A. V. Lukshin, Difference analogues of the Boltzmann equation and equations of macroscopic dynamics, *Differ. Uravn.*, 1985, Volume 21, Number 7, 1202–1208

Особенно простые результаты получаем для $\chi(r)=1/r^2$, а $\varphi(\beta)$ — функции типа $\beta\exp(-\gamma\beta)$ или другие, допускающие интегрирование в замкнутом виде. Для $m=4$ получаем выражение из 14 экспонент.

Более громоздкие выражения получим для $\chi(r)=\exp(-\gamma r)/r^\alpha$, так как появляются однократные квадратуры *).

Авторы выражают благодарность акад. Самарскому А. А. за внимание к работе.

Литература

1. Козлов Н. И.— В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966, с. 80—86.

2. Власов А. А. Макроскопическая электродинамика.— М.: Физматгиз, 1955.— 228 с.

3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М.: Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с.

4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.— М.: Изд-во иностр. лит., 1949, ч. 1.— 798 с.

5. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 278 с.

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.—724 с.

7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.— 528 с.

8. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа.— М.; Л.: Гостехиздат, 1933—1934, ч. 2.—467 с.

9. Лебедев И. Н. Специальные функции и их приложения.— М.; Л.: Физматгиз, 1963.—358 с.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 1 февраля 1985 г.

УДК 517.9 : 532/534

Ан. В. ЛУКШИН

РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В настоящее время в ряде работ рассматриваются алгоритмы, в которых параметры течений газа вычисляются с помощью либо непосредственного использования кинетических моделей, либо полученных на их основе систем макроскопических уравнений [1—6]. В частности, исследования, проведенные в работах [2—4], привели к созданию простого и достаточно точного алгоритма расчета задач газовой динамики. Представляет интерес связь этих результатов, основанных на интуитивных кинетических моделях, непосредственно с уравнением Больцмана. Предлагаемый в данной работе подход к построению и анализу разностных схем газовой динамики и динамики разреженного газа, кроме обоснования известных результатов, например квазигидродинамической системы уравнений [2—4], позволяет расширить класс численных методов, опирающихся на использование кинетических алгоритмов.

1. Основной динамической характеристикой газа при кинетическом описании является функция распределения числа частиц $F(\xi, \mathbf{x}, t)$, имеющая смысл плотности распределения частиц по координатам $\mathbf{x}$ и скоростям ξ в момент времени t. С практической точки зрения, однако, наибольший интерес представляет «сокращенное» описание состояния газа с помощью конечного числа макроскопических переменных, удовлетворяющих замкнутым системам уравнений типа уравнений газовой динамики. Переход от кинетического к сокращенному макроскопическому

*) Практически реализован вариант с $\varphi(\beta)\equiv 1$ для такого $\chi(r)$.

описанию реализуется обычно при малых значениях безразмерной средней длины свободного пробега ε, т. е. при $\varepsilon \to 0$.

Дальнейшее сокращение макроскопического описания достигается посредством перехода к функциям дискретного аргумента со значениями на некоторой пространственно-временной сетке, характеризующейся (в общем случае векторным) малым параметром τ. Такой переход можно трактовать как переход к рассмотрению некоторой дискретной модели непрерывной среды, не адекватной ей и обладающей собственными дисперсионными и диссипативными свойствами [7, 8], учет которых на макроуровне равносилен учету в уравнениях газодинамики дополнительных членов с коэффициентами, стремящимися к нулю при $\tau \to 0$ (искусственные вязкость, поток массы, дисперсия и т. д.).

Переход к дискретной модели непрерывной среды на макроуровне означает, что такой переход имеет место и на микроуровне, т. е. на уровне функции распределения, которая в этом случае должна удовлетворять некоторому разностному аналогу уравнения Больцмана. (Его конкретный вид зависит от выбора разностных схем для макроскопических уравнений.) Это в свою очередь означает, что качество разностных схем на макроуровне можно характеризовать, вообще говоря, исследуя соответствующие аналоги кинетического уравнения и сравнивая их с уравнением Больцмана. Конечно, такой анализ должен быть основан на эффективном методе построения разностных аналогов уравнения Больцмана для заданных разностных схем, учитывающем, в частности, неоднозначность перехода от сокращенного макроскопического описания к кинетическому.

Возможен несколько иной подход, согласно которому среди всех τ-аппроксимаций исходного кинетического уравнения выбираются те, чьи свойства (поведение решения при больших t, его устойчивость и т. д.) в некотором смысле наилучшим образом согласованы со свойствами уравнения Больцмана. Соответствующие им системы макроскопических уравнений (в дифференциальной или разностной форме) естественно использовать для построения вычислительных алгоритмов газовой динамики и динамики разреженного газа. Изложению такого подхода и посвящена настоящая работа.

Отметим, что существенное отличие нашего метода от метода дифференциального приближения [9] состоит в том, что мы рассматриваем основанный на *предельном переходе* $\varepsilon \to 0$ *алгоритм построения макроскопических уравнений* из τ-аппроксимаций уравнения Больцмана.

2. В безразмерной форме уравнение Больцмана, которому удовлетворяет функция $F(\xi, \mathbf{x}, t)$, представимо в следующем виде [10, с. 263]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon} Q(F, F),$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3_x, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3_\xi, \tag{1}$$

по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. Оператор $Q(F, F)$, называемый интегралом столкновений, представляет собой билинейный оператор, действующий только по переменной ξ. Конкретный вид интеграла столкновений определяется законом межмолекулярного взаимодействия [10, с. 83]. Число Кнудсена ε, имеющее смысл безразмерной средней длины свободного пробега молекулы, будем считать малым параметром, который отвечает степени разреженности газа (при $\varepsilon \lesssim 10^{-3}$ справедливо описание сплошной среды; течения при $10^{-3} \lesssim \varepsilon \lesssim 0{,}1$—$0{,}3$ характеризуются обычно как течения разреженного газа в переходном режиме, т. е. при малых числах Кнудсена [11]).

Исследование разностных аналогов уравнения Больцмана давно привлекало внимание исследователей как с точки зрения организации вычислительных алгоритмов [12] (как правило, явных, что объясняется сложной структурой интеграла столкновений), так и с точки зрения доказательства соответствующих теорем существования и единственности [13]. Особое значение при этом имеет выбор аппроксимации потокового оператора $\xi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, что является, в частности, следствием его неограниченности в смысле нормы функционального пространства, связанного с переменной ξ.

Рассмотрим исходное уравнение (1) на некоторой пространственно-временной сетке $\omega_{\Delta x_1, \Delta t}$ (для простоты обратимся к одномерному случаю) с аппроксимацией оператора $\xi_1 \partial_{x_1}$ разностями, направленными «против потока»:

$$(F)_t + \xi_1 (F)_{\overset{0}{x_1}} - 0{,}5\Delta x_1 |\xi_1| (F)_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{\varepsilon} Q(F,\ F), \tag{2}$$

где $(F)_t = \dfrac{1}{\Delta t}(F_i^{j+1} - F_i^j)$, $(F)_{\overset{0}{x_1}} = \dfrac{1}{2\Delta x_1}(F_{i+1}^j - F_{i-1}^j)$, $(F)_{\bar{x}_1 x_1} = \dfrac{1}{(\Delta x_1)^2} \times$ $\times (F_{i+1}^j - 2F_i^j + F_{i-1}^j)$, $(x_{1,i},\ t_j) \in \omega_{\Delta x_1, \Delta t}$, $\xi \in \mathbf{R}_\xi^3$.

Нетрудно видеть, что обычное линейное условие устойчивости решения уравнения (2)

$$|\xi_1| \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \leqslant 1 \tag{3}$$

может быть выполнено для всех ξ_1 только при $\Delta t = 0$, т. е. при $(F)_t = \partial_t F$. Именно в такой форме уравнение (2) рассматривалось в работе [13], где доказано, что для достаточно широкого класса потенциалов, характеризующих межмолекулярное взаимодействие, задача Коши для уравнения (2) при $\Delta t = 0$ имеет единственное решение в целом, причем семейство решений при $\Delta x_1 \leqslant l_0$, $l_0 = \mathrm{const} > 0$, слабо компактно в смысле нормы пространства $L^1(\mathbf{R}_\xi^3)$ (неизвестно, правда, какое отношение соответствующая предельная функция при $\Delta x_1 \to 0$ имеет к самому уравнению Больцмана). Если же $\Delta t > 0$, то условие (3) будет выполнено лишь при $|\xi_1| \leqslant \Delta x_1/\Delta t$, а это означает, что мы фактически пренебрегаем значениями F_i^j при $|\xi_1| > \Delta x_1/\Delta t$. Тем не менее уравнение (2) при $\Delta t > 0$ часто используется для проведения практических расчетов (интеграл столкновений выбирается при этом либо в той или иной модельной форме, либо в виде, удобном для применения метода Монте-Карло [12], либо влияние столкновительных процессов учитывается специальной структурой функции распределения [1, 6]). Следовательно, представляет интерес и исследование вопроса о связи уравнения (2) с уравнениями макроскопической динамики.

Поставим в соответствие функции F ее гидродинамические параметры ρ, $\mathbf{u}$, T — макроскопические плотность, скорость и температуру:

$$\rho = \langle \chi_0, F \rangle,\quad u_j = \rho^{-1} \langle \chi_j, F \rangle,\quad 1 \leqslant j \leqslant 3,\quad T = \frac{2}{3}\rho^{-1} \left\langle \chi_4 - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \chi_0,\ F \right\rangle, \tag{4}$$

где функции $\chi_j(\xi)$, $0 \leqslant j \leqslant 4$, называемые сумматорными инвариантами [10, с. 89], имеют вид

$$\chi_0(\xi) = 1,\quad \chi_j(\xi) = \xi_j,\quad 1 \leqslant j \leqslant 3,\quad \chi_4(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2. \tag{5}$$

Заметим, что функции $\chi(\xi)$, принадлежащие линейной оболочке множества $\{\chi_j(\xi),\ 0 \leqslant j \leqslant 4\}$, суть единственные функции, удовлетворяющие условию

$$\langle \chi,\ Q(F,\ F) \rangle = 0 \tag{6}$$

для всех F, принадлежащих области определения оператора Q, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbf{R}_\xi^3)$.

Следуя классическим методам перехода от кинетического к гидродинамическому описанию [10, с. 269], запишем соответствующий уравнению (2) разностный аналог системы уравнений сохранения. Умножая (2) на сумматорные инварианты (5) и используя свойство (6), получим

$$(\rho)_t + (\rho u_1)_{\overset{0}{x_1}} - 0{,}5\Delta x_1 (\Pi_\rho)_{\bar{x}_1 x_1} = 0,$$

$$(\rho u_1)_t + (\Gamma_u)_{\overset{0}{x_1}} - 0{,}5\Delta x_1 (\Pi_u)_{\bar{x}_1 x_1} = 0, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{3}{2}\rho T + \rho\frac{u^2}{2}\right)_t + (\Gamma_E)_{\overset{0}{x_1}} - 0{,}5\Delta x_1 (\Pi_E)_{\bar{x}_1 x_1} = 0,$$

где $\Gamma_u = \langle \xi_1\chi_1(\xi), F\rangle$, $\Gamma_E = \langle \xi_1\chi_4(\xi), F\rangle$, $\Pi_\rho = \langle |\xi_1|\chi_0(\xi), F\rangle$, $\Pi_u = \langle |\xi_1|\chi_1(\xi), F\rangle$, $\Pi_E = \langle |\xi_1|\chi_4(\xi), F\rangle$.

Уравнения сохранения (7) справедливы всегда, однако замыкание этих уравнений, т. е. установление локальных связей между основными величинами ρ, u_1, T, с одной стороны, и потоками Γ_u, Γ_E и диффузионными членами Π_ρ, Π_u, Π_E, с другой стороны, возможно только при малых числах Кнудсена, т. е. при $\varepsilon\to 0$. К замыканию уравнений сохранения (7) можно прийти, вообще говоря, двумя путями. Первый из них основан на применении процедуры Чепмена—Энскога непосредственно к уравнению (2), второй же использует известные выражения для эйлерова и навье-стоксового приближений функции распределения, отвечающих уравнению (1). Мы остановимся на втором варианте, так как он существенно проще и приводит к менее громоздким выражениям. Полагая, например, в соответствии с нулевым (эйлеровым) приближением метода Чепмена—Энскога

$$F(\xi) = F_M(\xi) \equiv \rho\left(\frac{1}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp(-(\xi - \mathbf{u})^2/2T), \qquad (8)$$

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),\ T = T(\mathbf{x}, t),$$

в рассматриваемом одномерном случае придем к явной разностной схеме для уравнений газовой динамики, предложенной в работе [5].

Используя же навье-стоксовое представление (в случае зависимости от одной пространственной переменной)

$$F(\xi) = F_M(\xi)\left[1 - \frac{4}{3}c_1^2\frac{(\mu\varepsilon)}{\rho T}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{2}{3}\frac{(\mu\varepsilon)}{\rho T}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(c_2^2 + c_3^2) - \frac{4}{5}\frac{(\lambda\varepsilon)}{\sqrt{2T}\rho T}c_1\left(\mathbf{c}^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right], \qquad (9)$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = (\xi - \mathbf{u})/\sqrt{2T}$, $\mathbf{u} = (u_1, 0, 0)$, а $\lambda\varepsilon$ и $\mu\varepsilon$ — безразмерные коэффициенты теплопроводности и вязкости, получим обобщение указанной выше схемы на случай отличного от нуля числа Кнудсена ε. Так, в соответствии с (9) будем иметь следующую формулу для значений плотности на верхнем слое:

$$\hat{\rho} = \rho + \Delta t\left[-(\rho u_1)_{\overset{0}{x_1}} + 2\tilde{\Delta x}_1\left(\left(\frac{u_1}{|u_1|}\Phi\right)\rho u_1\right)_{\bar{x}_1 x_1} + \tilde{\Delta x}_1(\rho\sqrt{2T}\exp(-u_1^2/2T))_{\bar{x}_1 x_1} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{\Delta x}_1\varepsilon\left(\exp(-u_1^2/2T)\times\frac{\mu}{\sqrt{T}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{\sqrt{2}}{5}\tilde{\Delta x}_1\varepsilon\left(\exp(-u_1^2/2T)\frac{\lambda u_1}{T^{3/2}}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}_1 x_1}\right], \qquad (10)$$

где

$$\tilde{\Delta x}_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Delta x_1,\quad \Phi = \int_0^{|u_1|/\sqrt{2T}} \exp(-\eta^2)\,d\eta.$$

$\Big($Выражения вида $\left(a(x_1, t)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overset{0}{x_1}}$ и $\left(b(x_1, t)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}_1 x_1}$ в правой части (10) аппроксимируются на сетке так же, как и дифференциальные операторы $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a(x_1, t)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(b(x_1, t)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$. $\Big)$ Аналогичные формулы справедливы и для остальных гидродинамических параметров — импульса ρu_1 и полной энергии $E=(3/2)\rho T+\rho u_1^2/2$. Не представляет принципиальных трудностей также соответствующее обобщение на многомерный случай.

Отметим, что наши рассуждения останутся справедливыми, если уравнение (2) заменить неявным уравнением с разностной производной по времени $(F)_{\bar{t}}=(F_i^j-F_i^{j-1})/\Delta t$. Это приведет к неявной разностной схеме для макроскопических уравнений, которая требует значительных вычислительных затрат для получения решения на слое. Поэтому преимущественный интерес в смысле изложенного выше подхода имеют, по-видимому, именно явные схемы.

3. Рассмотрим уравнение, которому при $t>0$ удовлетворяет функция распределения $F(\xi, \mathbf{x}, t)$, в следующем виде:

$$(F)_t+\frac{1}{\tau}[F(\xi, \mathbf{x}, t)-F(\xi, \mathbf{x}-\tau\xi, t)]=\frac{1}{\varepsilon}Q(F, F), \tag{11}$$

$$\mathbf{x}\in\Omega\subseteq\mathbf{R}_x^3, \quad \xi\in\mathbf{R}_\xi^3,$$

где параметр τ характеризует шаг некоторой сетки. Производная $(F)_t$ может пониматься и в разностном смысле (в частности, $(F)_t=(F(t+\Delta t)-F(t))/\Delta t$ при $0\leqslant\Delta t/\tau\leqslant 1$). Параметры τ и ε условимся считать независимыми (вообще говоря, параметр τ можно рассматривать как безразмерное среднее время свободного пробега).

Потоковый член $\xi_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ аппроксимируется в уравнении (11) ограниченным (в смысле функционального пространства, связанного с переменной ξ) при каждом фиксированном τ оператором

$$A_\tau F=\frac{1}{\tau}[F(\xi, \mathbf{x}, t)-F(\xi, \mathbf{x}-\xi\tau, t)]. \tag{12}$$

Так как выбор оператора A_τ согласуется с эмпирическим выводом уравнения (1) и не зависит от конкретного вида сеточной аппроксимации, то уравнение (11) можно трактовать как один из наиболее общих разностных аналогов уравнения Больцмана, моделирующих особенности сеточного перехода в пределе $\tau\to 0$ на кинетическом уровне.

Система уравнений сохранения для уравнения (11) будет иметь вид

$$(\rho)_t+\tau^{-1}\rho=\tau^{-1}\mathbf{C}_\tau^{(0)},$$
$$(\rho u_j)_t+\tau^{-1}\rho u_j=\tau^{-1}\mathbf{C}_\tau^{(j)}, \quad 1\leqslant j\leqslant 3,$$
$$(E)_t+\tau^{-1}E=\tau^{-1}\mathbf{C}_\tau^{(4)}, \tag{13}$$

где макропараметры

$$\mathbf{C}_\tau^{(j)}\equiv\mathbf{C}_\tau^{(j)}(\mathbf{x}, t)=\int_{\mathbf{R}^3}F(\xi, \mathbf{x}-\tau\xi, t)\chi_j(\xi)\,d\xi, \quad 0\leqslant j\leqslant 4,$$

имеют достаточно простой физический смысл и характеризуют усредненную массу, импульс и энергию частиц газа, попадающих за время τ в точку $\mathbf{x}$ к моменту времени t. Это означает, что даже в пределе $\varepsilon\to 0$ величины $\mathbf{C}_\tau^{(j)}$ нельзя выразить, вообще говоря, только через локальные гидродинамические параметры ρ, $\mathbf{u}$, T. Для того чтобы замкнуть систему уравнений (13), необходимо, кроме того, учесть и предельный переход при $\tau \to 0$, что можно сделать, например, разлагая величины $\mathbf{C}_\tau^{(j)}$ в ряды по степеням τ.

Так, используя только члены первого порядка по τ и представляя функцию распределения в максвелловском виде (8) либо в виде (9), придем соответственно к классическим системам уравнений Эйлера и Навье—Стокса. Однако учет лишь линейных по τ членов не дает представления о макроскопических свойствах дискретной модели среды, принятой нами на кинетическом уровне: в линейном по τ приближении уравнение (11) по существу совпадает с уравнением (1).

Обратимся к системе уравнений (13) и ограничимся разложением величин $\mathbf{C}_\tau^{(j)}$ в ряд по степеням τ вплоть до членов второго порядка включительно (это соответствует замене оператора A_τ оператором $A_\tau^{(2)}f = \xi_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\tau}{2}\xi_i\xi_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ в уравнении (11) [2]). Как и ранее, для замыкания системы (13) воспользуемся известными приближениями метода Чепмена — Энскога (альтернативный путь заключается в непосредственном применении процедуры Чепмена — Энскога к уравнению (11) с оператором $A_\tau^{(2)}$ вместо A_τ).

В частности, выбирая представление (8), получим систему уравнений (с точностью до размерных множителей), которая была предложена в работе [3] и успешно использована в [2—4] для расчета некоторых газодинамических течений. В свою очередь обобщение этой системы уравнений для отличного от нуля числа Кнудсена можно получить на основании формулы (9). В одномерном случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$(\rho)_t = -\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1\rho) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\rho u_1 + \rho T) - \frac{2}{3}\tau\varepsilon\mu\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\rho u_1)_t = &-\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1^2 + \rho T) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\rho u_1^3 + 3\rho T) + \\ &+\frac{4}{3}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) - \tau\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[2\mu u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{3}{5}\lambda\frac{\partial T}{\partial x_1}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\rho u_1^2 + \frac{3}{2}\rho T\right)_t = &-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}\rho u_1^3 + \frac{5}{2}\rho T u_1\right) + \\ &+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{4}{3}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \\ &+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1}{2}\rho u_1^4 + 4\rho u_1^2 T + \frac{5}{2}\rho T^2\right) - \frac{1}{3}\tau\varepsilon\times \\ &\times\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\mu\left(7T + 5u_1^2\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) - \frac{8}{5}\tau\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\lambda u_1\frac{\partial T}{\partial x_1}\right),\end{aligned} \tag{16}$$

где $\lambda\varepsilon$ и $\mu\varepsilon$ — безразмерные коэффициенты теплопроводности и вязкости. На основании уравнений (14)—(16) можно построить явную разностную схему с использованием, в частности, центральных разностей для аппроксимации первых пространственных производных.

Приведенный выше метод получения на основании системы (13) замкнутой системы уравнений (дифференциальных или алгебраических) для гидродинамических параметров, конечно, не является единственным. Можно, например, попытаться выписать уравнения непосредственно для макропараметров $\mathbf{C}_\tau^{(j)}$ или сразу использовать для них разностную аппроксимацию. (Заметим, кстати, что система уравнений (7) следует из (13) при соответствующей разностной аппроксимации величин $C_\tau^{(j)}$ и выборе параметра τ.) Однако в любом случае изложенный здесь подход должен приводить к появлению диссипативных членов (и, вообще говоря, дисперсионных членов при $\varepsilon>0$) специального вида не только в уравнении движения, но и в уравнениях для плотности и энергии. Это является следствием требования согласованности уравнений, описывающих движение «разностной среды» на макроуровне, с естественной дискретизацией на уровне функции распределения. По всей видимости, выполнение этого требования согласованности и служит причиной хорошей точности расчетов, проведенных с использованием кинетических алгоритмов.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Самарскому, А. А. Арсеньеву и Б. Н. Четверушкину за внимание к работе и обсуждения, способствовавшие ее выполнению, а также Б. П. Герасимову за полезные замечания.

Литература

1. Поткин В. В.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, т. 15, № 6, с. 1492—1498.
2. Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 80—83.
3. Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения.— М., 1983.—12 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 144).
4. Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений.— М., 1984.—23 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 165).
5. Волчинская М. И., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики.— М., 1983.— 11 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 113).
6. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 555—559.
7. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
8. Мухин С. И., Попов С. Б., Попов Ю. П.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, т. 23, № 6, с. 1355—1369.
9. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.— 222 с.
10. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.— М.: Мир, 1978.— 495 с.
11. Неллер Г.— В кн.: Динамика разреженного газа. Механика.— М.: Мир, 1976, с. 195—207.
12. Рыжов О. С.— В кн.: Численные методы в динамике разреженных газов. М.: ВЦ АН СССР, 1977, вып. 3, с. 8—36.
13. Greenberg W., Voigt J., Zweifel P. F.— J. Statistical Physics, 1979, vol. 21, N 6, p. 649—657.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 1 февраля 1985 г.

УДК 519.633.8

Е. Д. ЛЮМКИС

ОБ УВЕЛИЧЕНИИ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ ВИХРЬ—ФУНКЦИЯ ТОКА

Введение. Решение двумерных разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, обычно осуществляется в переменных функция тока ψ — вихрь скорости ω. Наиболее распространенным является следующий полунеявный метод: нестационарное уравнение переноса вихря решается методом переменных направлений, при этом значение ω на твердой стенке и скорости, входящие в уравнение, рассчитываются через функцию тока с предыдущего временного слоя, а затем решается уравнение для функ-