А. Ф. Вакуленко, Унитарный регуляризатор для n-частичного рассеяния, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1977, том 69, 19–33

А.Ф.Вакуленко

УНИТАРНЫЙ РЕГУЛЯРИЗАТОР ДЛЯ n-ЧАСТИЧНОГО РАССЕЯНИЯ

Основной задачей математической теории рассеяния является разработка рецептов построения полных систем собственных функций непрерывного спектра самосопряженных операторов специальных классов и оправдание этих рецептов. Для оператора энергии H системы n квантовомеханических частиц подобные рецепты известны из физических соображений, и существующие способы оправдания основаны на сведении задачи к интегральным уравнениям для ядра резольвенты оператора H. Такие уравнения конструируются непосредственным образом и имеют сравнительно простой характер при $n=2$ детально разработаны и многочисленные варианты теории этих уравнений. Для систем с большим числом частиц сама конструкция уравнений, которые могут быть удовлетворительным образом вложены в теорию уравнений с вполне непрерывным оператором, оказывается довольно громоздкой [I - 4]. При $n>3$ исследование подобных уравнений до сих пор вызывает трудности. Недавно В.С.Буслаевым и автором был предложен новый подход к обоснованию теории рассеяния для системы нескольких частиц. В настоящей статье мы применяем его для исследования оператора, который естественно обобщает предложенную Фридрихсом модель оператора системы трех частиц [5].

Автор благодарен В.С.Буслаеву за постановку задачи и внимание к работе.

§ I. В этом параграфе мы опишем модель Фридрихса для оператора энергии системы n частиц и введем основные объекты теории рассеяния, связанные с ней.

Самосопряженный оператор H n-частичной модели Фридрихса действует в пространстве $\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}^n\to N)$ функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в гильбертовом пространстве N. Действие H дается формулой $H=H_0+\sum_{K=1}^{n}V_K$, где $(H_0f)(x)=(\sum_{K=1}^{n}x_K)f(x)$,

$$(V_Kf)(x)=\int v_K(x_K,x_K')f(x_1,\dots,x_K',\dots,x_n)dx_K',\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Функции v_K, заданные на $\mathbb{R}^2$ и принимающие значения во множестве вполне непрерывных операторов в N предполагаются имеющими производные всех порядков, убывающие быстрее любой степени

$(1+|x_k|+|x'_k|)^{-1}$. Такие функции мы будем в дальнейшем называть гладкими быстро убывающими.

В системе n частиц могут быть выделены подсистемы, состоящие из меньшего числа частиц. В модели Фридрихса им соответствуют подмножества α множества $\varrho=\{1,2,\dots,n\}$ и операторы $H^\alpha=H_0+\sum\limits_{k\in\alpha}V_k$. Запишем вектор $x\in\mathbb{R}^n$ в виде $x=(x_\alpha,x_{\bar\alpha})$, где $\bar\alpha=\varrho\setminus\alpha$, x_α - вектор с компонентами x_k, $k\in\alpha$. Оператор H^α при этом запишется в виде $h^\alpha\otimes h_0^{\bar\alpha}$. Оператор h^α действует на функции от $|\alpha|$ переменных ($|\alpha|$ число элементов в α) и представляет собой модель Фридрихса оператора энергии системы $|\alpha|$ частиц. Пусть e - собственное значение оператора h^α, $\Psi(x_\alpha)$ собственная функция h^α с собственным значением e , $f(x_{\bar\alpha})$ - произвольная квадратично суммируемая (скалярная) функция, P_α, e - проектор на подпространство в $\mathcal{H}$, порожденное функциями вида $f(x_{\bar\alpha})\Psi(x_\alpha)$. Рассмотрим следующие пределы (предполагая, что они существуют):

$$W^{(\pm)}_{\alpha,e}=\underset{t\to(\pm)\infty}{s\text{-}lim}\, exp(iHt)exp(-iH^\alpha t)P_{\alpha,e} \tag{I.I}$$

(При $\alpha=\varnothing$ $P_\alpha=I$, индекс e опускается).

Из определения вытекают следующие свойства операторов $W^{(\pm)}_{\alpha,e}$

I. $W^{(\pm)}_{\alpha,e}$ - изометрический на $P_{\alpha,e}\mathcal{H}$ оператор.

2. Области значений операторов $W^{(\pm)}_{\alpha_1,e_1}$ и $W^{(\pm)}_{\alpha_2,e_2}$ (I.2) ортогональны если $\alpha_1\neq\alpha_2$ или $e_1\neq e_2$.

3. $HW^{(\pm)}_{\alpha,e}=W^{(\pm)}_{\alpha,e}H^\alpha$.

Подпространство $P_{\alpha,e}\mathcal{H}$ естественно эквивалентно пространству $\mathcal{H}_{\alpha,e}=L_2(\mathbb{R}^{|\bar\alpha|}\to N_{\alpha,e})$, где $N_{\alpha,e}$ - собственное подпространство оператора h^α отвечающее собственному значению e . Пространство $\mathcal{H}_{\alpha,e}$ называется каналом рассеяния. Поэтому оператор $W^{(\pm)}_{\alpha,e}$ можно также рассматривать на $\mathcal{H}_{\alpha,e}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{H}}$ ортогональную сумму $\mathcal{H}\oplus(\bigoplus_{\alpha,e}\mathcal{H}_{\alpha,e})$ и через $W^{(\pm)}$ оператор из $\hat{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{H}$, компонентами которого являются операторы $W_0^{(\pm)}$ и $W^{(\pm)}_{\alpha,e}$. Обозначим также через $\hat{H}_0$ диагональный оператор в $\hat{\mathcal{H}}$, его диагональные элементы - операторы H_0 и $h_0^\alpha+e$. Тогда (I.2) эквивалентно:

1. $W^{(\pm)}$ – изометрический оператор

$$2.\ HW^{(\pm)} = W^{(\pm)} \hat{H}_0 . \qquad (1.2)$$

Оператор $S=(W^{+})^{*}W^{-}$ называется оператором рассеяния. Из (1.2) следует, что S коммутирует с $\hat{H}_0$, тем самым S определяет функцию $s(E)$, значение которой в точке E это оператор в инфинитезимальном собственном подпространстве оператора $\hat{H}_0$ отвечающем собственному числу E. Функция $s(E)$ называется матрицей рассеяния.

Из определения (1.1) следует, что области значений операторов $W^{(\pm)}$ лежит в подпространстве абсолютно-непрерывного спектра H. Нашей задачей является доказательство полноты операторов $W^{(\pm)}$ т.е. следующего утверждения:

Области значений операторов $W^{(\pm)}$ совпадают с подпространством абсолютно непрерывного спектра H.

Из полноты операторов $W^{(\pm)}$ очевидно следует унитарность оператора S.

§ 2. В этом параграфе мы определим класс операторов, которые мы называем операторами с правильной сингулярной структурой. Алгебраические действия в этом классе описываются при помощи коэффициентов, которые также являются операторами с правильной сингулярной структурой, но устроены проще. Волновые операторы и оператор рассеяния модели Фридрихса принадлежат этому классу.

Пусть M – n-мерное евклидово пространство, V – базис в M. Будем называть конусом с образующими V множество $\{x\in M \mid x=\sum_{v\in V} a_v v,\ a_v \geqslant 0\}$. Множество $\{x\in M \mid x=\sum_{v\in V'} a_v v,\ a_v\geqslant 0\}$, где V' – подмножество V, состоящее из k элементов, будем называть k-мерной гранью с образующими V'. Пусть в M задано конечное множество гиперплоскостей, проходящих через начало координат и разбивающих M на конусы. Будем считать множество образующих конусов фиксированным таким образом, что пересечению двух конусов отвечает пересечение их множеств образующих (ясно, что пересечение двух конусов есть их общая грань). Грани конусов разбиения будем называть просто гранями разбиения, при этом n-мерная грань это конус разбиения. Пусть Γ и Γ' грани разбиения, $\{v_k\}$ и $\{v'_k\}$ их образующие, занумерованные так, что пересечению Γ и Γ' соответствуют первые p элементов $v_k=v'_k, k=1,\dots,p$. Предположим, что каждое v_k линейно зависимо с $\{v_K'\}$, т.е. $v_K=\sum a_{Ks} v_s'$. Имеем место

ЛЕММА 2.1. При фиксированном s^s все a_{Ks} имеют одинаковый знак. При $K>p$ найдется $s>p$, такое что $a_{Ks}<0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гиперплоскость $\{x\in M \mid (x,w)=0\}$ содержащую все v_s' при $s\neq s_0$, будем считать, что $(v_{s_0}', w)=$ $=1$. Тогда, $a_{Ks_0}=(v_K, w)$ и, поскольку эта гиперплоскость не разбивает грань Γ', все (v_K, w) имеют одинаковый знак. Для доказательства второго утверждения предположим противное: пусть найдется $K_0>p$ такое, что $a_{K_0 s}\geqslant 0$ при всех $s>p$. В равенстве $v_{K_0}=\sum a_{K_0 s} v_s'$ перенесем в левую часть все слагаемые, для которых $a_{K_0 s}<0$. Поскольку s при этом должно быть меньше либо равно p, мы можем заменить v_s' на v_s, получим: $v_{K_0}+\sum |a_{K_0 s}|\, v_s=\sum a_{K_0 s} v_s'$. Коэффициенты в обеих частях равенства неотрицательны, следовательно справа мы имеем вектор, принадлежащий Γ', а слева – вектор из Γ, причем он не лежит в пересечении Γ и Γ', так как $K_0>p$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть K конус разбиения, обозначим через $\mathcal{P}_K(x)$ обобщенную функцию $\prod_v \frac{1}{2\pi i}((x,v)-i0)^{-1}$, где произведение берется по всем образующим конуса. Имеет место формула:

$$\delta(x)=\sum_K a_K \mathcal{P}_K(x)\,, \tag{2.1}$$

где суммирование производится по всем конусам разбиения, и a_K – некоторые положительные константы.

Рассмотрим теперь два пространства M_1 и M_2, в которых фиксированы разбиения указанного вида, и пространства $L_2(M_1\to N_1)$ $L_2(M_2\to N_2)$, где N_1, N_2 – некоторые гильбертовы пространства. Пусть Γ_1 и Γ_2 K-мерные грани в M_1 и M_2, из $\mathcal{J}(x_1,x_2)$ $x_1\in M_1$, $x_2\in M_2$ – гладкая быстро убывающая функция, принимающая значения во множестве вполне непрерывных операторов из N_2 в N_1, $\{v_1^s\}$ и $\{v_2^s\}$ $s=1,2,\dots,K$ – образующие Γ_1 и Γ_2 занумерованные в некотором порядке, $a_1,a_2,\dots,a_K$ – вещественные числа. Определим оператор $T: L_2(M_2\to N_2)\to L_2(M_1\to N_1)$, задав его ядром:

$$T\sim \mathcal{J}(x_1,x_2)\prod_{s=1}^{K}\frac{1}{2\pi i}(y_1^s-y_2^s+a_s-i0)^{-1}, \quad \begin{aligned} y_1^s&=y_1^s(x_1)=(v_1^s,x_1)\\ y_2^s&=y_2^s(x_2)=(v_2^s,x_2)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Оператор T ограничен, кроме того, если функция $\mathcal{J}$ обращается в нуль при всех (x_1,x_2), для которых обращается в нуль знаменатель, то ядро оператора T – гладкая быстро убывающая функция, и сам оператор T вполне непрерывен. Гладкость и быстрое убывание ядра T в этом случае вытекают из следующего утверждения:

ЛЕММА 2.2. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $[-1,1]$ и $\varphi(0)=0$, тогда функция $f(x)=\varphi(x)/x$ бесконечно дифференцируема и $\max\limits_{x}|f^{(n)}(x)|\leq C_n\sum\limits_{k=1}^{n+1}\max\limits_{x}|\varphi^{(k)}(x)|$.

Сопоставим оператору T набор операторов $Ty_1^\ell y_2^\ell a_\ell$, каждый из которых задан ядром:

$$Ty_1^\ell y_2^\ell a_\ell\sim \mathcal{Y}(x_1,x_2)\,\delta(y_1^\ell-y_2^\ell+a_\ell)\prod_{s=1,s\neq\ell}^{K}\frac{1}{2\pi i}(y_1^s-y_2^s+a_s-i0)^{-1}.$$

Задавая оператор $Ty_1^\ell y_2 a_\ell$, мы задаем функцию $\mathcal{Y}(x_1,x_2)$ при всех (x_1,x_2), для которых $y_1^\ell(x_1)-y_2^\ell(x_2)+a_\ell=0$. Таким образом вся совокупность $Ty_1^\ell y_2^\ell a_\ell$ задает оператор T с точностью до слагаемого, ядро которого есть гладкая быстро убывающая функция. Заметим, что оператор $Ty_1^\ell y_2^\ell a_\ell$ получается предельным переходом

$$Ty_1^\ell y_2^\ell a_\ell = s\text{-}\lim_{t\to\infty} \exp(it(y_1^\ell+a_\ell))\,T\exp(-ity_2^\ell) \tag{2.3}$$

здесь y_1^ℓ и y_2^ℓ – операторы умножения на функцию.

Если рассмотреть любую образующую v_2 разбиения в M_2 отличную от всех v_2^s и положить $y_2=y_2(x_2)=(v_2,x_2)$, то, оказывается

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} T\exp(-ity_2)=0\,. \tag{2.4}$$

Мы можем тогда определить оператор Ty_1y_2a, где y_1 и y_2 построены по произвольным образующим разбиений в M_1 и M_2 и a – произвольное вещественное число, положив его равным коэффициенту при $\exp(-it(y_1+a))$ в асимптотике для $T\exp(-ity_2)$ при $t\to\infty$. Все такие операторы равны нулю, за исключением тех, которые определены в (2.3). Операторы Ty_1y_2a будем называть коэффициентами оператора T.

Рассмотрим три пространства M_1, M_2, M_3, в которых фиксированы разбиения, и пару операторов $T_1: L_2(M_2\to N_2)\to L_2(M_1\to N_1)$ и $T_2: L_2(M_3\to N_3)\to L_2(M_2\to N_2)$, имеющих вид (2.2). Положим $T=T_1T_2$.

ЛЕММА 2.3. Оператор T имеет вид (2.2), и его коэффициенты определяются следующим соотношением:

$$T y_1 y_3 a = \sum (T_1) y_1 y_2 a_1 (T_2) y_2 y_3 a_2 ,$$

где суммирование производится по всем y_2 и a_1 и a_2, таким, что $a = a_1 + a_2$. (В этой сумме лишь одно слагаемое нетривиально).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть операторы T_1 и T_2 заданы ядрами:

$$\mathcal{T}_1(x_1,x_2) = \mathcal{Y}_1(x_1,x_2) \prod_{\ell=1}^{n_1} \frac{1}{2\pi i}(y_1^\ell - \tilde{y}_2^\ell + \tilde{a}_\ell - i0)^{-1}$$

$$\mathcal{T}_2(x_2,x_3) = \mathcal{Y}_2(x_2,x_2) \prod_{\ell=1}^{n_2} \frac{1}{2\pi i}(y_2^\ell - y_3^\ell + a_\ell - i0)^{-1} .$$

Будем для простоты предполагать, что константы $\tilde{a}_\ell$ и a_ℓ равны нулю. Ядро оператора T равно

$$\mathcal{T}(x_1,x_3) = \int \mathcal{T}_1(x_1,x_2)\mathcal{T}_2(x_2,x_3)\,dx_2 .$$

Произведем интегрирование сначала при фиксированных y_2^ℓ, тогда по сформулированной ниже лемме 2.4 получим для $\mathcal{T}(x_1,x_3)$ следующее выражение:

$$\int \mathcal{Y}(x_1,x_3,y_2^1,y_2^2,\dots,y_2^{n_2}) \prod_\ell \frac{1}{2\pi i}(y_1^\ell - \tilde{y}_2^\ell - i0)^{-1} \prod_{\ell=1}^{n_2} \frac{1}{2\pi i}(y_2^\ell - y_3^\ell - i0)^{-1} \prod_{\ell=1}^{n_2} dy_2^\ell .$$

Первое произведение берется по тем ℓ, для которых $\tilde{y}_2^\ell$ линейно зависимо с $\{y_2^s\}, s=1,\dots,n_2$. Функция $\mathcal{Y}$ здесь и далее в доказательстве - некоторая гладкая быстро убывающая функция переменных интегрирования и x_1 и x_3. Часть $\tilde{y}_2^\ell$ и y_2^ℓ могут совпадать, будем считать, что это так при $\ell = 1,\dots,p$. Тогда по лемме 2.I в разложении $\tilde{y}_2^k = \sum a_{ks} y_2^s$ при любом $k > p$ найдется $s > p$ такое, что $a_{ks} < 0$ и для остальных k при этом s выполняется $a_{ks} \leqslant 0$. Интегрируя по y_2^s и пользуясь леммой 2.4, получим:

$$\mathcal{T}(x_1,x_3) = \int \mathcal{Y} \prod_\ell \frac{1}{2\pi i}(y_1^\ell - \tilde{y}_2^\ell - i0)^{-1} \prod_{\ell=1,\ell\neq s} \frac{1}{2\pi i}(y_2^\ell - y_3^\ell - i0)^{-1} \prod_{\ell=1,\ell\neq s}^{n_2} dy_2^\ell .$$

Первое произведение берется по тем ℓ, для которых $\tilde{y}_2^\ell$ выражается через переменные без тильды, но во втором произведении число сомножителей уменьшилось на единицу. Продолжая это рассуждение, придем к следующему выражению:

$$\mathcal{T}(x_1,x_3)=\int \mathcal{I}\prod_{\ell=1}^{p}\frac{1}{(2\pi i)^2}(y_1^\ell-y_2^\ell-i0)^{-1}(y_2^\ell-y_3^\ell-i0)^{-1}\prod_{\ell=1}^{p}dy_2^\ell$$

(напомним, что $y_2^\ell=\tilde{y}_2^\ell$ при $\ell\leq p$). Производя разложение

$$(y_1^\ell-y_2^\ell-i0)^{-1}(y_2^\ell-y_3^\ell-i0)^{-1}=(y_1^\ell-y_3^\ell-i0)^{-1}\left[(y_1^\ell-y_2^\ell-i0)^{-1}+(y_2^\ell-y_3^\ell-i0)^{-1}\right]$$

и пользуясь леммой 2.4, получим, что ядро оператора T имеет вид

$$\mathcal{I}(x_1,x_3)\prod_{\ell=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}(y_1^\ell-y_3^\ell-i0) .$$

Соотношение для коэффициентов очевидно теперь из (2.3) и (2.4), лемма доказана. При доказательстве леммы 2.3 мы пользовались следующим утверждением.

ЛЕММА 2.4. Пусть $f(x,y,t)$ $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}$ - гладкая быстро убывающая функция, положим

$$\mathcal{F}(x,y)=\int f(x,y,t)\prod_{k=1}^{m}(y_k-t-i0)^{-1}dt, \quad y=(y_1,\dots,y_m) .$$

Тогда $\mathcal{F}$ - гладкая быстро убывающая функция.

Вернемся к определению (2.2) оператора T и его коэффициентов (2.3); мы хотим представить оператор $T_{y_1y_2}a$ в виде суммы операторов вида (2.2). Пусть $\Gamma_1,\Gamma_2,\{v_1^s\},\{v_2^s\}$ те же, что и в (2.2). Назовем грани Γ_1 и Γ_2 с фиксированной нумерацией образующих согласованными, если линейное отображение, переводящее v_1^s в v_2^s, каждую образующую разбиения в M_1, линейно зависимую с $\{v_1^s\}$ переводит в образующую разбиения в M_2 и наоборот. Если оператор T построен по согласованным граням, то любой его коэффициент можно разложить в сумму операторов вида (2.2), пользуясь формулой (2.I). Пусть снова фиксированы разбиения в M_1 и M_2, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор T называется связным оператором с правильной сингулярной структурой, если он представим в виде суммы операторов вида (2.2), построенных по согласованным граням. Коэффициент Ty_1y_2a равен сумме коэффициентов слагаемых.

Коэффициент Ty_1y_2a также является связным оператором с правильной сингулярной структурой. Если y_1, $\tilde{y}_1$ и y_2, $\tilde{y}_2$ построены по образующим принадлежащим одной грани в M_1 и M_2 соответственно, то имеет место соотношение

$$(Ty_1y_2a)\tilde{y}_1\tilde{y}_2\tilde{a} = (T\tilde{y}_1\tilde{y}_2a)y_1y_2a \ . \tag{2.5}$$

И наоборот, если задано семейство операторов с правильной сингулярной структурой $T(y_1, y_2, a)$, удовлетворяющее условию (2.5) то оно определяет оператор с правильной сингулярной структурой T с точностью до оператора с гладким ядром, такой, что $Ty_1y_2a = T(y_1, y_2, a)$. Из леммы 2.3 следует

ТЕОРЕМА 2.I. Если $T = T_1T_2$ – произведение операторов с правильной сингулярной структурой, то T оператор с правильной сингулярной структурой и

$$Ty_1y_2a = \sum (T_1)y_1y_2a_1(T_2)y_2y_3a_2 \ , \tag{2.6}$$

где суммирование производится по всем y и a_1, a_2 таким, что $a = a_1 + a_2$.

Рассмотрим операторы более общего вида. Пусть в M_1 и M_2 фиксированы разбиения, Γ_1 и Γ_2 – согласованные k-мерные грани в M_1 и M_2, $\{v_1^s\}$ и $\{v_2^s\}$ $s=1,\dots,k$ их образующие, $\{a_s\}$ $s=1,2,\dots,k$ вещественные числа. Определим оператор T ядром

$$T \sim \mathcal{J}(x_1,x_2)\prod_{s=1}^{p}\delta(y_1^s - y_2^s + a_s)\prod_{s=p+1}^{k}\frac{1}{2\pi i}(y_1^s - y_2^s + a_s - i0)^{-1}. \tag{2.7}$$

Функция $\mathcal{J}(x_1,x_2)$, в отличие от (2.2), не зависит от y_1^s и y_2^s при $s=1,\dots,p$, точнее является функцией вида $\tilde{\mathcal{J}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, где

$\bar{x}_\ell$ $\ell=1,2$ ортогонально v_ℓ^s при $s=1,2,\dots,p$. Коэффициенты $T y_1 y_2 a$ определяются также как и выше. Оператор T называется несвязным по $y_1 y_2 a$ если $T=T y_1 y_2 a$, например T несвязен по $y_1^s y_2^s a_s$ при $s\leq p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор T, представимый в виде суммы операторов вида (2.7) называется оператором с правильной сингулярной структурой. Если $T=\sum T^K$ такое представление, то несвязной по $y_1 y_2 a$ частью T назовем сумму несвязных по $y_1 y_2 a$ операторов T^K. Несвязной частью T назовем сумму несвязных по некоторым $y_1 y_2 a$ операторов T^K. Для таких операторов справедливы теоремы 2.I и условие (2.6), если в них опустить слово "связный".

В следующем параграфе мы будем рассматривать операторы с правильной сингулярной структурой, построенные по разбиениям следующего вида. В $\mathbb{R}^n$ рассматриваются гиперплоскости, заданные уравнениями $x_K=0$ и $x_K=x_\ell$, образующие конусов v_α имеют вид $(v_\alpha)_s=1$ при $s\in\alpha$, $(v_\alpha)_s=0$ при $s\notin\alpha$, и также имеются образующие $-v_\alpha$. Определим функции $E_\alpha=\sum_{s\in\alpha} x_s$ $E_{\alpha\gamma}=\sum_{s\in\alpha\setminus\gamma} x_s+e$, где e одно из собственных значений оператора h^γ. Условимся в дальнейшем считать собственное значение фиксированным при фиксированном значке, нумерующем каналы, суммирование по этому значку будет означать также суммирование по соответствующим собственным значениям, символ Кронеккера $\delta_{\gamma\gamma'}$ будет означать $\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{e_j e_j'}$. Нам удобно также сменить обозначение коэффициентов. Будем называть коэффициентом при $E_{\alpha_1\gamma_1}-E'_{\alpha_2\gamma_2}-i0$ для оператора T коэффициент $T y_1 y_2 a$, где $y_K=E_{\beta_K}$, $B_K=\alpha_K\setminus\gamma_K$, $K=1,2$ $a=e_{\gamma_1}-e_{\gamma_2}$. Коэффициентом при $E_{\alpha_1\gamma_1}-E_{\alpha_2\gamma_2}+i0$ - коэффициент $T-y_1-y_2-a$.

§ 3. В этом параграфе мы докажем следующее основное утверждение об операторе модели Фридрихса.

ТЕОРЕМА 3.I. Оператор H имеет конечное число собственных значений конечной кратности, соответствующие собственные функции гладкие, быстро убывающие. Волновые операторы существуют и полны, и являются операторами с правильной сингулярной структурой. Коэффициенты оператора W_β задаются следующими выражениями:

$$\text{при } E_{\alpha\gamma}-E'_{\alpha\beta}-i0\sim W_\gamma^{\overline{\alpha-\gamma}} S_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad \beta\subsetneqq\alpha\ ;\ \gamma\subsetneqq\alpha\ , \tag{3.I}$$

$$\text{при } E_\alpha-E'_\alpha+i0\sim W_\beta^{\bar{\alpha}} \qquad \alpha\cap\beta=\emptyset,\quad \alpha\neq\emptyset\ .$$

Под волновыми операторами в (3.I) подразумеваются операторы со значком „$-$" . Из теоремы 3.I следуют формулы для коэффициентов оператора рассеяния, компонента $S'_{\beta_1\beta_2}$ имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&\text{при } E_{\alpha\beta_1} - E_{\alpha\gamma}{}^{\gamma i0} && S^{\alpha}_{\beta_1\gamma}\, S^{\overline{\alpha-\gamma}}_{\beta_2} \\
& && \qquad\qquad \beta_1,\beta_2,\gamma \not\subseteq \alpha\,. \\
&\text{при } E_{\alpha\gamma} - E_{\alpha\beta_2} - i0 && S^{\overline{\alpha-\gamma}}_{\beta_1\gamma}\, S'^{\alpha}_{\gamma\beta_2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Теорема 3.I будет доказана по индукции, при этом основным моментом является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть теорема 3.I справедлива при всех $K < n$, тогда существует унитарный оператор U , имеющий правильную сингулярную структуру, такой, что

$$U^* H U = \hat{H}_0 + \hat{V} \ , \tag{3.3}$$

где $\hat{V}$ самосопряженный оператор в $\hat{\mathcal{H}}$ ядра компонент которого гладкие быстро убывающие функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим ядра компонент U по формулам, аналогичным (3.I), т.е. U_β имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&\text{при } E_{\alpha\gamma} - E_{\alpha\beta} - i0 && W^{\overline{\alpha-\gamma}}_{\gamma}\, S^{\alpha}_{\gamma\beta} \\
&\text{при } E_{\alpha} - E'_{\alpha} + i0 && W^{\overline{\alpha}}_{\beta} \ .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

По индуктивному предположению все операторы в (3.4) являются операторами с правильной сингулярной структурой. Пользуясь формулами (3.I) и (3.2) легко проверить корректность этого определения, т.е. выполнение условия (2.5). Формулы (3.4) задают ядро U_β с точностью до слагаемых вида

$$\mathcal{J}_{\gamma\beta}(x_{\overline{\gamma}}, x'_{\overline{\beta}})(E_{\varrho\gamma} - E'_{\varrho\beta} - i0)^{-1} .$$

Мы хотим подобрать гладкие быстро убывающие функции $\mathcal{J}_{\gamma\beta}$ такими, чтобы оператор U стал унитарным. Коэффициенты оператора U_β при $E_{\varrho\gamma} - E_{\varrho\beta} - i0$ будем обозначать через $S^{\varrho}_{\gamma\beta}$ и операторную матрицу, составленную из них, - S^{ϱ} . Хотя S^{ϱ} на самом деле не является оператором рассеяния для H , он строится по U также, как оператор рассеяния строится по W^-. Предположим, что функции $\mathcal{J}_{\gamma\beta}$ выбраны так, что оператор S^{ϱ} унитарен. Возможность такого выбора мы докажем в следующем параграфе. Сделанное предположение означает, что функции $\mathcal{J}_{\gamma\beta}$ фиксированы некоторым образом при $E_{\varrho\gamma} = E'_{\varrho\beta}$, причем эта фиксация неоднозначна, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

Займемся теперь унитарностью оператора U. Пользуясь теоремой 2.I, найдем коэффициенты оператора $U^*_{\beta_1} U_{\beta_2}$. При $E_{\alpha\beta_1} - E'_{\tilde{\alpha}\beta_2} - i0$ коэффициент есть сумма выражений следующего вида:

$$S^{\alpha *}_{\gamma\beta_1} W^{\overline{\alpha-\gamma}*}_{\gamma} W^{\overline{\tilde{\alpha}-\tilde{\gamma}}}_{\tilde{\gamma}} S^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\gamma}\beta_2} \quad , \text{ где } \alpha-\gamma = \tilde{\alpha}-\tilde{\gamma} .$$

Из ортогональности волновых операторов для различных каналов следует, что $\gamma = \tilde{\gamma}$ (и соответствующие собственные значения совпадают) и $\alpha = \tilde{\alpha}$. Тогда из изометричности получаем сумму следующего вида

$$\sum_{\gamma} S^{\alpha *}_{\gamma\beta_1} S^{\alpha}_{\gamma\beta_2} = \sum_{\gamma} (S^{\alpha *})_{\beta_1\gamma} S^{\alpha}_{\gamma\beta_2} = I_{\mathcal{H}_{\beta_1}} \delta_{\beta_1\beta_2} .$$

При $\alpha \neq \varrho$ мы воспользовались унитарностью операторов рассеяния S^{α}, а при $\alpha = \varrho$ предположением. Проделаем аналогичное вычисление для оператора UU^*. Мы должны просуммировать следующие выражения

$$W^{\overline{\alpha_1-\gamma_1}}_{\gamma_1} S^{\alpha_1}_{\gamma_1\beta} (S^{\alpha *})_{\beta\gamma} W^{\overline{\alpha-\gamma}*} ,$$

при $\alpha = \alpha_1$ и фиксированном $E_{\alpha\gamma_1} - E'_{\alpha\gamma}$. Полученное выражение будет коэффициентом при $E_{\alpha\gamma_1} - E'_{\alpha\gamma} - i0$. Из унитарности операторов S^{α}, суммируя по β, получим $\gamma = \gamma_1$ (соответствующие собственные значения также совпадают), и сумма превратится в следующую

$$\sum_{\alpha,\gamma} W^{\overline{\alpha-\gamma}}_{\gamma} W^{\overline{\alpha-\gamma}*}_{\gamma} .$$

Это есть выражение для коэффициента при $E_{\eta} - E'_{\eta} - i0$, где $\eta = \alpha - \gamma$ иначе:

$$\sum_{\gamma} W_{\gamma}^{\bar\eta} W_{\gamma}^{\bar\eta *} = I_{\mathcal{H}} \ .$$

Из приведенных вычислений следует, что операторы $\overset{*}{U}U$ и UU^* отличаются на операторы с гладким быстро убывающим ядром от единичных операторов в $\hat{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{H}$ соответственно. В частности, это означает, что U - оператор Фредгольма. Возможность выбора гладкой части ядра U такой, что оператор U становится унитарным, зависит от того, равен ли нулю индекс оператора U. Напомним, что индекс фредгольмова оператора F определяется формулой:

$$ind\, F = dim\, Ker\, F - codim\, Im\, F$$

и для фредгольмовых операторов F_1 и F_2 имеет место $ind\, F_1F_2 = ind\, F_1 + ind\, F_2$. Индекс U не обязан быть нулем, тем не менее, переопределяя матрицу S^{Ω} (точнее функции $\mathcal{Y}_{\gamma\beta}$ от которых зависит S^{Ω}), этого можно добиться. Действительно, рассмотрим оператор $\tilde{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, заданный ядром $\delta(x-x') - \frac{1}{2\pi i} \mathcal{J}(x,x')(E_{\Omega} - E'_{\Omega} - i0)^{-1}$, где $\mathcal{J}$ - гладкая быстро убывающая функция. Потребуем также, чтобы операторы $\tilde{U}^*U$ и $\tilde{U}U^*$ отличались от единичного оператора на вполне непрерывный (т.е. унитарности оператора $\tilde{U}_{E_{\Omega}E_{\Omega}}$ в обозначениях предыдущего параграфа). Для любого целого числа существует оператор $\tilde{U}$ такого типа, имеющий индекс, равный этому числу. Выберем $\tilde{U}$ так, чтобы $ind\,\tilde{U} = -ind\, U$, тогда оператор $\tilde{U}U$ имеет индекс, равный нулю и те же коэффициенты, определяемые формулами (3.4), что и U. Сохраним за этим оператором обозначение U, отметим также, что U можно считать обратимым. Выражение $(UU^*)^{-\frac{1}{2}}U$ определяет унитарный оператор, отличающийся от U на оператор с гладким ядром, за которым мы снова сохраним обозначение U. Чтобы проверить, что U является таким оператором, существование которого утверждается в теореме 3.2, найдем разность

$$HU - U\hat{H}_0 \ . \qquad (3.5)$$

Заметим сначала, что для оператора H коэффициент при $E_{\sigma} - E'_{\sigma} \mp i0$ есть H^{σ}. Для коэффициентов оператора в (3.5) имеем следующие выражения:

$$H^{\sigma} W_{\gamma}^{\overline{\alpha - \gamma}} S_{\gamma\beta}^{\alpha} - W_{\gamma}^{\overline{\alpha-\gamma}} S_{\gamma\beta}^{\alpha} (\hat{H}_0)_{\beta} = 0 \ ; \qquad \sigma = \alpha \setminus \gamma \ .$$

Мы воспользовались сплетающим свойством (I.2) 3. и коммутативностью операторов $\hat{H}_0$ и S. Таким образом компоненты оператора

(3.5) задаются гладкими быстро убывающими ядрами, отсюда следует соотношение (3.3). Теорема доказана.

Теперь мы легко можем получить доказательство теоремы 3.I. При $n=1$ утверждение теоремы следует из работы 6. Волновой оператор при этом равен задан ядром $\delta(x-x')-t(x,x',x'+i0)(x-x'-i0)^{-1}; t\, x,x',z)$ ядро интегрального оператора $t(z)=V-V(h-z)^{-1}V$, и при наших предположениях на потенциал V, функция $t(x,x',x'+i0)$ – гладкая быстро убывающая. Пусть теорема верна для всех $k<n$, тогда по теореме 3.2 существует оператор U с правильной сингулярной структурой, коэффициенты которого задаются формулами (3.4) и такой, что

$$U^*HU=\hat{H}_0+\hat{V}.$$

Волновой оператор $\hat{W}^-$ для пары $\hat{H}_0+\hat{V}$, $\hat{H}_0$ может получен методом работы 6, причем его ядро имеет вид

$$\tilde{W}_{\beta_1\beta_2}\sim \delta_{\beta_1\beta_2}\delta(x_{\bar{\beta}_1}-x'_{\bar{\beta}_2})-(E_{\varrho\beta_1}-E'_{\varrho\beta_2}-i0)^{-1}\mathcal{I}_{\beta_1\beta_2}(x_{\bar{\beta}_1},x'_{\bar{\beta}_2}),$$

где ядра $\mathcal{I}_{\beta_1\beta_2}$ – гладкие быстро убывающие функции. Волновой оператор для пары H, $\hat{H}_0$ равен $U\hat{W}^-$ и его коэффициенты даются выражениями (3.I). Утверждение о собственных функциях очевидно, поскольку WW^*-I – проектор в $\mathcal{H}$ имеющий гладкое быстро убывающее ядро.

§ 4. В этом параграфе мы изучим поведение матрицы рассеяния оператора модели Фридрихса при больших "энергиях", а также восполним пробел в доказательстве теоремы 3.2.

Будем считать, что операторы S^α действуют в пространстве $\hat{\mathcal{H}}$, доопределяя $S^\alpha_{\beta\beta'}$ для β или β' не лежащих в α единицей при $\beta=\beta'$ и нулем в противном случае. При таком определении S^α остается унитарным оператором. Представим оператор S в виде произведения унитарных операторов следующим образом:

$$S=\tilde{S}\prod_{|\beta|=n-1}\tilde{S}^\beta\prod_{|\beta|=n-2}\tilde{S}^\beta\dots\prod_{|\beta|=1}\tilde{S}^\beta\,. \tag{4.I}$$

Произведения берутся в некотором фиксированном порядке. Потребуем, чтобы при замене всех $\tilde{S}^{\beta}$ таких, что $\beta\cap\alpha\neq\beta$, где α фиксировано, на тождественный оператор, произведение (4.I) равнялось бы S^{α}. Тем самым мы определим все операторы $\tilde{S}^{\beta}$.

ТЕОРЕМА 4.I. Операторы $(\tilde{S}-I)_{\gamma\gamma'}$ связаны

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема справедлива для всех $\tilde{S}^{\beta}$, т.е. $(\tilde{S}^{\rho}-I)_{\gamma\gamma'}$ несвязен только по $E_{\alpha}E_{\alpha}$ при $\alpha\cap\beta\neq\emptyset$. Введем оператор $\hat{S}$ равенством:

$$\hat{S}=\prod_{|\rho|=n-1}\tilde{S}^{\rho}\dots\prod_{|\beta|=1}\tilde{S}^{\beta} \tag{4.2}$$

и сравним несвязные части $\hat{S}$ и S. Из (3.I) следует, что $S_{\gamma\gamma'}$ несвязно только по $E_{\alpha}E_{\alpha}$ при $\gamma\gamma'\subset\bar{\alpha}$, и несвязная по $E_{\alpha}E_{\alpha}$ часть равна $S^{\bar{\alpha}}_{\gamma\gamma'}$. При отыскании несвязной по $E_{\alpha}E_{\alpha}$ части оператора $\hat{S}_{\gamma\gamma'}$, можно заменять в (4.2) единичным оператором все $\tilde{S}^{\beta}$ при $\beta\cap\alpha\neq\emptyset$. Тогда, по определению, произведение будет равно $S^{\bar{\alpha}}$ и несвязная часть – $S^{\bar{\alpha}}_{\gamma\gamma'}$. Таким образом, несвязные части S и $\hat{S}$ совпадают. Поскольку $\tilde{S}=S\hat{S}^{*}$ несвязная часть оператора $\tilde{S}_{\gamma\gamma'}$ есть $\delta_{\gamma\gamma'}I$. Теорема доказана.

Записывая (4.I) в терминах матриц рассеяния получим

СЛЕДСТВИЕ. При $|E|\to\infty$, $\|s(E)-\prod_{|\beta|=n-1}\tilde{s}^{\beta}(E)\dots\prod_{|\beta|=1}\tilde{s}^{\beta}(E)\|\to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве теоремы 4.I мы использовали только свойства несвязной части оператора рассеяния.

Вернемся к предположению, сделанному при доказательстве теоремы 3.2. Оператор S^{Ω} можно представить как оператор умножения на функцию $s^{\Omega}(E)$, поэтому унитарность S^{Ω} эквивалентна унитарности $s^{\Omega}(E)$ при всех E. Используя формулы (3.4), легко показать, что компоненты операторов $s^{\Omega}(E)s^{\Omega}(E)^{*}-I$ и $s^{\Omega}(E)^{*}s^{\Omega}(E)-I$ задаются гладкими быстро убывающими ядрами. Кроме того, из замечания к теореме 4.I следует, что при $|E|\to\infty$ оператор $s^{\Omega}(E)$ близок по норме к унитарному. Следовательно, $\mathrm{ind}\, s^{\Omega}(E)$ равен нулю при больших $|E|$ и, в силу непрерывности индекса, при всех E. Повторяя рассуждения, использованные в теореме 3.2, получим, что гладкую часть ядер компонент можно выбрать так, что $s^{\Omega}(E)$ будут унитарны.

Литература

I. Ф а д д е е в Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1963, 69, 121 стр.

2. Я к у б о в с к и й О.А. Об интегральных уравнениях теории рассеяния для n частиц. - Ядерная физика, 1967, 6, с.1312-1320.
3. Б е р е з и н Ф.А. Асимптотика собственных функций многочастичного уравнения Шредингера. - Докл.АН СССР, 1965, 163,4, с.795-798.
4. С и г а л И.М. Асимптотическая полнота систем многих частиц. - Докл.АН СССР, 1972, 204, 4, с.795-798.
5. Ф р и д р и х с К.О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М., Мир, 1969, 231 с.
6. Ф а д д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1964, 73, с.292-339.

Vakulenko A.F. Unitary regularization for n-particles scattering.

The n-body problem is studied in the framework of the Friedrichs model. The completness of wave operators in deduced from their singularity structure established a'priori. The behavior of the scattering matrix for large energy is described.

3 116