Б. Л. Голинский, Уточнение асимптотических формул Г. Сегё и С. Н. Бернштейна, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 11, 70–82

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 11 (78)

УДК 517.512

Б. Л. Голинский

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ Г. СЕГЁ И С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Введение

Пусть $P_n(z)=\varkappa_n z^n+\ldots$; $\varkappa_n(p)>0$, $n=0,\ 1,\ 2\ldots$, — многочлены, ортонормированные на единичной окружности относительно веса $p(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(e^{i\theta})\,\overline{P_m(e^{i\theta})}\,p(\theta)\,d\theta=\delta_{mn}, \tag{0.1}$$

где $p(\theta)$ — неотрицательная, суммируемая, 2π-периодическая функция. Обозначим

$$P_n^*(z)=z^n\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right),\quad a_n=-\frac{\overline{P_{n+1}(0)}}{\varkappa_{n+1}},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Числа $\{a_n\}_0^\infty$ называют параметрами ортогональной системы $\{P_n(z)\}_0^\infty$. При указанном условии $|a_n|<1$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Если

$$\int_0^{2\pi}\ln p(\theta)\,d\theta>-\infty, \tag{0.2}$$

то можно построить регулярную и отличную от нуля в области $|z|<1$ функцию Сегё ([1], с. 24—25):

$$D(z)=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln p(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\},\quad \pi(z)=D^{-1}(z).$$

При условии (0.2) имеем равномерно в круге $|z|\leqslant r<1$

$$\lim_{n\to\infty}P_n^*(z)=\pi(z), \tag{0.3}$$

$$\varkappa_n^{-2}(p)=c_0\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2),\quad \lim_{n\to\infty}\varkappa_n(p)=\varkappa(p)=\pi(0),$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\,d\theta. \tag{0.4}$$

Почти всюду в $[0,\ 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0}\pi(re^{i\varphi})=\pi(e^{i\varphi})=\frac{1}{\sqrt{p(\varphi)}}\exp\{i\gamma(\varphi)\}, \tag{0.5}$$

где

$$\gamma(\varphi)=\frac{1}{2}\tilde{g}(\varphi),\quad \tilde{g}(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta,\quad g(\theta)=\ln p(\theta). \qquad (0.6)$$

Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Соотношение (0.5) имеет место в точке непрерывности ($\theta=\theta_0$) функции $g(\theta)$, если в ней существует $\tilde{g}(\theta_0)$.

Многочленами второго рода ([2], § 5) называют многочлены вида

$$Q_n(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\left[P_n(e^{i\theta})-P_n(z)\right]p(\theta)\,d\theta=\lambda_n z^n+\ldots;\quad \lambda_n>0. \qquad (0.7)$$

Известно, что

$$b_n=-\frac{\overline{Q_{n+1}(0)}}{\lambda_{n+1}}=-a_n,\ \lambda_n=\varkappa_n;\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda=\varkappa \qquad (0.8)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_n(e^{i\theta})\,\overline{Q_m(e^{i\theta})}\,ds(\theta)=\delta_{mn}, \qquad (0.1')$$

где $s(\theta)$ — неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста.

При выполнении условия (0.2) имеем такое же условие для $q(\theta)=s'(\theta)$ ([3], с. 128). Функцию, аналогичную $\pi(z)$ для $q(\theta)$, обозначим через $\chi(z)$. Через $C[0, 2\pi]$ принято обозначать пространство 2π-периодических непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций с определением нормы $\|f\|=\max|f(x)|$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. Если $f(\theta)\in C[0, 2\pi]$ и $f(0)=f(2\pi)$, то будем это записывать так: $f(\theta)\in C_{2\pi}$. Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности, а через $E_n(f)$ — наилучшие приближения функции $f(\theta)$ с помощью тригонометрических сумм порядка $\leqslant n$.

В § 1 получены уточнения асимптотических формул Г. Сегё и С. Н. Бернштейна, в § 2 — соответствующие формулы для многочленов 2-го рода.

§ 1. Лемма 1. *Пусть*

$$0<p(\theta)\in C_{2\pi} \qquad (1.1)$$

и

$$\left|\frac{1}{p(\theta)}-T_\nu(\theta)\right|\leqslant \mu E_n\left(\frac{1}{p}\right),\quad n=k\nu-k_0, \qquad (1.2)$$

где μ — *постоянная* $\geqslant 1$; $T_\nu(\theta)$ — *тригонометрическая сумма порядка* $\leqslant\nu$; n, $k\geqslant 1$ — *целые числа*, k_0 — *целое число или нуль. Обозначим*

$$\Psi(\theta)=T_\nu^{-1}(\theta).$$

Тогда

$$0\leqslant\frac{\varkappa(p)}{\varkappa_n(\Psi)}-1\leqslant B_1E_n\left(\frac{1}{p}\right), \qquad (1.3)$$

$$0\leqslant\frac{\varkappa(p)}{\varkappa_n(p)}-1\leqslant B_2E_n\left(\frac{1}{p}\right), \qquad (1.4)$$

$$\left|\frac{\varkappa_n(p)}{\varkappa_n(\Psi)}-1\right|\leqslant B_3E_n\left(\frac{1}{p}\right), \qquad (1.5)$$

где B, B_1, B_2, B_3, ... — *положительные постоянные*[1].

[1] В дальнейшем C_1, C_2, ... ; одними и теми же буквами будем обозначать различные постоянные, если это не будет вызывать недоразумения.

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (1.1) *и*

$$\ln n E_n\left(\frac{1}{p}\right) = o(1). \tag{1.6}$$

Тогда

$$|P_n(e^{i\theta})| = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.7}$$

Для доказательства лемм 1 и 2 внесем небольшие изменения в рассуждения Г. Сегё ([4], с. 74—75).

Лемма 3. *Пусть* $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}, p\right) < \infty. \tag{1.8}$$

Тогда

$$\rho_n(\theta) = |P_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta})| \leqslant B_4 \int_0^{\eta} \frac{\omega(t, p)}{t}\, dt + B_5 \ln \frac{1}{\eta} E_n\left(\frac{1}{p}\right) + B_6 n\eta, \tag{1.9}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где η — *произвольно малая величина такая, что* $n\eta = o(1)$.

Доказательство. По неравенству для логарифмов соотношение (1.8) имеет место и для модуля непрерывности от $f(\theta)$ ($f(\theta) = \ln p(\theta)$), а так как $f(0) = f(2\pi)$, то по известной теореме ([5], с. 94) $\tilde{f}(\theta) \in C[0, 2\pi]$, поэтому и $\pi(e^{i\theta}) \in C[0, 2\pi]$. Для доказательства (1.9) достаточно изменить рассуждения Г. Сегё ([4], с. 42—43 и 74—76) и применить оценки (1.4) и (1.5).

Теорема 1. *Пусть* $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}, p\right) < \infty$.

Тогда равномерно относительно $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$.

Доказательство. Докажем, что при условиях теоремы $\ln nE_n\left(\frac{1}{p}\right) = o(1)$ $(n \to \infty)$. Действительно,

$$\varepsilon_k = \sum_{n=k}^{2^k} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}, p\right) \geqslant \omega(2^{-k}, p) \sum_{n=k}^{2^k} \frac{1}{n}.$$

Пусть $2^{\nu-1} \leqslant k < 2^{\nu} + 1$, ν — целое число $\geqslant 2$. Тогда

$$\sum_{n=k}^{2^k} \frac{1}{n} > \left(\frac{1}{2^{\nu}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\nu+1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu+2}}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) > \frac{1}{2}(k - \nu) > \frac{k}{4} \text{ и } \omega(2^{-k}, p) \leqslant \frac{4}{k}\varepsilon_k.$$

Но $\varepsilon_k = o(1)$, поэтому

$$\omega(\delta, p) \ln \frac{1}{\delta} = o(1), \tag{1.10}$$

а так как

$$\omega\left(\delta, \frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{m_0^2} \omega(\delta, p), \quad m_0 = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} p(\theta) > 0,$$

то, используя теорему Джексона, получим

$$E_n\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant B\omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{1.11}$$

Полагая теперь в неравенстве (1.9) $\eta = n^{-2}$, применяем (1.11) и переходим к пределу при $n \to \infty$.

Докажем, что из условия $\ln nE_n(h) = o(1)$, $h(\theta) \in C[0, 2\pi]$, вообще говоря, не следует условие (1.8) с $p(\theta) = h(\theta)$. Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta, \quad \alpha_k = 1/\ln k \ln\ln k - 1/\ln(k+1)\ln\ln(k+1).$$

Легко показать, что $\alpha_k \leqslant 2/k \ln^2 k \ln\ln k$, поэтому ряд абсолютно сходится и представляет непрерывную на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $h(\theta)$. Так как $\alpha_k > 0$ $(k \geqslant 3)$, то по известной теореме Н. К. Бари ([6], теорема Н)

$$E_n(h) \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=2n}^{\infty} \alpha_k = 1/4 \ln 2n \ln\ln 2n,$$

и так как

$$\omega\left(\frac{1}{n}, h\right) \geqslant B_7 E_n(h),$$

то

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}, h\right) \geqslant B_8 \sum_{n=3}^{\infty} 1/n \ln n \ln\ln n = \infty.$$

Но

$$E_n(h) \leqslant \| h - S_n(h) \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = 1/\ln(n+1)\ln\ln(n+1),$$

где $S_n(h)$ — отрезок ряда Фурье функции $h(\theta)$. Значит, $E_n(h)\ln n = o(1)$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}, h\right) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ *имеет* m $(\geqslant 0)$ *последовательных производных, а* $p^{(m)}(\theta)$ *имеет модуль непрерывности* $\omega(\delta, p^{(m)}(\theta))$. *При* $m = 0$ $\omega(\delta, p)$ *удовлетворяет условию* (1.8).

Тогда

$$\rho_n(\theta) \leqslant \begin{cases} B_9 \dfrac{\ln n}{n^m}\,\omega\left(\dfrac{1}{n}, p^{(m)}(\theta)\right), \quad m \geqslant 1, & (1.12) \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, & \\ B_{10}\displaystyle\int_0^{n^{-2}} \frac{\omega(t, p)}{t}\,dt + B_{11}\ln n\,\omega\left(\frac{1}{n}, p\right), \quad m = 0. & (1.13) \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m \geqslant 1$. Положим в (1.9) $\eta = n^{-(m+1)}$. Тогда, в силу того, что $\omega(\delta, p) = O(\delta)$, первое слагаемое в (1.9) будет порядка $O\{n^{-(m+1)}\}$. Третье слагаемое — порядка $O\{n^{-m}\}$, а второе — порядка $\ln nE_n\left(\frac{1}{p}\right)$. Покажем, что

$$\ln n\, E_n\left(\frac{1}{p}\right) = O\left\{\frac{\ln n}{n^m}\,\omega\left(\frac{1}{n}, p^{(m)}(\theta)\right)\right\}, \tag{1.14}$$

тем самым будет доказана формула (1.12). По теореме Джексона для $f^{(m)}(\theta)\in C[0,\ 2\pi]$ будет

$$E_n(f)\leqslant\frac{B_{12}}{n^m}\,\omega\left(\frac{1}{n},\ f^{(m)}(\theta)\right)\quad(m\geqslant 0).\tag{1.15}$$

Пусть $f(\theta)=\frac{1}{p(\theta)}$. Покажем, что $\omega\left(\frac{1}{n},\ f^{(m)}(\theta)\right)\leqslant B_{13}\,\omega\left(\frac{1}{n},\ p^{(m)}(\theta)\right)$. Действительно, $p(\theta)f(\theta)=1$, и, значит, $p(\theta+h)\,\Delta f+f(\theta)\,\Delta p=0$, $\Delta f=f(\theta+h)-f(\theta)$, $\Delta p=p(\theta+h)-p(\theta)$. Поэтому

$$\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\{p^{(\nu)}(\theta+h)\,\Delta f^{(m-\nu)}(\theta)+f^{(m-\nu)}(\theta)\,\Delta p^{(\nu)}(\theta)\}=0.\tag{1.16}$$

Так как

$|\Delta f|\leqslant\frac{1}{m_0^2}|\Delta p|$, то $\omega(\delta,\ f)\leqslant B_{13}\omega(\delta,\ p)$, $B_{13}=\frac{1}{m_0^2}$. Применяя метод

математической индукции, получим на основании тождества (1.16), что $\omega(\delta,\ f^{(m)}(\theta))\leqslant B_{13}\omega(\delta,\ p^{(m)}(\theta))$. Оценка (1.14), а тем самым и оценка (1.12) доказаны. Оценка (1.13) получается, если в (1.9) положить $\eta=n^{-2}$ и применить теорему Джексона для $m=0$. Полагая $\omega(\delta,\ p)=O\left\{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-(1+\varepsilon)}\right\}$, $\varepsilon>0$, получим $\rho_n(\theta)=O\{(\ln n)^{-\varepsilon}\}$. Эта оценка была впервые получена Г. Сегё и С. Н. Бернштейном ([7], с. 305). Оценка (1.12) при $\omega(\delta,\ p^{(m)}(\theta))=O(\delta^{\alpha})$, $0<\alpha<1$, доказана другим методом П. К. Суетиным [8].

Теорема 3. *Пусть вес $0<p(\theta)$ — аналитическая функция на отрезке* $[0,\ 2\pi]$ *и* $p(0)=p(2\pi)$.

Тогда

$$\rho_n(\theta)=O(q^n),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0<q<1.\tag{1.17}$$

Оценку (1.17) в классе аналитических весов улучшить нельзя (в смысле порядка).

Доказательство. Применим известный метод ([8], с. 59—61):

$$\min_{\{G_n\}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G_n(e^{i\theta})|^2\,p(\theta)\,d\theta=\frac{\lambda_0^2}{K_n(0,\ 0)},\tag{1.18}$$

где $G_n(z)$ — многочлен n-й степени, удовлетворяющий условию

$$G_n(0)=\lambda_0,\ \text{а}\ K_n(z,\ \zeta)=\sum_{k=0}^{n}P_k(z)\,\overline{P_k(\zeta)}.$$

Минимум достигается для многочлена

$$G_{0,\,n}(z)=\lambda_0\frac{K_n(z,\ 0)}{K_n(0,\ 0)}.\tag{1.19}$$

Рассмотрим тождество

$$|\pi(z)-G_{0,\,n}(z)|^2=|G_{0,\,n}(z)|^2-|\pi(z)|^2+\overline{\pi(z)}\,[\pi(z)-G_{0,\,n}(z)]+$$
$$+\pi(z)\,[\overline{\pi(z)}-\overline{G_{0,\,n}(z)}].\tag{1.20}$$

Умножая обе его части на $p(\theta)$, полагая $z = e^{i\theta}$ и исходя из равенства $p(\theta) = |\pi(e^{i\theta})|^{-2}$, получим после интегрирования

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\pi(e^{i\theta}) - G_{0,n}(e^{i\theta})|^2 p(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_{0,n}(e^{i\theta})|^2 p(\theta)\,d\theta - 1 +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\overline{\pi(e^{i\theta})}\,[\pi(e^{i\theta}) - G_{0,n}(e^{i\theta})]\,d\theta. \tag{1.21}$$

Положим в (1.19) $\lambda_0 = \varkappa = \pi(0)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{G_{0,n}(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{G_{0,n}(\zeta)}{\pi(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{G_{0,n}(0)}{\pi(0)} = 1. \tag{1.22}$$

Теперь тождество (1.21) представится так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\,|\pi(e^{i\theta}) - G_{0,n}(e^{i\theta})|^2\,d\theta + 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G_{0,n}(e^{i\theta})|^2 p(\theta)\,d\theta. \tag{1.23}$$

Отсюда следует, что многочлен $G_{0,n}(z)$ доставляет минимум не только интегралу в (1.18), но и интегралу в левой части (1.23). Для оценки его воспользуемся теоремой о наилучшем равномерном приближении аналитической функции. Функция $\pi(z)$ при условии теоремы 3 будет аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ ([8], лемма 1.4 и [9], с. 199), поэтому найдется многочлен $T_n(z)$ такой, что ([10], с. 23) $|\pi(z) - T_n(z)| \leqslant C_1 q^n$, $|z| \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < q < 1$. Можно считать, что многочлен $T_n(z)$ нормирован условием $T_n(0) = \varkappa$ (в противном случае рассматриваем многочлен $T_n(z) - T_n(0) + \varkappa$). Итак,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\,|\pi(e^{i\theta}) - G_{0,n}(e^{i\theta})|^2\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\pi(e^{i\theta}) - T_n(e^{i\theta})|^2 p(\theta)\,d\theta \leqslant C_2 q^{2n}. \tag{1.24}$$

Применяя тождества (1.23), (1.18) и оценку (1.24), найдем $\varkappa^2 K_n^{-1}(0, 0) = 1 + O(q^{2n})$, или $K_n(0, 0) = \varkappa^2\{1 + O(q^{2n})\}$. Вычитая из этого равенства аналогичное для номера $n-1$, получим

$$|P_n(0)| = O(q^n). \tag{1.25}$$

Но ([1], с. 84 и 32)

$$\rho_n(\theta) \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}|\varkappa_n P_n^*(e^{i\theta}) - \varkappa\pi(e^{i\theta})| + \left(\frac{\varkappa}{\varkappa_n} - 1\right)|\pi(e^{i\theta})|, \tag{1.26}$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_n} - 1 \leqslant \frac{\varkappa - \varkappa_n}{\varkappa_0} \leqslant \frac{1}{\varkappa_0(\varkappa_0 + \varkappa)}\sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(0)|^2. \tag{1.27}$$

При равномерной ограниченности системы многочленов $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ (что в нашем случае обеспечено, так как $\omega(\delta, p) = O(\delta)$ (см. лемму 2), имеем также ([1], с. 46)

$$|\varkappa\pi(e^{i\theta}) - \varkappa_n P_n^*(e^{i\theta})| \leqslant C_3 \sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(0)|. \tag{1.28}$$

Объединяя (1.25)—(1.28), получим оценку (1.17). Оценка (1.17) для многочленов, ортогональных на замкнутом аналитическом контуре, была впервые получена Г. Сегё ([7], с. 378) и П. П. Коровкиным [11] другим методом.

Покажем неулучшаемость этой оценки в классе аналитических весов. Рассмотрим вес $p(\theta)=1-\frac{2}{a}\cos\theta+\frac{1}{a^2}=\left(1-\frac{1}{a}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$, $\operatorname{Im} a=0$, $|a|<1$. Это положительная аналитическая функция на $[0, 2\pi]$. Выражения для соответствующих ортонормированных многочленов можно получить, применяя формулу (1.20) из [12]:

$$P_n^*(z)=\frac{1-a^2}{\sqrt{(1-a^{2n+2})(1-a^{2n+4})}}\left\{\frac{1-a^{n+2}z^{n+2}}{1-az}-\frac{1-a^{2n+4}}{1-a^2}\right\}\frac{1}{z-a}.$$

Положим $z=1$. Тогда $P_n^*(1)=\frac{a}{1-a}\,\frac{1+a^{n+1}(1-a^2)}{\sqrt{(1-a^{2n+2})(1-a^{2n+4})}}$. По (1.17) $\pi(1)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n^*(1)=\frac{a}{1-a}$. Легко показать, что

$$C_1a^n\leqslant\frac{1+a^{n+1}(1+a^2)}{\sqrt{(1-a^{2n+2})(1-a^{2n+4})}}-1\leqslant C_2a^n$$

и поэтому $\rho_n(1)=|P_n^*(1)-\pi(1)|$ имеет точный порядок a^n. Теорема доказана.

§ 2. Лемма 3. *Пусть*

$$\frac{1}{p(\theta)}\in L_\alpha(0,\ 2\pi)\,^{1)} \tag{2.1}$$

для какого-нибудь $\alpha\in(1,\ \infty)$.

Тогда функция $s(\theta)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[0, 2\pi]$: $s(\theta)\in AC[0, 2\pi]$, *и почти всюду на* $[0, 2\pi]$

$$q(\theta)=s'(\theta)=C_0^2\,\frac{p(\theta)}{p^2(\theta)+\tilde{p}^2(\theta)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим функции Каратеодори:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,p(\theta)\,d\theta,\quad G(z)=\frac{1}{2\pi d_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,ds(\theta),$$

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ds(\theta).$$

Известно, что для $|z|<1$

$$\frac{c_0}{2}F(z)=\frac{c_0}{2}+c_1z+\dots;\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ik\theta}p(\theta)\,d\theta;$$

$$\frac{d_0}{2}G(z)=\frac{d_0}{2}+d_1z+\dots;\quad d_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\,ds(\theta). \tag{2.3}$$

---

1) Если $f(\theta)\in L_\alpha(0,\ 2\pi)$, то, как принято обозначать,

$$\|f\|_\alpha=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^\alpha\,dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}<\infty.$$

и ([2], § 7)

$$d_0 = c_0,\ d_1 = -c_1,\ d_n = -c_n - \frac{2}{c_0}\sum_{i=1}^{n-1} c_i d_{n-i},\quad n = 2, 3, \ldots \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$-\frac{2}{c_0}\left[\frac{c_0}{2}F(z) - \frac{c_0}{2}\right]\left[\frac{c_0}{2}G(z) - \frac{c_0}{2}\right] = \frac{c_0}{2}[F(z) + G(z)] - c_0, \tag{2.5}$$

т. е. $F(z)\,G(z) = 1$. По теореме Привалова — Сохоцкого для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ будет:

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta}) = \frac{1}{c_0}\left\{p(\theta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} p(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{c_0}\{p(\theta) - i\tilde{p}(\theta)\}, \tag{2.6$_1$}$$

$$G(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} G(re^{i\theta}) = \frac{1}{c_0}\left\{q(\theta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,ds(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{c_0}\{q(\theta) - i\tilde{q}_s(\theta)\}, \tag{2.6$_2$}$$

где $\tilde{q}_s(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,ds(t)$. В силу (2.5) имеем $[-i\tilde{p}(\theta) + p(\theta)] \times [q(\theta) + i\tilde{q}_s(\theta)] = c_0^2$, т. е. $-\tilde{p}(\theta)\,\tilde{q}_s(\theta) + p(\theta)\,q(\theta) = c_0^2$, $\tilde{p}(\theta)\,q(\theta) + p(\theta)\,\tilde{q}_s(\theta) = 0$, откуда следует (2.2).

Докажем, что $s(\theta) \in AC[0, 2\pi]$. В силу (2.5)

$$\operatorname{Re} G(z) \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re} F(z)} = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r,\ t-\theta)\,p(t)\,dt\right\}^{-1}, \tag{2.7}$$

где $\mathrm{P}(r,\ t-\theta)$ — ядро Пуассона. Обозначим $\operatorname{Re} G(re^{i\theta}) = q(r, \theta)$. Так как

$$1 = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r,\ t-\theta)\,p(t)\,dt\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r,\ t-\theta)\,p(t)\,dt\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r,\ t-\theta)\frac{dt}{p(t)}, \tag{2.8}$$

то, объединяя (2.7) и (2.8), находим

$$0 \leqslant q(r,\ \theta) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{P}(r,\ t)}{p(t+\theta)}\,dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим $\|q(r)\|_\alpha \leqslant \left\|\frac{1}{p}\right\|_\alpha$. В силу (2.6$_2$) и (2.2) почти всюду в $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} q(r,\ \theta) = \frac{1}{c_0}\,q(\theta) \leqslant \frac{c_0}{p(\theta)}.$$

По теореме Ф. Рисса ([13], с. 117) $q(r, \theta) \in L_\alpha(0, 2\pi)$ и слабо сходится к $\frac{1}{c_0} q(\theta) \in L_\alpha(0, 2\pi)$:

$$\lim_{r \to 1-0} \int_0^\theta q(r, t)\, dt = \frac{1}{c_0} \int_0^\theta q(t)\, dt, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

По формуле Перрона — Стильтьеса

$$\frac{s(\theta+0)+s(\theta-0)}{2} = \text{const} + \lim_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} q(r, t)\, dt = \text{const} + \frac{1}{c_0} \int_0^\theta q(t)\, dt.$$

Так как правая часть — абсолютно непрерывная функция, то $ds(\theta) = \frac{1}{c_0} q(\theta)\, d\theta$. Лемма полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть вес* $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \ln \frac{1}{t} \in L_1(0, \pi). \tag{2.9}$$

Тогда для $\theta \in [0, 2\pi]$ *имеем*

$$r_n(\theta) = |Q_n^*(e^{i\theta}) - \chi(e^{i\theta})| \leqslant C_1 \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{\omega(t, p)}{t} \ln \frac{1}{t}\, dt + C_2 \ln^2 n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, p\right). \tag{2.10}$$

Если вместо условия (2.9) *имеем*

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t, p)}{t}\, dt = O\{\omega(\delta, p)\} \tag{2.11}$$

и

$$\delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t, p)}{t^2}\, dt = O\{\omega(\delta, p)\}, \tag{2.12}$$

то

$$r_n(\theta) \leqslant C_3 \ln n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, p\right). \tag{2.13}$$

Доказательство. При $p(\theta) \geqslant m_0 > 0$ (по лемме 4) следует, что $s(\theta) \in AC[0, 2\pi]$. При $p(\theta) \in C_{2\pi}$ и условии, менее ограничительном, чем условие (2.9) $\left(\text{без множителя } \ln \frac{1}{t}\right)$ имеем ([5], с. 94) $\tilde{p}(\theta) \in C[0, 2\pi]$. Из формулы (2.2) следует, что $q(\theta)$ эквивалентна $q_0(\theta)$ и

$$0 < m_1 \leqslant q_0(\theta) \in C[0, 2\pi]^{1)}. \tag{2.14}$$

Так как ортонормированные многочлены для всех эквивалентных между собой весов совпадают, то будем считать, что условию (2.14) удовлетворяет функция $q(\theta)$. По той же формуле (2.2) получаем

$$|q(\theta+h) - q(\theta)| \leqslant \frac{c_0^2}{m_0^2} p^2(\theta) |p(\theta+h) - p(\theta)| +$$
$$+ p^2(\theta+h) |p^2(\theta) - p^2(\theta+h)| + |\tilde{p}^2(\theta)| |p(\theta+h) - p(\theta)| +$$
$$+ p(\theta) |\tilde{p}^2(\theta) - \tilde{p}^2(\theta+h)|. \tag{2.15}$$

---

[1] То есть $q(\theta)$ почти всюду совпадает с $q_0(\theta)$.

Так что

$$\omega(\delta,\ q) \leqslant B_1\omega(\delta,\ p) + B_2\omega(\delta,\ \tilde{p}). \qquad (2.16)$$

В силу теоремы А. Зигмунда ([5], с. 199)

$$\omega(\delta,\ \tilde{f}) \leqslant C_1 \int_0^\delta \frac{\omega(t,\ f)}{t}\,dt + C_2\delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t,\ f)}{t^2}\,dt, \qquad (2.17)$$

откуда следует, что

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t,\ \tilde{f})}{t}\,dt \leqslant C_3 \int_0^\delta \frac{\omega(t,\ f)}{t} \ln\frac{1}{t}\,dt. \qquad (2.18)$$

Учитывая, что $\frac{\omega(t,\ f)}{t} \leqslant 2\frac{\omega(\delta,\ f)}{\delta}$ $(t > \delta)$, имеем в силу (2.16) и (2.17)

$$\omega(\delta,\ q) \leqslant C_4\omega(\delta,\ p)\ln\frac{1}{\delta} + C_5 \int_0^\delta \frac{\omega(t,\ p)}{t}\,dt. \qquad (2.19)$$

Применяя теорему 2, получим с учетом оценок (2.16), (2.18) и (2.19) оценку (2.10). При условиях (2.11) и (2.12) имеем в силу (2.16) и (2.17), что

$$\omega(\delta,\ q) = O\{\omega(\delta,\ p)\} \text{ и } \int_0^\delta \frac{\omega(t,\ q)}{t}\,dt = O\{\omega(\delta,\ q)\}.$$

Применяя теорему 2 к весу $q(\theta)$, придем к оценке (2.13).

Следствие. Пусть $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ и

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n},\ p\right) < \infty. \qquad (2.9')$$

Тогда равномерно относительно $\theta \in [0,\ 2\pi]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^*(e^{i\theta}) = \chi(e^{i\theta}).$$

Доказательство следует из теоремы 1, формул (2.16) и (2.18). Однако его можно получить из асимптотической формулы (2.10) с привлечением следующей леммы для числовых рядов.

Лемма 4. *Пусть* $\lambda(x) \geqslant 0$ *и*

(a) $$\sum_{k=k_0}^{n} \frac{\lambda(k)}{k} \geqslant \mu(n) \to \infty \textit{ при } n \to \infty,$$

(б) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} u_k < \infty, \quad 0 < u_k \downarrow 0.$$

Тогда $\mu(n)\,u_n = o(1)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. В силу условия (б), можно найти такие m и $n \geqslant n_1$, что

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda(k)}{k} u_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу условия (a) можно при заданном m найти $n > n_2$ так, чтобы

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda(k)}{k} > \frac{1}{2} \mu(n).$$

Пусть $n \geqslant \max\{n_1, n_2\} = N$. Тогда

$$\sum_{k=m}^{N} \frac{\lambda(k)}{k} u_k > u_N \sum_{k=m}^{N} \frac{\lambda(k)}{k}.$$

Итак, $\varepsilon > u_N \mu(N)$, т. е. $\mu(N) u(N) = o(1)$ при $N \to \infty$. При $\lambda(k)=1$, $u_k = \omega\left(\frac{1}{k}, p\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \ln n = \mu(n),$$

при условии (1.8) будет $\omega\left(\frac{1}{n}, p\right) \ln n = o(1)$ при $n \to \infty$. Так как $\frac{1}{n+1} \leqslant \delta < \frac{1}{n}$, то $\omega(\delta, p) \ln \frac{1}{\delta} = o(1)$. Если $\lambda(k) = \ln k$, $k = 3, 4, \ldots$, то $\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2 3}{2} > \frac{1}{4} \ln^2(n+1) = \mu(n)$, $n>8$, и поэтому при условии (2.9′) или ему эквивалентном $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \omega\left(\frac{1}{n}, p\right) < \infty$, имеем $\omega\left(\frac{1}{n}, p\right) \ln^2 n = o(1)$, или $\omega(\delta, p) \ln^2 \frac{1}{\delta} = o(1)$.

Теорема 5. *Пусть вес* $0 < p(\theta) \in C_{2\pi}$ *имеет* m $(\geqslant 1)$ *последовательных производных и*

$$\ln^2 \frac{1}{\delta} \omega(\delta, p^{(m)}(\theta)) = o(1), \quad \frac{\omega(t, p^{(m)}(\theta))}{t} \in L_1(0, \pi). \tag{2.20}$$

Тогда

$$r_n(\theta) \leqslant \frac{\ln n}{n^m} \left\{ C_1 \ln n \omega\left(\frac{1}{n}, p^{(m)}(\theta)\right) + C_2 \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(t, p^{(m)}(\theta))}{t} dt \right\}, \tag{2.21}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Доказательство. По лемме 4 $s(\theta) \in AC[0, 2\pi]$ и $q(\theta) \in C[0, 2\pi]$. Так как $\omega(\delta, p) = O(\delta)$, то по (2.19) имеем $\omega(\delta, q) = O\left\{\delta \ln \frac{1}{\delta}\right\}$. Применим лемму 3 к весу $q(\theta)$ и положим в (1.9) $\eta = n^{-(m+1)}$. Тогда

$$r_n(\theta) \leqslant \frac{B_1 \ln n}{n^m} + B_2 \ln n \cdot E_n\left(\frac{1}{q}\right). \tag{2.22}$$

Из теоремы Джексона вытекает

$$E_n\left(\frac{1}{q}\right) \leqslant \frac{B}{n^m} \omega\left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{q}\right)^{(m)}\right). \tag{2.23}$$

В силу (2.2) будем иметь

$$\frac{1}{c_0^2}\Delta\left(\frac{1}{q}\right)=\Delta f\cdot p_1(\theta+h)+f(\theta)\Delta p_1+\Delta p,\quad p_1(\theta)=\tilde{p}^2(\theta),\quad f(\theta)=\frac{1}{p(\theta)}$$

и

$$\frac{1}{c_0^2}\left[\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]^{(m)}=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\{\Delta f^{(m-\nu)}(\theta)p_1^{(\nu)}(\theta+h)+f^{(m-\nu)}(\theta)\Delta p_1^{(\nu)}(\theta)\}+ \tag{2.24}$$
$$+\Delta p^{(m)}(\theta).$$

Применяя тождество (2.24), легко доказать, что

$$\frac{1}{c_0^2}\omega\left(\delta,\left(\frac{1}{q}\right)^{(m)}\right)\leqslant C_{0,m}\omega(\delta,p^{(m)}(\theta))+C_{1;m}\omega(\delta,\tilde{p}(\theta))+$$
$$+C_{2,m}\omega(\delta,\tilde{p}'(\theta))+\ldots+C_{m+1,m}\omega(\delta,\tilde{p}^{(m)}(\theta)), \tag{2.25}$$

где $C_{i,m}$ $(i=0,\ldots,m+1)$ — положительные постоянные. Применяя (2.17) к $\tilde{p}^{(\nu)}(\theta)$, получим для $1\leqslant\nu\leqslant m-1$

$$\omega(\delta,\tilde{p}^{(\nu)}(\theta))=O\left\{\delta\ln\frac{1}{\delta}\right\} \tag{2.26$_1$}$$

и для $\nu=m$

$$\omega(\delta,\tilde{p}^{(m)}(\theta))\leqslant C_1\int_0^{\delta}\frac{\omega(t,p^{(m)}(\theta))}{t}\,dt+C_2\ln\frac{1}{\delta}\,\omega(\delta,p^{(m)}(\theta)). \tag{2.26$_2$}$$

Объединяя (2.22), (2.23), (2.25) и (2.26$_1$), (2.26$_2$), получим (2.21).

Теорема 6. *Пусть вес* $0<p(\theta)$ — *аналитическая функция на отрезке* $[0,2\pi]$ *и* $p(0)=p(2\pi)$.

Тогда

$$r_n(\theta)=O(q^n),\quad 0<q<1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi. \tag{2.27}$$

Доказательство. Имеем ([1], с. 84, 31)

$$r_n(\theta)=\frac{1}{\lambda_n}|\lambda_nQ_n^*(e^{i\theta})-\lambda\chi(e^{i\theta})|+\left|\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}-1\right)\chi(e^{i\theta})\right|;$$
$$\frac{\lambda}{\lambda_n}-1\leqslant\frac{1}{\lambda_0(\lambda_0+\lambda)}\sum_{k=n+1}^{\infty}|Q_k(0)|^2$$

и ([1], с. 46)

$$|\lambda\chi(e^{i\theta})-\lambda_nQ_n^*(e^{i\theta})|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k|Q_k(0)|,\quad M_k=\max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}|Q_k(e^{i\theta})|. \tag{2.28}$$

Функция $s(\theta)\in AC[0,2\pi]$, и вес $0<q(\theta)\in C_{2\pi}$ (см. лемму 3). Применяя неравенство (2.15) и теорему М. Рисса, получим $\omega_2(\delta,q)\leqslant B\omega_2(\delta,p)$[1]. Но $\omega_2(\delta,p)\leqslant\omega(\delta,p)=O(\delta)$, поэтому $\omega_2(\delta,q)=O(\delta)$, и $0<m_0\leqslant$ $\leqslant q(\theta)\leqslant B_0$. По известной теореме ([1], табл. II, случай VII) $M_k\leqslant B_1$ $(k=1,2,\ldots)$. Таким образом,

$$|\lambda\chi(e^{i\theta})-\lambda_nQ_n^*(e^{i\theta})|\leqslant B_1\sum_{k=n+1}^{\infty}|Q_k(0)|.$$

[1]) $\omega_\alpha(\delta,f)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|^\alpha\right\}^{\frac{1}{\alpha}}=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_\alpha,$

$f(x+2\pi)=f(x).$

Но $\lambda_n = \varkappa_n$, $|Q_n(0)| = |P_n(0)|$. Аналогично доказательству теоремы 3 придем к оценке (2.27). Теорема доказана.

Выражаю благодарность П. Л. Ульянову за ценные замечания, которыми я воспользовался при окончательной редакции настоящей статьи.

г. Харьков

Поступило
27 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Оценки, асимптотические формулы, ортогональные ряды. М., Физматгиз, 1958.
2. Геронимус Я. Л. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложение. Зап. Научно-исслед. ин-та матем. и механ. Харьковск. матем. о-ва. Сер. 4. Т. 19, 1948, с. 35—120.
3. Геронимус Я. Л. О некоторых свойствах обобщенных ортогональных полиномов. Матем. сб., т. 9 (51):1, 1941, с. 121—135.
4. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. М., ИИЛ, 1961.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М., „Мир", 1965.
6. Ульянов П. Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье. Матем. сб., т. 72 (114):2, 1967, с. 193—225.
7. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
8. Суетин П. К. Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру. УМН, т. XXI, вып. 2, 1966, с. 41—88.
9. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., ГОНТИ, 1950.
10. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М., „Наука", 1964.
11. Коровкин П. П. Асимптотическое выражение полиномов, ортогональных на спрямляемом контуре. ДАН СССР, т. 27, 1940, с. 521—524.
12. Голинский Б. Л. Аналог формулы Кристоффеля для многочленов, ортогональных на единичной окружности, и некоторые ее приложения. Изв. вузов, Матем., 1958, № 1, с. 33—42.
13. Банах С. С. Курс функціонального аналізу. Київ, „Радянська Школа", 1948.

В. С. РАБИНОВИЧ. МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ, СИМВОЛ КОТОРОГО ИМЕЕТ ОСОБЕННОСТИ ВИДА СЛОЖНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНО-ОДНОРОДНОГО КОНУСА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассмотрено уравнение типа свертки, символ которого либо имеет нули в бесконечно удаленной точке, либо растет на бесконечности как сложная степенная функция некоторого линейно-однородного конуса. С видом особенности связываются функциональные пространства, в которых оператор свертки становится оператором Нётера. Рассмотрен также случай, когда символ имеет нулевое многообразие в пространстве R^n. (Работа поступила в журнал „Математика" 28. II. 1968.)

В. И. РОМАНОВ. О ПРИВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматриваются вполне интегрируемая система $\dfrac{\partial X}{\partial u_j} = F_j(u_1, \ldots, u_m) X$ и уравнения $\dfrac{\partial X}{\partial u_1} + \ldots + \dfrac{\partial X}{\partial u_m} = F(u_1, \ldots, u_m) X$, $\dfrac{dX}{dt} = f(t) X$, где X — матрица, F_j и F — периодические по переменным u_j с периодами $\omega_j (j = 1, \ldots, m)$ матрицы, а $f(t)$ — квазипериодическая матрица. Доказывается, что вполне интегрируемая система приводима по Ляпунову. Отсюда, как следствия, находятся условия приводимости для указанных выше уравнений. (Работа поступила в журнал „Математика" 23. I. 1968.)