



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Теорема о короне и интерполяция,
Алгебра и анализ, 2015, том 27, выпуск 5, 69–80

<https://www.mathnet.ru/aa1455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

27 апреля 2025 г., 07:53:22



ТЕОРЕМА О КОРОНЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

© С. В. КИСЛЯКОВ

Пусть E — банахово идеальное пространство последовательностей, E' — его порядковое сопряженное. По определению, теорема о короне выполнена для E , если для всяких ограниченных аналитических функций f_j в единичном круге \mathbb{D} , удовлетворяющих условию $0 < \delta \leq \|\{f_j(z)\}\|_E \leq 1$, найдется последовательность $\{g_j\}$ ограниченных аналитических функций такая, что $\sum_j f_j(z)g_j(z) \equiv 1$ и $\|\{g_j(z)\}\|_{E'} \leq C(\delta)$, $z \in \mathbb{D}$. Показано, что теорема о короне выполнена для пространств l^p , $1 \leq p < \infty$, и для некоторых более общих банаховых решеток.

В этой статье мы будем интересоваться количественными версиями теоремы о короне. Пусть E — банахово пространство последовательностей $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющее условию

$$|y_n| \leq x_n, \quad \{x_n\} \in E \Rightarrow \{y_n\} \in E \quad \text{и} \quad \|\{y_n\}\| \leq \|\{x_n\}\|.$$

Обозначим через E' порядково сопряженное пространство:

$$E' = \left\{ \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum |y_n| |x_n| < \infty \text{ для всех } \{x_n\} \in E \right\}$$

с естественной нормой. Далее, пусть $\{f_j\}$ — последовательность ограниченных аналитических функций в единичном круге \mathbb{D} комплексной плоскости, удовлетворяющая условию

$$0 < \delta \leq \|\{f_j(z)\}_{j \in \mathbb{N}}\|_E \leq 1 \tag{1}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Спрашивается, найдутся ли ограниченные в круге \mathbb{D} аналитические функции $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)g_j(z) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \|\{g_j(z)\}_{j \in \mathbb{N}}\|_{E'} \leq C, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

где константа $C = C_E(\delta)$ зависит только от E и δ ?

Ключевые слова: теорема о короне, решетка измеримых функций, ВМО-регулярность.

Работа поддержана РФФИ, грант 14-01-00198.

Если ответ на этот вопрос положительный, будем говорить, что для пространства E выполнена теорема о короне. В случае конечномерного пространства E ее впервые доказал Л. Карлесон в конце 50-х годов 20 века. Иное, более простое доказательство, использующее евклидову метрику на (опять конечномерном) пространстве E , предложил Т. Вольф в 1979 г. Вслед за тем М. Розенблюм, А. Толоконников и А. Учияма независимо заметили, что рассуждения Вольфа можно приспособить к бесконечномерному случаю, когда $E = l^2$. См. [1, приложение 3] по поводу библиографических ссылок и иных подробностей, а также по поводу доказательства оценки $C_{l^2}(\delta) = O(\delta^{-2} \log \frac{1}{\delta})$, $\delta \rightarrow 0$, методом Вольфа.

Таким образом, теорема о короне выполнена для пространства l^2 . Учияма доказал в [2], что она выполнена и для пространства l^∞ . Его построения были основаны на идеях из исходного доказательства Карлесона и довольно сложны.

Естественно спросить, для каких еще p , $1 \leq p \leq \infty$ (кроме $p = 2, \infty$), теорема о короне выполнена для пространства l^p ? Этот вопрос упоминался, например, в [1]. В работе [3] было показано, что ответ положительный при $p \in (2, +\infty)$, причем это можно вывести из случая $p = 2$ на уровне неравенства Гёльдера.

В настоящей статье мы докажем следующий результат.

Теорема 1. *Теорема о короне выполнена для пространства l^p при $1 \leq p < \infty$.*

Самый трудный случай — это $p = 1$. Он получается из случая Вольфа ($p = 2$) с помощью интерполяционных соображений. Случай произвольного $p > 1$ после этого выводится легко (примерно так же, как случай $p \in (2, \infty)$ был выведен из случая $p = 2$ в работе [3]).

Отметим любопытное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность ограниченных аналитических функций в круге \mathbb{D} , удовлетворяющая условию*

$$0 < \delta \leq \left(\sum |f_j(z)|^2 \right)^{1/2} \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тогда существуют ограниченные аналитические функции $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ в круге такие, что $\sum_j f_j \varphi_j \equiv 1$ и $|\varphi_j| \leq C(\delta)|f_j|$ в \mathbb{D} .

Доказательство. Применим теорему 1 при $p = 1$ к последовательности $\{f_j^2\}$. Получим последовательность g_j аналитических функций в круге, для которой $\sup\{|g_j(z)| : z \in \mathbb{D}, j \in \mathbb{N}\} \leq C(\delta)$ и $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j g_j \equiv 1$. Остается положить $\varphi_j = f_j g_j$, $j \in \mathbb{N}$. \square

Доказательство теоремы 1 можно распространить на более общие идеальные пространства последовательностей. Мы покажем, например, что теорема о короне справедлива для любой p -вогнутой решетки E , удовлетворяющей условию Фату и еще некоторому интерполяционному предположению (определения используемых понятий будут даны ниже). Отметим, что совсем недавно Д. В. Рущкий доказал еще более сильное утверждение, сняв почти все ограничения на решетку E , однако его рассуждение основано на теореме о короне для l^∞ (упомянутый ранее *трудный* результат Учиямы) и довольно сложных теоремах о неподвижной точке. Подчеркнем, что в настоящей работе все результаты выводятся из относительно простого случая $p = 2$ в теореме 1 с помощью интерполяции. Иногда это приводит к лучшим оценкам для константы $C_E(\delta)$, чем можно получить на основе результата Учиямы. Было бы интересно вывести и теорему Учиямы из случая $p = 2$ примерно на том же уровне сложности, но этого пока сделать не удалось.

Мы начнем с доказательства теоремы 1, предварив его минимально необходимой информацией об интерполяции пространств типа Харди. Обобщения на абстрактные решетки последовательностей получаются теми же методами, но требуют больше предварительных сведений о решетках. Эти обобщения будут изложены в заключительной части работы.

1. Интерполяция вещественным методом при широком взгляде на вещи может рассматриваться просто как наука об аккуратном разбиении функции на части, оцениваемые в разных нормах. Как только что было сказано, нам нужны некоторые сведения об интерполяции пространств типа Харди в решетках измеримых функций. Под решеткой измеримых функций понимается любое линейное пространство X измеримых функций на пространстве (S, μ) с σ -конечной (для простоты) мерой μ , снабженное полной квазинормой $\|\cdot\|$ и обладающее следующим свойством: если $g \in X$, функция f измерима и $|f| \leq |g|$ п.в., то $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$. Нам уже встречались решетки измеримых функций на множестве натуральных чисел \mathbb{N} со считающей мерой ν . В дальнейшем основным пространством с мерой у нас будет $(\mathbb{T}, m) \times (\mathbb{N}, \nu) = (\mathbb{T} \times \mathbb{N}, m \otimes \nu)$, где \mathbb{T} — единичная окружность на комплексной плоскости, а m — нормированная мера Лебега на \mathbb{T} . Последовательность $\{f_j\}$ функций на \mathbb{T} или в круге \mathbb{D} мы будем рассматривать как функцию на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ или на $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$, при этом мы пишем $f_j(z) = f(z, j)$. Формулу (1) тогда естественно записать в виде $\delta \leq \|f(z, \cdot)\|_E \leq 1$, а формулы (2) в виде $\langle f(z, \cdot), g(z, \cdot) \rangle = 1$ и $\|g(z, \cdot)\|_{E'} \leq C$.

Квазибанахова решетка X измеримых функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ называется ВМО-регулярной, если для каждой ненулевой функции $f \in X$ найдется

такая функция $g \in X$, что $|f| \leq g$, $\|g\|_X \leq C\|f\|_X$ и $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|g(\cdot, j)\|_{\text{ВМО}} \leq C$, где C не зависит от f и g .

Для любой решетки измеримых функций X на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, введем ее *аналитическую часть* (или *пространство типа Харди*) X_A , $X_A = \{f \in X : f(\cdot, j) \in N_+, j = 1, 2, \dots\}$, где N_+ — (граничный) класс В. И. Смирнова. Нам понадобятся следующие два предложения, которые в значительно более общем виде можно найти в обзоре [4].

Предложение 1. *Если X и Y — ВМО-регулярные решетки измеримых функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, то пара (X, Y) обладает следующим свойством. Пусть $f \in (X + Y)_A$ и $f = g + h$, где $g \in X$, $h \in Y$. Тогда существует другое разложение $f = \tilde{g} + \tilde{h}$, где $\tilde{g} \in X_A$, $\tilde{h} \in Y_A$ и $\|\tilde{g}\|_X \leq d\|g\|_X$, $\|\tilde{h}\|_Y \leq d\|h\|_Y$, а постоянная d зависит лишь от константы в определении ВМО-регулярности.*

Предложение 2. *Решетка $L^\infty(l^p)$ ВМО-регулярна при $0 < p \leq \infty$.*

Свойство, сформулированное в предложении 1, называется (сильной) аналитической K -устойчивостью. Собственно, предложение 1 есть главный результат о вещественной интерполяции, который мы будем использовать. Недавно Д. В. Руцкий доказал, что предложение 1 „почти обратимо“, см. [5]. См. еще статью [6] (в этом выпуске журнала) по поводу уточнения предложения 2.

Пусть (S, μ) — произвольное пространство с мерой, а w — вес, т.е. измеримая функция на S , положительная п.в. Если X — решетка измеримых функций на S , можно ввести весовую решетку $X(w)$,

$$X(w) = \{f : fw^{-1} \in X\}, \quad \|f\|_{X(w)} = \|fw^{-1}\|_X.$$

Вес w на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ имеет логарифм, равномерно принадлежащий пространству ВМО, если $\sup_j \|\log w(\cdot, j)\|_{\text{ВМО}} < \infty$. Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений.

Предложение 3. *Если X — ВМО-регулярная решетка измеримых функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, а w — вес такой, что его логарифм равномерно принадлежит пространству ВМО, то $X(w)$ — ВМО-регулярная решетка.*

Следствие 1. *Решетки $L^\infty(l^\infty, w) = \{f : |f(\zeta, j)| \leq Cw(\zeta, j), \zeta \in \mathbb{T}, j = 1, 2, \dots\}$ и $L^\infty(l^1, w^{-1}) = \{f : \sum_{j \in \mathbb{N}} |f(\zeta, j)|w(\zeta, j) \leq C, \zeta \in \mathbb{T}\}$ ВМО-регулярны, если $\log w$ равномерно принадлежит пространству ВМО. Следовательно, пара $(L^\infty(l^\infty, w), L^\infty(l^1, w^{-1}))$ сильно аналитически K -устойчива.*

2. Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим главный случай $p = 1$, из которого случай $p \in (1, \infty)$ легко следует. В дальнейшем мы обычно пишем $f(\zeta, \cdot)$, имея в виду граничные значения, и $f(z, \cdot)$, имея в виду значения функции $f(\cdot, \cdot)$ в круге \mathbb{D} при фиксированной второй переменной. Предположим, что функции $f(\cdot, j)$ аналитичны в \mathbb{D} и функция f удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leq \|f(z, \cdot)\|_{l_1} \leq 1 \quad \text{при } z \in \mathbb{D}.$$

Пусть $\alpha(\zeta, j) = |f(\zeta, j)|^{1/2}$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда $\|\alpha\|_{L^\infty(l^2)} \leq 1$ и по предложению 2 найдется такая функция $v \in L^\infty(l^2)$, что $v \geq \alpha$, $\|v\|_{L^\infty(l^2)} \leq C$ и $\sup_j \|\log v(\cdot, j)\|_{\text{ВМО}} \leq C$, где C — универсальная постоянная. Пусть ψ — внешняя функция, построенная по v (по первой переменной):

$$\psi(\cdot, j) = \exp[\log v(\cdot, j) + i\mathcal{H}(\log v(\cdot, j))], \quad j \in \mathbb{N},$$

где \mathcal{H} — оператор гармонического сопряжения. Функция $\varphi = f/\psi$ аналитична в круге и $|\varphi(\zeta, \cdot)| \leq \alpha(\zeta, \cdot) \leq v(\zeta, \cdot)$ п.в. на окружности \mathbb{T} . В частности, $\varphi \in L^\infty(l^2)_A$. Далее, при $z \in \mathbb{D}$ из неравенства Коши получаем

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|f(z, \cdot)\|_{l^1} = \|\varphi(z, \cdot)\psi(z, \cdot)\|_{l^1} \\ &\leq \|\psi(z, \cdot)\|_{l^2} \|\varphi(z, \cdot)\|_{l^2} \leq C \|\varphi(z, \cdot)\|_{l^2} \leq C. \end{aligned}$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p = 2$ с заменой величины δ на $C^{-1}\delta$. Как уже говорилось, при $p = 2$ теорема 1 хорошо известна, так что найдется функция $h \in L^\infty(l^2)_A$ такая, что

$$\langle \varphi(z, \cdot), h(z, \cdot) \rangle \equiv 1 \quad \text{в } \mathbb{D} \quad \text{и} \quad \|h\|_{L^\infty(l^2)} \leq C_{l^2}(\delta C^{-1}).$$

Разобьем функцию h на два измеримых слагаемых следующим образом: $h = h\chi_e + h\chi_{e^c}$, где

$$e = \{(\zeta, j) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} : |h(\zeta, j)| \leq A|\psi(\zeta, j)| = Av(\zeta, j)\},$$

а через e^c обозначено дополнение множества e до $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$. Постоянная A будет выбрана позже. Ясно, что

$$\begin{aligned} \|h\chi_e\|_{L^\infty(l^\infty, v)} &\leq A, \\ \|h\chi_{e^c}\|_{L^\infty(l^1, v^{-1})} &= \text{ess sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |h(\zeta, j)|v(\zeta, j)\chi_{e^c}(\zeta, j) \\ &\leq \frac{1}{A} \text{ess sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |h(\zeta, j)|^2 \leq A^{-1}[C_{l^2}(\delta C^{-1})]^2. \end{aligned}$$

В силу следствия 1 существует разбиение $h = h_1 + h_2$ функции h на слагаемые, аналитические по первой переменной ($h_1 \in L^\infty(l^\infty, v)_A$,

$h_2 \in L^\infty(l^1, v^{-1})_A$ с теми же оценками:

$$\|h_1\|_{L^\infty(l^\infty, v)} \leq DA, \quad \|h_2\|_{L^\infty(l^1, v^{-1})} \leq DA^{-1}C_{l^2}(\delta C^{-1})^2, \quad (3)$$

где D — универсальная постоянная. При $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$1 = \langle \varphi(z, \cdot), h_2(z, \cdot) \rangle = \left\langle f(z, \cdot), \frac{h_1(z, \cdot)}{\psi(z, \cdot)} \right\rangle + \langle \varphi(z, \cdot), h_2(z, \cdot) \rangle. \quad (4)$$

В первом слагаемом в последнем выражении аналитическая по первой переменной функция h_1/ψ ограничена по модулю величиной DA . Мы покажем, что второе слагаемое по модулю меньше $1/2$ при всех $z \in \mathbb{D}$, если A достаточно велико. Если это сделано, то пусть $U(z) = 1 - \langle \varphi(z, \cdot), h_2(z, \cdot) \rangle$, тогда функция $1/U$ аналитична в круге и не превосходит двух по модулю. Поэтому

$$1 = \left\langle f(z, \cdot), \frac{h_1(z, \cdot)}{U(z)\psi(z, \cdot)} \right\rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом $\left\| \frac{h_1(z, \cdot)}{U(z)\psi(z, \cdot)} \right\|_{l^\infty} \leq 2DA$, как и требуется в теореме 1 при $p = 1$.

Итак, осталось оценить сверху второе слагаемое в последнем выражении в (4), причем достаточно проделать это на единичной окружности. Но $|\varphi| \leq v$, поэтому

$$|\langle \varphi(z, \cdot), h_2(z, \cdot) \rangle| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |h_2(\cdot, j)|v(z, j) \leq DA^{-1}C_{l^2}(\delta C^{-1})^2$$

в силу (3). Таким образом, достаточно взять $A = 2DC_{l^2}(\delta C^{-1})^2$.

Замечание. Попутно получилась оценка $C_{l^1}(\delta) \leq C'C_{l^2}(\delta/C)^2$.

Теперь выведем случай произвольного конечного p в теореме 1 из случая $p = 1$. Рассуждения будут похожи на рассуждения из [3, §3].

Обозначим через q показатель, сопряженный с $p \in (1, \infty)$. Пусть f — функция из $L^\infty(l^p)_A$, удовлетворяющая условию

$$0 < \delta \leq \|f(z, \cdot)\|_{l^p} \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Рассмотрим каноническую факторизацию $f = \theta F$ (то есть $f(\cdot, j) = \theta(\cdot, j)F(\cdot, j)$), где $F(\cdot, j)$ — внешние, а $\theta(\cdot, j)$ — внутренние функции. Ясно, что на окружности $\|F(\zeta, \cdot)\|_{l^p} = \|f(\zeta, \cdot)\|_{l^p} \leq 1$, поэтому $\|F(z, \cdot)\|_{l^p} \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

Далее, положим $\varphi = \theta F^p$. Функция φ аналитична по первой переменной, причем из неравенств

$$\delta^p \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |F(z, j)|^p |\theta(z, j)|^p \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |F(z, j)|^p |\theta(z, j)| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |F(z, j)|^p \leq 1$$

вытекает, что

$$\delta^p \leq \|\varphi(z, \cdot)\|_{l^1} \leq 1 \quad \text{при } z \in \mathbb{D}.$$

По уже доказанному, существует функция $h \in L^\infty(l^\infty)_A$ такая, что

$$\|h\|_{L^\infty(l^\infty)} \leq C_{l^1}(\delta^p) \quad \text{и} \quad \langle \varphi(z, \cdot), h(z, \cdot) \rangle = 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Второе соотношение можно переписать в виде $\langle f(z, \cdot), H(z, \cdot) \rangle$, где $H = F^{p-1}h$. Легко видеть, что функция H лежит в $L^\infty(l^q)_A$: аналитичность очевидна, а, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} |H(\zeta, j)|^q &\leq C_{l^1}(\delta^p)^q \sum_{j \in \mathbb{N}} |F(\zeta, j)|^{(p-1) \cdot q} \\ &= C_{l^1}(\delta^p)^q \|F(\zeta, \cdot)\|_{l^p} \leq C_{l^1}(\delta^p)^q \end{aligned}$$

при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Таким образом, нужно нам утверждение доказано с оценкой $C_{l^p}(\delta) \leq C_{l^1}(\delta^p)$. \square

3. Некоторые обобщения. Нам потребуются стандартные операции над решетками измеримых функций. Пусть X и Y — две такие решетки на произвольном пространстве с мерой (S, μ) и пусть $\alpha > 0$. Положим

$$XY = \{h = fg : f \in X, g \in Y\}, \quad \|h\|_{XY} = \inf \|f\|_X \|g\|_Y,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям $h = fg$. Кроме того, пусть

$$X^\alpha = \{g : |g|^{1/\alpha} \in X\}, \quad \|g\|_{X^\alpha} = \||g|^{1/\alpha}\|_X^\alpha.$$

Вообще говоря, решетки XY и Y^α лишь квазинормированные, однако иногда они могут оказаться банаховыми. Например, банаховой будет решетка $X^{1-\gamma}Y^\gamma$ при $0 < \gamma < 1$, если решетки X и Y — банаховы. В частности, банаховой будет и решетка $Y^\gamma = L^\infty(\mu)^{1-\gamma}Y^\gamma$ в случае банаховой решетки Y . Если решетка $Y^{1/\gamma}$ банахова (т.е. допускает норму, эквивалентную ее квазинорме), то сама решетка Y называется p -выпуклой, $p = 1/\gamma$. Подробности см. в [7].

Для банаховой решетки X измеримых функций порядково сопряженная с ней решетка X' состоит из тех функций g , что

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int |fg| : f \in X, \|f\| \leq 1 \right\} < +\infty.$$

Мы будем молчаливо предполагать, что все встречающиеся в статье решетки измеримых функций удовлетворяют условию $X'' = X$. Это условие эквивалентно так называемому свойству Фату (см. [8]), точное определение которого нам не понадобится. Если E — решетка последовательностей (т.е. измеримых функций на пространстве (\mathbb{N}, ν) ; напомним, что

условие $E = E''$ предполагается без особых упоминаний), определим решетку $L^\infty(E)$ на пространстве $(\mathbb{T} \times \mathbb{N}, m \times \nu)$ следующим образом:

$$f \in L^\infty(E) \iff \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \sup_{N \in \mathbb{N}} \|f(\zeta, \cdot) \chi_{\mathbb{T} \times \{1, \dots, N\}}(\zeta, \cdot)\|_E.$$

Полезно заметить, что $L^\infty(E)$ может не совпадать с пространством сильно измеримых существенно ограниченных E -значных функций (достаточно рассмотреть случай $E = l^\infty$).

Обещанное обобщение теоремы 1 удобно сформулировать в виде двух отдельных утверждений.

Теорема 2. Пусть E и F — банаховы решетки последовательностей такие, что произведение EF тоже банахово и $E = XF^a$ для еще одной банаховой решетки X и некоторого $a > 0$. Если теорема о короне выполнена для E , а решетка $L^\infty(F)$ ВМО-регулярна, то теорема о короне выполнена для EF .

Теорема 3. Если теорема о короне выполнена для банаховой решетки последовательностей E , то она выполнена и для E^α при $0 < \alpha < 1$.

Взяв в теореме 2 $E = F = l^2$ (и $X = l^\infty$, $a = 1$), мы приходим к случаю $p = 1$ в теореме 1. Теорема 3 формализует переход от случая $p = 1$ к случаю $p > 1$ в теореме 1.

3.1. Подготовка и одно следствие. По поводу доказательства следующих двух предложений см., например, [9].

Предложение 4 (факторизация Лозановского). Для всякой банаховой решетки X измеримых функций на пространстве (S, μ) справедливо равенство $XX' = L^1(\mu)$.

Предложение 5. Пусть X и Y — банаховы решетки измеримых функций на пространстве (S, μ) . Если $0 < \alpha < 1$, то $(X^{1-\alpha}Y^\alpha)' = (X')^{1-\alpha}(Y')^\alpha$.

Напомним, что условия $X'' = X$ и $Y'' = Y$ молчаливо предполагаются в этих двух предложениях. Из предложения 5, в частности, получаем

$$(Y^\alpha)' = ((L^\infty)^{1-\alpha}Y^\alpha)' = (L^1)^{1-\alpha}(Y')^\alpha.$$

Лемма 1. Предположим, что все три решетки X, Y и XY банаховы и пусть $V = (XY)'$. Тогда $VX = Y'$ и $VY = X'$.

Доказательство. Проверим лишь второе равенство (первое проверяется аналогично). В силу факторизации Лозановского

$$(XY)V = L^1(\mu) = XX'. \quad (5)$$

Положим $E = (YV)^{1/2} = Y^{1/2}V^{1/2}$, $F = (X')^{1/2}$, тогда из (5) следует, что $ZE = ZF$, где $Z = X^{1/2}$. Дело свелось к следующему утверждению. Если Z, E и F — произвольные банаховы решетки измеримых функций и $ZE = ZF$, то $E = F$.

Докажем его. Умножая на Z' , получаем $L^1E = L^1F$, откуда

$$(L^1)^{1/2}E^{1/2} = (L^1)^{1/2}F^{1/2}.$$

Переходя к порядково сопряженным решеткам, получим $(E')^{1/2} = (F')^{1/2}$, т.е. $E' = F'$, а тогда $E = (E')' = (F')' = F$. \square

Условие ВМО-регулярности решетки $L^\infty(F)$ в теореме 2 эквивалентно тому, что оператор гармонического сопряжения (по первой переменной) действует в пространстве $L^p((F')^\beta)$ при некоторых $p \in (1, \infty)$ и $\beta \in (0, 1)$. Обычно именно в такой форме его и проверяют. См. [4, 6] и имеющиеся там ссылки.

Отметим одно следствие теоремы 2.

Следствие 2. Если U — банахова решетка последовательностей такая, что решетка U' p -выпукла при некотором $p > 1$, а решетка $L^\infty(U)$ ВМО-регулярна, то теорема о короне выполняется для U .

Решетки U с p -выпуклой сопряженной решеткой называются q -вогнутыми ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Это свойство легко описать в терминах самой решетки U , см. [7].

Доказательство следствия. По условию $U' = Z^{1/p}$ для некоторой банаховой решетки Z , а тогда $U = (l^1)^{1/q}(Z')^{1/q} = l^q F$, где $F = (Z')^{1/q}$. Поскольку пространства $L^\infty(U)$ и $L^\infty(l^q)$ ВМО-регулярны и $L^\infty(U) = L^\infty(l^q)L^\infty(F)$, заключаем, что и пространство $L^\infty(F)$ ВМО-регулярно (см. [10]; это утверждение о „делимости“ довольно трудно). Для того, чтобы применить теорему 2 к $E = l^q$ и определенному выше пространству F , достаточно теперь заметить, что $E = (l^1)^{1/q} = (F')^{1/q}F^{1/q}$ (так что условия теоремы 2 выполнены с $X = (F')^{1/q}$, $a = 1/q$). \square

3.2. Доказательство теорем 2 и 3. Сначала установим теорему 2. Пусть функция f из $L^\infty(EF)$ удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leq \|f(z, \cdot)\|_{EF} \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что $EF = XF^{a+1}$. Для граничных значений функции f имеется поэтому представление $|f(\zeta, \cdot)| = \sigma(\zeta, \cdot)\rho(\zeta, \cdot)^{a+1}$, где σ и ρ — неотрицательные измеримые функции на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, $\|\sigma(\zeta, \cdot)\|_X \leq 1$, $\|\rho(\zeta, \cdot)\|_F \leq 2$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Из ВМО-регулярности пространства $L^\infty(F)$ следует существование такой функции $v \in L^\infty(F)$, что $v \geq \rho$, $\|v\|_{L^\infty(F)} \leq C$ и

$\sup_j \|\log v(\cdot, j)\|_{\text{ВМО}} \leq C$. Пусть ψ — внешняя функция, построенная по v (по первой переменной). Функция $\varphi = f/\psi^{a+1}$ аналитична в круге и $|\varphi(\zeta, \cdot)| \leq \sigma(\zeta, \cdot)$, так что $\|\varphi(\zeta, \cdot)\psi^a(\zeta, \cdot)\|_E \leq \|\sigma(\zeta, \cdot)\|_X \|\psi^a(\zeta, \cdot)\|_{E^a} \leq C^a$.

Далее, при $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\delta \leq \|f(z, \cdot)\|_{EF} \leq \|\varphi(z, \cdot)\psi^a(z, \cdot)\|_E \|\psi(z, \cdot)\|_F \leq C \|\varphi(z, \cdot)\psi^a(z, \cdot)\|_E.$$

Поскольку теорема о короне верна для решетки E , найдется функция $h \in L^\infty(E')_A$ такая, что

$$\langle \varphi(z, \cdot)\psi^a(z, \cdot), h(z, \cdot) \rangle \equiv 1 \quad \text{и} \quad \|h\|_{L^\infty(E')} \leq d_1 C_E(d_2 \delta).$$

Применив лемму 1 и использованный выше прием с внешними функциями, мы можем найти факторизацию $h = \alpha \cdot \beta$, где $\alpha \in L^\infty((EF)')_A$, $\beta \in L^\infty(F)_A$ и $\|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \leq d_1 C_E(d_2 \delta)$, $\|\beta\|_{L^\infty(F)} \leq 2$. Разобьем функцию β на два измеримых слагаемых: $\beta = \beta\chi_e + \beta\chi_{e^c}$, где

$$e = \{(\zeta, j) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} : |\beta(\zeta, j)| \leq A|\psi(\zeta, j)| = Av(\zeta, j)\}.$$

Постоянная A будет выбрана позже. Ясно, что

$$\begin{aligned} \|\beta\chi_e\|_{L^\infty(l^\infty, v)} &\leq A, \\ \|\beta\chi_{e^c}\|_{L^\infty(F^{a+1}, v^{-a})} &= \|\beta v^a \chi_{e^c}\|_{L^\infty(F^{a+1})} \leq \frac{1}{A^a} \|\beta\|^{a+1}_{L^\infty(F^{a+1})} \leq \frac{d_3}{A^a}. \end{aligned}$$

Из определений видно, что оба пространства $L^\infty(l^\infty, v)$ и $L^\infty(F^{a+1}, v^{-a})$ ВМО-регулярны, поэтому существует разбиение $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1 \in L^\infty(l^\infty, v)_A$, $\beta_2 \in L^\infty(F^{a+1}, v^{-a})_A$ и выполнены аналогичные оценки:

$$\|\beta_1\|_{L^\infty(l^\infty, v)} \leq DA, \quad \|\beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1}, v^{-a})} \leq \frac{D}{A^a}.$$

Далее, при $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \varphi(z, \cdot)\psi^a(z, \cdot), \alpha(z, \cdot)\beta(z, \cdot) \rangle \\ &= \left\langle f(z, \cdot), \frac{\alpha(z, \cdot)\beta_1(z, \cdot)}{\psi(z, \cdot)} \right\rangle + \langle \varphi(z, \cdot)\psi^a(z, \cdot), \alpha(z, \cdot)\beta_2(z, \cdot) \rangle. \end{aligned}$$

В первом слагаемом функция $\alpha\beta\psi^{-1}$ аналитична по первой переменной и не превосходит по модулю $DA|\alpha|$, откуда

$$\|(\alpha\beta\psi^{-1})(z, \cdot)\|_{(EF)'} \leq d_4 C_E(d_2 \delta).$$

Оценим сверху второе слагаемое (достаточно проделать это на границе):

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} |\langle \varphi(\zeta, \cdot) \psi^a(\zeta, \cdot), \alpha(\zeta, \cdot) \beta_2(\zeta, \cdot) \rangle| &\leq \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \|\varphi \psi^a \beta_2\|_{L^\infty(EF)} \\ &= \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \|\varphi \psi^a \beta_2\|_{L^\infty(XF^{a+1})} \leq \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \|\varphi\|_{L^\infty(X)} \|\psi^a \beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1})} \\ &= \|\alpha\|_{L^\infty((EF)')} \|\varphi\|_{L^\infty(X)} \|\beta_2\|_{L^\infty(F^{a+1}, v^{-a})} \leq \frac{d_5}{A^a} C_E(d_2 \delta). \end{aligned}$$

Последнее выражение меньше $1/2$ при достаточно большом A , и рассуждение завершается так же, как и доказательство случая $p = 1$ в теореме 1.

Теперь установим теорему 2. Предположим, что

$$0 < \delta \leq \|f(z, \cdot)\|_{E^\alpha} \leq 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим внешне-внутреннюю факторизацию $f = \theta F$ (функции $F(\cdot, j)$ внешние, а $\theta(\cdot, j)$ — внутренние) и положим $\varphi = \theta F^p$, где $p = \frac{1}{\alpha}$. Тогда

$$\delta^p \leq \|\varphi(z, \cdot)\|_E \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Так как теорема о короне справедлива для E , найдется такая функция $h \in L^\infty(E')_A$, что $\langle \varphi(z, \cdot), h(z, \cdot) \rangle = 1$ и $\|h(z, \cdot)\|_{E'} \leq C_E(\delta^p)$. Тогда, разумеется, $\langle f(z, \cdot), (F^{p-1}h)(z, \cdot) \rangle \equiv 1$, так что осталось доказать, что $F^{p-1}h \in L^\infty((E^\alpha)')$ (аналитичность этой функции по первой переменной очевидна). Но в равенстве $E = E^\alpha E^{1-\alpha}$ все решетки банаховы, так что $E' E^{1-\alpha} = (E^\alpha)'$ по лемме 1. Осталось заметить, что $(F(\zeta, \cdot))^{p-1} = (F(\zeta, \cdot)^{\frac{1}{\alpha}})^{1-\alpha} \in E^{1-\alpha}$ с равномерной по $\zeta \in \mathbb{T}$ оценкой соответствующей нормы.

Список литературы

- [1] Nikol'skii N. K., *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 273, Springer-Verlag, Berlin etc., 1986.
- [2] Uchiyama A., *Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions*, Preprint, UCLA, 1980.
- [3] Кисляков С. В., Рущкий Д. В., *Несколько замечаний к теореме о короне*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 171–191.
- [4] Kisliakov S. V., *Interpolation of H^p -spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
- [5] Rutsky D. V., *On K -closedness, BMO-regularity, and real interpolation of Hardy-type spaces*, arXiv: 1409.3871, 14 Nov. 2014.
- [6] Рущкий Д. В., *Замечания об A_p -регулярных решетках измеримых функций*, Алгебра и анализ **27** (2015), №5.
- [7] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1996.

- [8] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, БХВ-Петербург, СПб., 2004.
- [9] Лозановский Г. Я., *О некоторых банаховых структурах*, Сиб. мат. ж. **10** (1969), №3, 584–599.
- [10] Руцкий Д. В., *ВМО-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа*, Алгебра и анализ **23** (2011), №2, 248–295.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия

Поступило 30 июня 2015 г.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Старый Петергоф, Библиотечная пл., 1
Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru