М. И. Белишев, Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 165, 15–20

М.И.Белишев

УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА В МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В работе развивается подход [I] к решению обратных задач, использующий идеи теории граничного управления (ТГУ). Схема решения основана на уравнениях, которые в одномерном случае приводятся к классическим уравнениям типа Гельфанда-Левитана.

I. Распространение волн в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, инициируемых источниками на границе $\Gamma = \partial\Omega$, описывается решением (прямой) начально-краевой задачи

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &\rho(x)u_{tt} - \Delta u = 0 \quad x \in \Omega,\ 0<t<T \\ &u\big|_{t<0} = 0;\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma\times[0,T]} = f(\gamma,t). \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\operatorname{diam}\Omega<\infty$; $\Gamma\in C^2$; $\rho(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, $0<\rho_1\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_2$; $\nu=\nu(\gamma)$ – внешняя нормаль к Γ, $\gamma\in\Gamma$. Условимся, придерживаясь терминологии ТГУ, называть $f(\gamma,t)$ управлением. Если $f(\gamma,t)\in L_2(\Gamma\times[0,T])\equiv F^T$ то при всех $t\in[0,T]$ волна $u=u^f(x,t)\in L_{2,\rho}(\Omega)\equiv\mathcal{H}$ $\left((a,b)_{\mathcal{H}}=\int_\Omega dx\,\rho(x)a(x)b(x)\right)$ и непрерывна по t в норме $\mathcal{H}$ [2].*/ Реакция среды, заполняющей Ω, на воздействие, производимое управлением, описывается оператором $R: F^T \longrightarrow F^T$, $Rf(\gamma,t)=u^f(\gamma,t)$. Он ограничен [2] и может быть записан в виде $Rf(\gamma,t)=\int_{\Gamma\times[0,t]} d\gamma' ds\, r(\gamma,\gamma',t-s)f(\gamma',s)$

где (обобщенное) ядро $r(\gamma,\gamma',t)$ есть граничный след волны, возбужденной точечным управлением $\delta(\gamma-\gamma')\delta(t)$. Отметим равенство: $r(\gamma,\gamma',t)=r(\gamma',\gamma,t)\ \forall\,\gamma,\gamma'\in\Gamma,\ t>0$.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА (о.з.) состоит в восстановлении $\rho(x)\big|_\Omega$ по $r(\gamma,\gamma',t)$, заданному при всех $\gamma,\gamma'\in\Gamma$, $t>0$; дополнительно предполагается известной оценочная постоянная ρ_1. Решение о.з. отнесено в п.3; п.п. I,2 содержат вспомогательные результаты.

А.С.Благовещенскому принадлежит следующее наблюдение: скалярное произведение волн $(u^f(\cdot,t),u^g(\cdot,s))_{\mathcal{H}}$ = $=\int_\Omega dx\,\rho(x)\,u^f(x,t)\,u^g(x,s)$ $(s,t>0)$ удовлетворяет уравнению колебаний ОДНОРОДНОЙ струны:

x/ Как сообщил автору С.А.Авдонин, справедлив более сильный результат: $u^f(x,t)\in C([0,T];H^{1/2-\varepsilon}(\Omega))$ с $\forall\varepsilon>0$.

$$(2)\qquad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right](u^f(\cdot,t),u^g(\cdot,s))_{\mathcal{H}}=q(t,s),$$

в котором правая часть выражается через f , g и оператор реакции R (известный в о.з.!):

$$q(t,s)=\int_\Omega dx\,\rho(x)\left[u^f_{tt}(x,t)u^g(x,s)-u^f(x,t)u^g_{ss}(x,s)\right]=\int_\Omega dx\left[\Delta u^f(x,t)u^g(x,s)-\right.$$
$$\left.-u^f(x,t)\Delta u^g(x,s)\right]=\int_\Gamma d\gamma\left[f(\gamma,t)Rg(\gamma,s)-Rf(\gamma,t)g(\gamma,s)\right].$$

Интегрирование (2) с учетом нулевых начальных условий (I) дает:

$$(3)\qquad (u^f(\cdot,T),u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}}=(C^Tf,g)_{F^T},$$

где $C^T:F^T\to F^T,\ C^Tf(\gamma,t)=\int_{\Gamma\times[0,T]}d\gamma' ds\left[\frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{2T-t-s}r(\gamma,\gamma',\xi)d\xi\right]f(\gamma',s)$,

$\|C^T\|<\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ I: оператор C^T компактен. Этот факт выводится из упомянутого в сноске результата и компактности вложения $H^\alpha(\Omega)\subset L_{2,\rho}(\Omega)\,(\forall\alpha>0)$. Пусть $\tau(x,y)=\inf\int_x^y\rho^{1/2}(l)\,dl$ ("$\inf$" - по лежащим в $\overline{\Omega}$ кривым, соединяющим x и y) - геодезическое расстояние (время пробега волны) между $x,y\in\overline{\Omega}$; $Q^T=\{x\in\Omega:\tau(x,\Gamma)<T\}$ - приграничный "слой", захваченный волнами от Γ к моменту $t=T$; $T_*=\inf\{T:Q^T\supseteq\Omega\}$ - время заполнения области Ω . Используя теорему единственности Хольмгрена-Йона [3] , можно показать: $\operatorname{Ker}C^T=\{0\}$ $(0<T<T_*)$. Вместе с (3) это приводит к положительности C^T : $(C^Tf,f)_{F^T}>0$ для $\forall f\neq 0$.

2. Как и в [I] , здесь мы используем вариант теоремы Хольмгрена-Йона: пусть $\mathcal{H}(Q^T)=\{a(x)\in\mathcal{H}:\operatorname{supp}a(x)\subset Q^T\}$; тогда

$$(4)\qquad \mathcal{H}(Q^T)=cl\{u^f(x,T)\}_{f\in F^T}\qquad(\forall T>0)$$

(cl - замыкание в норме $\mathcal{H}$). Фиксируем $T<T_*$ и рассмотрим задачу ТГУ: для заданной функции $a(x)\in\mathcal{H}(Q^T)$ найти управление $f(\gamma,t)$, удовлетворяющее условию:

$$(5)\qquad u^f(x,T)=a(x).$$

Результат (4) означает, что уравнение (5) разрешимо относительно f в классе F^T для множества функций $a(x)$, плотного в $\mathcal{H}(Q^T)$ ("приближенная управляемость" - [3]). Пусть $\mathcal{F}^T$ -

пополнение F^T по норме $(C^T f, f)^{1/2}_{F^T}$; элементы $\mathcal{F}^T$ условимся называть обобщенными управлениями. Сопоставление (3) и (4) приводит к утверждению: для $\forall a(x) \in \mathcal{H}(Q^T)$ уравнение (5) единственным образом разрешимо в классе $\mathcal{F}^T$ ("точная управляемость" - [3]). Другими словами, любая функция из $\mathcal{H}(Q^T)$ является волной, инициированной соответствующим обобщенным управлением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: процедура пополнения $F^T \to \mathcal{F}^T$, приводящая к точной управляемости в общей ТГУ вполне стандартна. Нетривиальна и не решена задача эффективного описания класса $\mathcal{F}^T$.

В уравнении (5) искомое управление и правая часть суть функции из разных пространств. В следующем случае оно сводится к уравнению в $\mathcal{F}^T$: пусть $a(x) \in \mathcal{H}(Q^T)$, $\Delta a(x) = 0$ $(x \in Q^T)$; $a\big|_\Gamma, \frac{\partial a}{\partial \nu}\big|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$. Тогда для произвольного гладкого

$$(C^T f, g)_{F^T} = (u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}(Q^T)} = \int_{Q^T} dx\, \rho(x) a(x) u^g(x,T) =$$

$$= \int_{Q^T} dx\, \rho(x) a(x) \int_0^T dt (T-t) u^g_{tt}(x,t) = \int_0^T dt (T-t) \int_{Q^T} dx\, a(x) \Delta u^g(x,t) =$$

$$= \int_{\Gamma\times[0,T]} d\gamma\, dt (T-t) \Big[a(\gamma) \frac{\partial u^g(\gamma,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \nu} u^g(\gamma,t)\Big] = \int_{\Gamma\times[0,T]} d\gamma\, dt (T-t) \Big[a(\gamma) g(\gamma,t) -$$

$$- \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \nu} R g(\gamma,t)\Big] = \Big(\varkappa^T a - R^*\Big[\varkappa^T \frac{\partial a}{\partial \nu}\Big], g\Big)_{F^T} .$$

где $\varkappa^T(t) \equiv T - t$, R^* - оператор, сопряженный к R в F^T . Сопоставляя начало и конец этой выкладки, получаем уравнение

$$(6) \qquad C^T f(\gamma,t) = \varkappa^T(t) a(\gamma) - R^*\Big[\varkappa^T(t) \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \nu}\Big]$$

с правой частью из F^T , разрешимое (при $0 < T < T_*$ - единственным образом!) в классе $\mathcal{F}^T_{1/2}$. Отметим, что аналогичное уравнение (с заменой $\varkappa^T(t)$ на $\lambda^{-1/2} \sin \lambda^{1/2}(T-t)$) выводится и для $a(x)$, удовлетворяющих в Q^T уравнению Гельмгольца $[\Delta + \lambda\rho(x)]\, a(x) = 0$ $(\lambda > 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3: в одномерном случае, когда $\Omega = [0,\ell] \subset \mathbb{R}^1$ уравнение (6) с $a(x) = 1$ после отделения δ -образной особенности у $f = f(t)$ и дифференцирования приводится к уравнению Гельфанда-Левитана или Крейна [4].

3. Временно фиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и момент $T < \tau(x_0, \Gamma)$, так что $x_0 \notin \overline{Q}^T$. Пусть

$$\mathcal{E}_{x_0}(x) = \begin{cases} c_2 \ln|x - x_0| & (n = 2) \\ c_n |x - x_0|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

– фундаментальное решение оператора Лапласа: $\Delta_x \mathcal{E}_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$. Полагая в (6) $a(x) = \mathcal{E}_{x_0}(x)|_{x \in Q^T}$, получим УРАВНЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ:

$$(7) \qquad C^T f(\gamma, t) = \varkappa^T(t)\mathcal{E}_{x_0}(\gamma) - R^*\left[\varkappa^T(t)\frac{\partial}{\partial\nu}\mathcal{E}_{x_0}(\gamma)\right].$$

По его решению $f = f^T_{x_0}(\gamma, t) \in \mathcal{F}^T$ построим функцию

$$\sigma_{x_0}(T) = \Delta_{x_0}(C^T f^T_{x_0}, f^T_{x_0})_{F^T} = \Delta_{x_0}\|\mathcal{E}_{x_0}\|^2_{\mathcal{H}(Q^T)} =$$

$$= \Delta_{x_0}\int_{Q^T} dx\,\rho(x)\mathcal{E}^2_{x_0}(x) = 2\int_{Q^T} dx\,\rho(x)|\nabla\mathcal{E}_{x_0}(x)|^2.$$

Как легко показать,

$$\frac{d}{dT}\sigma_{x_0}(T) = 2\int_{\Gamma^T} d\gamma\,\rho^{1/2}(\gamma)|\nabla\mathcal{E}_{x_0}(\gamma)|^2,$$

где $\Gamma^T = \partial[\Omega \setminus Q^T]$ – фронт волны, идущей от Γ вглубь Ω. Порядок особенности $\mathcal{E}_{x_0}(x)$ в т. x_0 таков, что при $T \to \tau(x_0, \Gamma)$, т.е. при подходе фронта Γ^T к x_0 производная $\frac{d}{dT}\sigma_{x_0}(T) \to \infty$. Это обстоятельство и позволяет решить о.з. по следующей схеме:

а) фиксируем $\forall x_0 \in \Omega$ и выберем $T < \rho_1^{1/2}\,\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}(x_0, \Gamma)$. При этом заведомо оказывается выполненным условие: $T < \tau(x_0, \Gamma)$. По $r(\gamma, \gamma', t)$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma : 0 < t < 2T)$ построим оператор C^T и найдем решение $f = f^T_{x_0}(\gamma, t)$ уравнения (7);

б) вычислим $\sigma_{x_0}(T) = \Delta_{x_0}(C^T f^T_{x_0}, f^T_{x_0})_{F^T}$ затем $\frac{d}{dT}\sigma_{x_0}(T)$

Увеличивая T, определим

$$\tau(x_0, \Gamma) = \sup\left\{T : \frac{d}{dT}\sigma_{x_0}(T) < \infty\right\}$$

– время прихода волны от Γ в т. x_0;

в) по "эйконалу" $\tau(x_0, \Gamma)|_{x_0 \in \Omega}$ восстанавливается семейство фронтов $\Gamma^T = \{x \in \Omega : \tau(x, \Gamma) = T\}$ $(0 < T < T_*)$ и, наконец, $\rho(x) = |\nabla\tau(x, \Gamma)|^2$ $(x \in \Omega)$.

Отметим локальный характер процедуры а) – в): для нахождения $\rho(x_0)$ данные $r(\gamma, \gamma', t)$ используются лишь при временах $t \in [0, 2\tau(x_0, \Gamma)]$.

4. Рассмотрим (прямую) задачу рассеяния для волнового уравнения с компактной неоднородностью:

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho(x)u_{tt}-\Delta u=0 \quad x\in\mathbb{R}^n,\ 0<t<T \\ u\big|_{|x|<a,t<0}=0;\ u\big|_{|x|\geq a}=U_-f+U_+Sf \end{cases}$$

В ней $\rho(x)\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\rho\big|_{|x|\geq a}=1$; $f\in L_2(\Gamma\times[0,T])=F^T$, $\Gamma=\{x:|x|=a\}$. Оператор U_+ дает решение внешней начально-краевой задачи Неймана:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 \quad |x|>a,\ 0<t<T \\ 1)\, u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0;\quad 2)\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma\times[0,T]}=g(\gamma,t)\in F^T, \end{cases}$$

$u=u_+(x,t)=U_+g$ - "расходящаяся" волна. Оператор U_- решает такую же задачу, но с финальным условием I) $u\big|_{t=T}=u_t\big|_{t=T}=0$ вместо начального; $u=u_-(x,t)=U_-g$ - "сходящаяся" волна; если $\mathcal{O}^T$ - оператор, меняющий t на $T-t$: $\mathcal{O}^T h(\ldots,t)=$ $=h(\ldots,T-t)$, то $U_-=\mathcal{O}^T U_+\mathcal{O}^T$ Далее в (8): U_-f и U_+Sf - падающая и рассеянная волны, S - оператор рассеяния. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ состоит в восстановлении $\rho(x)\big|_{|x|<a}$ по заданному оператору S . Простой прием позволяет свести ее к рассмотренной выше. Введем операторы $R_\pm : F^T \longrightarrow F^T$, $R_\pm f=U_\pm f\big|_{\Gamma\times[0,T]}=u_\pm(\gamma,t)$. Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (8) имеем равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma\times[0,T]}=(E+S)f;\quad u\big|_{\Gamma\times[0,T]}=(R_-+R_+S)f,$$

позволяющие связать оператор рассеяния с оператором R реакции области $\Omega=\{x:|x|<a\}$: $R\,\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\nu}=u(\gamma,t)$,

$$R=(R_-+R_+S)(E+S)^{-1}.$$

Далее можно воспользоваться схемой а) - в) п.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. в одномерной о.з. рассеяния подход, аналогичный тому, что использовался при выводе уравнения (7) приводит к уравнению Марченко.

Я признателен участникам семинара А.С.Благовещенского за ценные советы и обсуждения. Приношу благодарность С.А.Авдонину за консультации по ТГУ.

ЛИТЕРАТУРА

I. Белишёв М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. Докл. АН СССР, 1987, т.296, М., с.13-16.

2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.

3. Russell D.L. Controlability and stabilizability theory for linear partial differential equations. SIAM Review, 1978, v.20, N 4, p.639-739.

4. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1971, т.115, с.28-38.

Belishev M.Y. The equations of Gelfand-Levitan type in multidimensional inverse problem for the wave equation.

An approach for multidimensional inverse problems based on the results and ideas of boundary value control theory (Russell D.L., Lions G.L.) is developed.