Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко, Теплообмен в плоской трубе при постоянной температуре стенки, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2005, часть 3, 221–224

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 1996. № 10. С. 13–24.
2. *Паймушин В.Н.* О некоторых численных методах в задачах механики оболочек сложной геометрии // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. Вып. 20. С. 10–18.
3. *Степанова Е.М. Петрушенко Ю.Я.* Алгебраический аналог задачи Пуассона на основе интегрирующих матриц, базирующихся на полиномах Лагранжа // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. Всерос. научн. конф-ции, Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 1. С. 212.
4. *Петрушенко Ю.Я.* Метод конечных сумм, базирующийся на полиномах Лагранжа, в задачах механики оболочек вращения // Изв.вузов. Авиационная техника, 1993. № 4. С. 70–74.

УДК 536.2

Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко

ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ

Получение аналитических решений задач теплообмена при течении жидкости в трубах и каналах представляет серьезные математические трудности. Точные аналитические решения указанных задач получены лишь для отдельных частных случаев, к тому же при весьма существенных допущениях. В связи с чем разработка приближенных аналитических методов решения таких задач имеет не только научную ценность, но и практическое значение, так как позволяет широко использовать результаты теоретических исследований для инженерных расчетов.

Математическая постановка задачи теплообмена в плоской трубе при граничных условиях первого рода имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \Theta(y,x)}{\partial y^2} = \left(1 - y^2\right)\frac{\partial \Theta(y,x)}{\partial x} \quad (x > 0; \quad 0 \le y < 1); \qquad (1)$$

$$\Theta(y,0) = 1; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta(0,x)}{\partial y} = 0; \qquad (3)$$

$$\Theta(1,x)=0\,, \tag{4}$$

где t – температура; η – координата, направленная вдоль течения потока; ξ – координата, направленная перпендикулярно течению потока; $h=2r_0$ – ширина плоской трубы; t_0 – температура на входе в трубу; t_c – температура стенки трубы; a – коэффициент температуропроводности жидкости; $\omega(\xi)=\frac{3}{2}\omega_{cp}\left(1-\frac{\xi^2}{r_0^2}\right)$; $y=\frac{\xi}{r_0}$; $\Theta=\frac{t-t_0}{t_c-t_0}$; $x=\frac{8}{3}\frac{1}{Pe}\frac{\eta}{h}$; $Pe=\frac{\omega_{cp}h}{a}$; ω_{cp} – средняя скорость течения жидкости.

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (1) – (4) разыскивается в виде [2, 3]

$$\Theta(y,x)=\varphi(x)\psi(y)\,. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), получим следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$d\varphi(x)/dx+\mu^2\,\varphi(x)=0\,; \tag{6}$$

$$d^2\psi(y)/dy^2+\mu^2\left(1-y^2\right)\psi(y)=0\,, \tag{7}$$

где μ^2 – некоторая постоянная.

Решение уравнения (6) известно и имеет вид

$$\varphi(x)=A\exp(-\mu^2x)\,, \tag{8}$$

где A – неизвестный коэффициент.

Уравнение Штурма-Лиувилля (7) представим в виде

$$\psi''(y)+\lambda\left(1-y^2\right)\psi(y)=0\,, \tag{9}$$

где $\lambda=\mu^2$.

Граничные условия для уравнения (8) согласно (3), (4) будут

$$\psi'(0)=0\,; \tag{10}$$

$$\psi(1)=0\,. \tag{11}$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина, решение задачи (9) – (11) разыскивается в виде

$$\psi_n(y)=\sum_{k=1}^{n}b_k\eta_k(y)\,, \tag{12}$$

где b_k – неизвестные коэффициенты; $\eta_k(y)$ - координатные функции, определяемые по формуле

$$\eta_k(y)=1-y^{2k}\quad(k=\overline{1,n})\,. \tag{13}$$

Соотношение (12) при использовании координатных функций вида (13) точно удовлетворяет граничным условиям (10), (11). Для нахождения неизвестных коэффициентов b_k $(k=\overline{1,n})$ составляется невязка уравнения (9) и требуется ортогональность невязки ко всем координатным функциям $\eta_k(y)$, т.е.

$$\int_0^1 \left[\left(\sum_{k=1}^{n} b_k \eta_k(y) \right)_x'' + \lambda\left(1-y^2\right) \sum_{k=1}^{n} b_k \eta_k(y) \right] \eta_j(y) dy = 0 \quad (j=\overline{1,n}). \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет систему однородных алгебраических линейных уравнений. Однородная система уравнений (14) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель, относительно λ получим алгебраический полином n-ной степени.

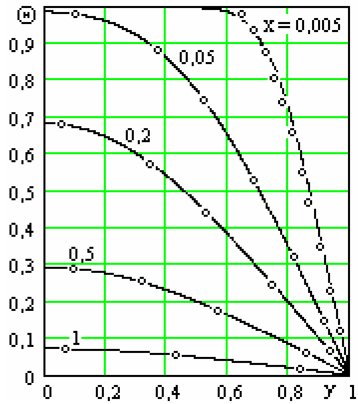
Допустим, что найденные из алгебраического полинома собственные числа расположены в порядке возрастания их абсолютных величин и образуют последовательность $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$.

Подставляя значения λ_k, $(k=\overline{1,n})$ в систему уравнений (14), получим ее нетривиальное решение.

Приближенное решение задачи (1) – (4) с учетом (8), (12), записывается в виде

$$\Theta_n(y,x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k x) . \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты A_k находятся из начального условия (2). Для этого составляется невязка уравнения (2) и требуется ортогональность невязки ко всем собственным функциям. Отсюда приходим к следующей системе алгебраических линейных уравнений:



Графики распределения относительной избыточной температуры:
—— – расчет по формуле (15) (6-е приближение);
○ – точное решение [1]

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k \cdot 0) - 1 \right] \psi_j(y) dy = 0 . \; (j=\overline{1,n}) \quad (16)$$

После нахождения A_k решение задачи (1) – (4) в замкнутом виде находится из (15).

На графиках рисунка представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (15) в шестом приближении в сравнении с точным решением [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2005, 430 с.
3. *Кудинов* В.*А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Аналитические методы теплопроводности. Самара: СамГТУ, 2004. 209 с.

УДК 517.9

А.Ю. Сысоев

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ В ГОРЮЧЕМ ГАЗЕ, СОДЕРЖАЩЕМ КАПЛИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА

Изучению задачи о тепловом взрыве в смеси, состоящей из воспламеняющегося газа и капель горючей жидкости, посвящено достаточно много публикаций. В последние годы предлагаются все более сложные модели этого явления, анализ которых в основном опирается на использование современных вычислительных средств. При этом последовательно учитываются тепло- и массоперенос и процессы горения в смеси газа и капель горючего. Однако такой подход не позволяет учитывать вклад каждого фактора в отдельности и не дает возможности понять относительное влияние каждого из этих процессов. Альтернативный подход основывается на аналитическом анализе дифференциальных уравнений в некоторых предельных случаях. Этот подход не может заменить численное исследование модели, но может эффективно дополнить его.

Настоящая работа посвящена теоретическому изучению явления теплового взрыва, возникающего в воспламеняющейся газовой смеси с добавлением летучих капель горючего. Рассматриваемая физическая модель представляет собой развитие модели, предложенной в работе [1]. Исследуемая математическая модель представляет собой сингулярно возмущенную систему четырех существенно нелинейных диф-