Признак неприводимости Кона.** Пусть многочлен

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

степени n над $\mathbb{Z}[x]$ таков, что $0 \leqslant a_i \leqslant t-1$ и $P(t)$ является простым числом. Тогда $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.

ж) **Признак неприводимости Мурти.** Для многочлена

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

степени n над $\mathbb{Z}[x]$ обозначим

$$H = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|.$$

Тогда если для некоторого натурального $t \geqslant H + 2$ число $P(t)$ простое, то $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$. (*Фольклор*)

5. В трёхмерном пространстве даны несколько шаров с непересекающимися внутренностями. Оказалось, что каждый касается ровно k других. Чему равно наибольшее возможное значение k?

(*Ф. К. Нилов*)

6. Аппарат имеет форму куба. Он передвигается, перекатываясь через ребро на соседнюю грань. Перекатыватели на двух рёбрах сломались. Сможет ли аппарат обследовать всю плоскость?

(*А. Я. Канель-Белов*)

7. С величиной $\varepsilon > 0$ свяжем геометрическое место точек $M_\varepsilon = (x, y, z)$, для которых

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - z^2 \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть объём M_ε равен V_ϵ. Найдите $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$. (*Л. Радзивиловский*)

8. а) Разбиение многоугольника на треугольники называется *антитриангуляцией*, если никакая пара треугольников разбиения не имеет общей стороны. Для каких k можно антитриангулировать треугольник на k треугольников?
   б) При каких n можно антитриангулировать выпуклый n-угольник?
   (*Н. Б. Васильев, П. А. Кожевников*)
9. В n-мерном пространстве задана гиперповерхность S, определяемая уравнением $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен степени k. Докажите, что если n намного больше, чем k, то через любую точку из S проходит 2024-мерное аффинное подпространство, содержащееся в S. (*А. Я. Канель-Белов*)
10. Двоичный куб размерности n разбит на подкубы (т. е. множества, являющиеся декартовыми произведениями n пар точек) так, что в каждой из $2n$ гиперграней содержится хотя бы один подкуб разбиения. Найдите наименьшее количество подкубов в таком разбиении. (*И. И. Богданов*)
11. Существует ли отображение шара размерности $m > n$ в а) ограниченную область в $\mathbb{R}^n$; б) в $\mathbb{R}^n$, не уменьшающее расстояния?
   (*Фольклор*)
12. Параболы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ пересекаются в точках A, B, C, D так, что диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Хорды X_1Y_1 и X_2Y_2 парабол $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ соответственно пересекаются в точке O и симметричны относительно диагоналей. Тогда точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежат на одной окружности. (*К. А. Бельский*)
13. Центрально-симметричный шестиугольник можно разбить на три параллелограмма двумя способами. Переход от одного к другому называется *флипом* (рис. 1).

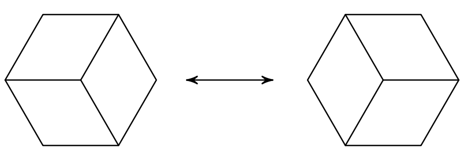

Рис. 1

   а) Рассмотрим разбиение правильного 6-угольника со стороной n на ромбы с единичными сторонами. Там появляются тройки, образующие шестиугольники, и к ним можно применить *флип*. Докажите, что с помощью цепочки флипов любое разбиение можно перевести в любое, и найдите, какое минимально возможное количество флипов для этого требуется. (*А. Смирнов*)

б) Рассмотрим разбиения правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на ромбы с единичными сторонами. За какое минимально возможное количество флипов любое разбиение можно перевести в любое?

в) Какое минимальное число шестиугольников может появиться при разбиении правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на параллелограммы? (*А. Я. Канель-Белов*)

г) Пусть N k-миношек уложены в виде прямоугольника $r \times t$. Если k из них образуют квадрат, то можно осуществить *флип*: повернуть их на 90° (рис. 2). Докажите, что можно все k-миношки сориентировать одинаково. Найдите минимально возможное число операций и оцените минимально возможное количество позиций где можно осуществить флип. (*Фольклор*)

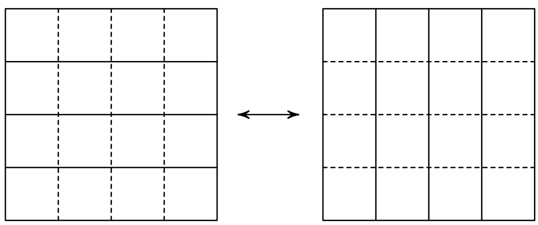

Рис. 2

14. а) Матрицы A, B второго порядка таковы, что матричное уравнение $X^2 + AX + B = 0$ имеет конечное число решений, равное n. Найдите максимально возможное n.

    б) Аналогичный вопрос для матриц порядка m.

    (*Л. Радзивиловский*)

15. На клетчатой плоскости задан *шаблон* — множество из k клеток. 2^k маляров собираются предложить 2^k способов раскрасить клетки плоскости в чёрный и белый цвета (каждую клетку — в один из цветов). Они хотят, чтобы для любого сдвига (параллельного переноса) шаблона все 2^k предлагаемых ими раскрасок клеток этого сдвига были различны. Докажите, что маляры могут предложить такие способы. (*И. В. Митрофанов*)