Р. И. Богданов, Приведение к орбитальной нормальной форме векторного поля на плоскости, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, том 10, выпуск 1, 73–74

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 73—74.

ПРИВЕДЕНИЕ К ОРБИТАЛЬНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Р. И. Богданов

При исследовании фазовых кривых векторного поля в окрестности особой точки оказывается полезным рассмотреть действие алгебры Ли векторных полей на пространстве бивекторных полей. В настоящей заметке излагается этот метод приведения векторного поля на плоскости к орбитальной нормальной форме. В качестве примера получены нормальные формы особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел.

1. Обозначим через V (V^r, $r \geqslant 2$) алгебру Ли ростков в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$ векторных полей класса C^∞ (класса C^r) на плоскости. Скобки Пуассона обозначим через $[\xi, \eta]$, $\forall \xi, \eta \in V^r$.

2. Пусть Diff^r обозначает группу Ли ростков в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$ диффеоморфизмов ψ: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\psi(0) = 0$, $\psi \in C^r(x)$, $r = 1, 2, \ldots, \infty$.

3. Группа Diff^r действует на алгебре V^{r-1} по закону

$$(\mathrm{Ad}_g v)(x) = g_* v(g^{-1}x), \quad v \in V^{r-1}, \qquad g \in \mathrm{Diff}^r.$$

4. Ростки $u, v \in V$ назовем эквивалентными ($u \sim v$), если при достаточно малых $x \in \mathbf{R}^2$ векторы $u(x)$, $v(x)$ коллинеарны и имеют одинаковое направление.

5. *C^r-контактной орбитой* ростка $v \in V$ назовем множество $K_v^r = \{u \in V: \exists \psi \in \mathrm{Diff}^r: \mathrm{Ad}_\psi v \sim u\}$.

6. Лемма (см. [1]). *Пусть $\mathrm{Ad}_\psi v \sim u$, где $u, v \in V$, $\psi \in \mathrm{Diff}^r$. Тогда представитель ростка ψ переводит фазовые кривые представителя ростка v в достаточно малой окрестности точки $(0) \in \mathbf{R}^2$ в фазовые кривые представителя ростка u.*

7. Обозначим через J^l ($l \in \mathbf{Z}$, $l \geqslant 0$) пространство l-струй ростков $v \in V$, а через $\pi l: V \to J^l$ естественную проекцию (см. [4]).

Лемма (см. [5]). *Пусть росток $v \in V$ такой, что $\pi_1 v = x_2 \partial/\partial x_1$, $\pi_k v$ имеет изолированный нуль в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$, $\pi_{k-1} v$ имеет неизолированный нуль в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$ *). Тогда полиномиальной заменой координат $y = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$, обратимой в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$, росток v приводится к виду*

$$v = [y_2 + P_k(y_1)] \frac{\partial}{\partial y_1} + \delta y_1^k \frac{\partial}{\partial y_2} + o(\|y\|^k), \tag{1}$$

где $P_k(y_1)$ — полином степени не выше k, $P_k(0) = \left.\dfrac{\partial P_k}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} = 0$, $\delta = \pm 1$.

8. Пусть росток $v \in V$ вида (1) такой, что $\left.\dfrac{\partial^s P_k}{\partial y_1^s}\right|_{y_1=0} \neq 0$, $2 \leqslant s < \dfrac{k+1}{2}$, при $k = 2m + 1$, $\delta = 1$. Назовем в этом случае росток v ростком типа $A_{k,s}$.

Теорема. *C^r-контактная орбита ростка типа $A_{k,s}$ содержит росток вида*

$$v = [x_2 + x_1^s P_{r-1}(x_1)] \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^k \frac{\partial}{\partial x_2},$$

причем $P_{r-1}(0) = \pm 1$, $P_{r-1}(x_1)$ зависит лишь от $\pi_{k+r-1} v$.

Доказательство теоремы основано на нижеследующих результатах.

9. Лемма. *Пусть $a = \alpha e_1 \wedge e_2$ — бивекторное поле на плоскости* (см. [2]), *где $e_1 = \partial/\partial x_1$, $e_2 = \partial/\partial x_2$. Тогда производная поля a по направлению векторного поля v дается*

*) Здесь необходимо вложение j: $J^k \to V$, которое естественно строится в фиксированной системе координат. Легко видеть, что указанные выше свойства от выбора системы кординат не зависят.

формулой

$$L_v a = f e_1 \wedge e_2, \quad \text{где } f = (\operatorname{grad} \alpha, v) - \alpha \operatorname{div} v. \tag{2}$$

10. Пусть Ω^r обозначает пространство ростков в точке $(0) \in \mathbf{R}^2$ функций класса C^r на плоскости $(r \geqslant 2)$. Обозначим через T_v: $\Omega^r \to \Omega^{r-1}$ отображение пространства Ω^r, заданное формулой $T_v \alpha = -f$ (см. (2)).

11. Следствие. *Операторы* $T_v: \Omega^\infty \to \Omega^\infty$ *образуют представление алгебры Ли* $V T_{[v,u]} = T_v \cdot T_u - T_u \cdot T_v$.

12. Следствие. *Обозначим через* α_v: $V^r \to \Omega^r$ *отображение* Ω^r*-модулей, сопоставляющее ростку* $\xi \in V^r$ *росток* $\alpha_v(\xi) = \omega_2(\xi, v) \in \Omega^r$, *где* $\omega_2 = dx_1 \wedge dx_2$ — *элемент площади. Тогда* $\alpha_v \circ \operatorname{ad}_v(\xi) = T_v \circ d_v(\xi)$, $\xi \in V^r$, $\operatorname{ad}_v(\xi) = [\xi, v]$.

13. Замечание. Ядро отображения α_v есть подалгебра Ли и подмодуль пространства V^r, $\mathfrak{M}_v = \operatorname{Ker} \alpha_v = \{\xi \in V^r: \xi \wedge v \equiv 0\}$.

14. Обозначим через U окрестность точки $(0) \in \mathbf{R}^2$ на вещественной прямой. Точки окрестности U будем обозначать через ε.

Деформацией ростка $v \in V$ (соответственно C^r-деформацией ростка $e \in \operatorname{Diff}^r$) назовем отображение $\mathbf{v}$: $U \to V$, $\mathbf{v}(0) = v$ (соответственно φ: $U \to \operatorname{Diff}^r$, $\varphi(0) = e$), если поле $\mathbf{v}(\varepsilon)$ в точке $x \in \mathbf{R}^2$ ($\varphi(\varepsilon)$ в точке $x \in \mathbf{R}^2$) вместе с производными (соответственно до порядка r) по x является функцией класса C^2 по ε.

15. Лемма. *Пусть e — росток тождественного диффеоморфизма и* $\operatorname{Ad}_{\varphi(\varepsilon)} v \sim \mathbf{v}(\varepsilon)$. *Тогда* $T_v \alpha_v(\xi) = \alpha_v(\eta)$, *где*

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \qquad \eta = \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Доказательство леммы из п. 15 заключено в следствии п. 12.

16. Пусть отображение ξ: $U \to V^r$ такое, что поле $\xi(\varepsilon)$ в точке $x \in \mathbf{R}^2$ вместе с производными по x до порядка r является функцией класса C^2 по ε. Обозначим через η отображение η: $U \to V$, $\eta(\varepsilon) = \left.\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon}$.

Теорема. *Пусть при каждом* $\varepsilon \in U$ *росток* $\mathbf{v}(\varepsilon)$ *имеет изолированный нуль в точке* $(0) \in \mathbf{R}^2$, *отображение* ξ *удовлетворяет соотношению*

$$T_{\mathbf{v}(\varepsilon)} \alpha_{\mathbf{v}(\varepsilon)}(\xi(\varepsilon)) = \alpha_{\mathbf{v}(\varepsilon)}(\eta(\varepsilon)), \quad \xi(\varepsilon, 0) = \left.\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right|_{x=0} = 0 \qquad (i, j = 1, 2).$$

Тогда решение $\varphi(\varepsilon, x)$ *уравнения*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \xi(\varepsilon, \varphi), \qquad \varphi(0, x) \equiv x \tag{3}$$

определяет C^r*-деформацию ростка* $e \in \operatorname{Diff}^r$ *и* $\operatorname{Ad}_{\varphi(\varepsilon)} v \sim \mathbf{v}(\varepsilon)$.

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Арнольду и А. Н. Шошитайшвили за полезные обсуждения.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 9 июля 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем, М., «Наука», 1966. 2. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, М., «Мир», 1970. 3. Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1971. 4. Арнольд В. И., УМН **XXVII**, вып. 5 (1972), 119—185. 5. Takens F., Publ. Math., Paris, 43 (1974), 47—100.