Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. Ch. Chigogidze, A characterization of Polish $AE(n)$-spaces,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1987, Number 5, 32–35

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm3143

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.86
January 17, 2026, 16:55:12

Оценим остаточный член R. Для этого окружим целые точки окрестностями длины $1/N$, а в качестве оценки подынтегральной функции возьмем единицу. На оставшемся множестве подынтегральную функцию оценим величиной $1/N\|x\|$. Отсюда имеем

$$R=O\left(\frac{M\ln N}{N}(b-a)\right).$$

Проинтегрируем по частям интегралы формулы (4). Получим

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\sum_{n=-N}^{N}\int_a^b f(x)\,e^{2\pi inx}\,dx+O\left(\frac{M\ln N}{N}(b-a)\right). \qquad (5)$$

Перейдя к пределу в (5) при $N\to+\infty$, получим требуемую формулу. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., 1981.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., 1980.
3. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. М., 1962.

Поступила в редакцию
10.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 5

УДК 513.83

А. Ч. Чигогидзе

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЬСКИХ $AE(n)$-ПРОСТРАНСТВ

Известный результат Хана—Мазуркевича—Серпинского [1] утверждает, что класс континуумов Пеано (т. е. непрерывных образов отрезка) совпадает с классом связных и локально связных компактов. Последний класс в силу соответствующей теоремы Куратовского [1] в свою очередь совпадает с классом $AE(1)$-компактов. Этот же класс компактов был позднее охарактеризован Хоффманом [2] как класс 0-обратимых образов гильбертова куба Q. А. Н. Дранишников [3] распространил последнее утверждение, доказав, что класс $AE(n+1)$-компактов совпадает с классом n-обратимых образов Q. Из результатов Бествина [4] и А. Н. Дранишникова следует также, что $AE(n)$-компакты и только они являются n-обратимыми образами n-мерного универсального менгеровского компакта.

Однако до настоящего времени не было известно ни одной подобной характеристики некомпактных $AE(n)$-пространств. Исключение составляет случай $n=0$, который охватывается классическим результатом Хаусдорфа о том, что класс польских $AE(0)$-пространств совпадает с классом 0-мягких образов сепарабельного бэровского пространства N^ω (т. е. счетной, бесконечной степени натурального ряда, взятого в дискретной топологии).

В данной статье дается полная характеристика польских $AE(n)$-пространств как образов некоторых эталонных пространств при подходящих отображениях. Причем в роли эталонных пространств выступают сепарабельное гильбертово пространство l_2 и построенные автором [5, 6] n-мерные польские $AE(n)$-пространства P_n ($P_n=P_n^\omega$, см.

[5, 6]). Отметим, что пространство P_n допускает n-мягкое отображение на l_2 и поэтому содержит топологическую копию любого не более чем n-мерного польского пространства в качестве замкнутого подпространства. Очевидно также, что $P_0=N^\omega$.

Все рассматриваемые ниже пространства предполагаются польскими (т. е. полными, сепарабельными и метризуемыми), а отображения непрерывными. Определения n-мягких и n-обратимых отображений, так же как и определения $AE(n)$-пространств в некомпактном случае, даны в [5, 6]. В рассматриваемом классе польских пространств эти определения общеизвестны. Так, класс польских $AE(n+1)$-пространства, в силу теоремы Куратовского, совпадает с классом $C^n \cap LC^n$. Отметим, что n-мягкое отображение, будучи открытым, не обязано быть замкнутым. Определения классов $AE(n, m)$ $(m=n+1, n+2, \ldots, \infty)$ для компактов даны в [2] (см. также [3]) и очевидным образом переносятся на некомпактный случай. Индуктивно n-мягким будем называть отображение, сужение которого на некотором замкнутом подпространстве отображаемого пространства является n-мягким в обычном смысле.

Рассмотрим произвольное n-мерное польское пространство X. В силу теоремы Исбелла [7], X гомеоморфно пределу некоторого счетного обратного спектра $S_X=\{X_i, p_i^{i+1}\}$, состоящего из n-мерных счетных локально конечных полиэдров X_i и сюръективных симплициальных соседних проекций p_i^{i+1}. Образуем новый спектр $S_Y=\{Y_i, q_i^{i+1}\}$ следующим образом. В качестве его первого элемента Y_1 возьмем конус над полиэдром X_1. Ясно, что Y_1 является $(n+1)$-мерным польским абсолютным ретрактом. Будем отождествлять X_1 с замкнутым подпространством Y_1, являющимся образом X_1 при его каноническом вложении в Y_1. Предположим, что для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, уже построены $(n+1)$-мерные польские абсолютные окрестностные ретракты Y_i, содержащие полиэдры X_i в качестве замкнутых подпространств, и удовлетворяющие нужным коммутационным соотношениям соседние проекции $q^i_{i-1}: Y_i \to Y_{i-1}$, являющиеся тонкими гомотопическими эквивалентностями и удовлетворяющие равенствам $q^i_{i-1}(X_i)=X_{i-1}$ и $q^i_{i-1}/X_i=p^i_{i-1}$. Пространством Y_{k+1} может служить цилиндр отображения p_k^{k+1}, рассматриваемого как отображение полиэдра X_{k+1} в пространство Y_k (напомним, что $p_k^{k+1}(X_{k+1})=X_k$ замкнуто в Y_k). По теореме Ханнера [8] Y_{k+1} является $(n+1)$-мерным польским абсолютным окрестностным ретрактом. Замкнутое вложение полиэдра X_{k+1} в Y_{k+1} и проекция $q_k^{k+1}: Y_{k+1} \to Y_k$, являющаяся в силу [9] тонкой гомотопической эквивалентностью, определяются каноническим образом. При этом очевидно, что $q_k^{k+1}(X_{k+1})=X_k$ и $q_k^{k+1}/X_{k+1}=p_k^{k+1}$. Через Y обозначим предел спектра S_Y. Из построения ясно, что Y является $(n+1)$-мерным польским пространством, содержащим X в качестве замкнутого подпространства. Так как все соседние проекции спектра S_Y являются тонкими гомотопическими эквивалентностями, а пространства Y_i — польскими абсолютными окрестностными ретрактами, то по теореме Кертиса [9] и пространство Y является абсолютным окрестностным ретрактом. Можно показать, что Y стягиваемо и, следовательно, является абсолютным ретрактом. Взяв в качестве X упомянутое выше пространство P_n, получим следующий результат, в компактном случае доказанный Боте [10].

Теорема 1 (о вложении). *Для любого $n=0, 1, \ldots$ существует $(n+1)$-мерный польский абсолютный ретракт, содержащий топологическую копию любого не более чем n-мерного польского пространства в качестве замкнутого подпространства.*

Используя теорему 1 и следуя схеме доказательства соответствующего утверждения из [3], получаем

Предложение 1. *В классе польских пространств для любого* $n=0, 1, \ldots$ *и любого* $m=n+1, n+2, \ldots, \infty$ *выполняется равенство* $AE(n+1)=AE(n, m)$.

Теорема 2. *Пусть* $n=0, 1, \ldots$ *и* X — *польское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $X \in AE(n+1)$ $(X \in LC^n)$;

2) X *является индуктивно* n-*мягким образом* l_2 (l_2-*многообразия*);

3) X *является* n-*обратимым образом* l_2 (l_2-*многообразия*).

Доказательство. Проведем доказательство лишь абсолютного случая, так как локальный вариант доказывается совершенно аналогично.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $X \in AE(n+1)$. По теореме 5.1 из [6] существует n-мягкое отображение $f: P_n \to l_2$. Без ограничения общности можно считать, что X замкнуто в l_2. Обозначим $Y=f^{-1}(X)$. Вложим Y в l_2 в качестве замкнутого подпространства. В силу предложения 1 n-мягкое отображение $f/Y: Y \to X$ допускает продолжение $g: l_2 \to X$, которое и является искомым индуктивно n-мягким отображением.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $f: l_2 \to X$ — n-обратимое отображение. В силу предложения 1 достаточно показать, что $X \in AE(n, n+1)$. Пусть B — произвольное $(n+1)$-мерное польское пространство, A — его n-мерное замкнутое подпространство и $g: A \to X$ — произвольное непрерывное отображение. В силу n-обратимости f существует его поднятие $h: A \to l_2$. Пусть $H: B \to l_2$ — произвольное продолжение отображения h. Тогда искомое продолжение $G: B \to X$ отображения g задается соотношением $G=fH$.

Следствие. *Следующие условия эквивалентны для любого польского пространства* X:

1) X *связно и локально связно*;

2) X — *индуктивно открытый образ* l_2;

3) X — 0-*обратимый образ* l_2.

Теорема 3. *Пусть* $n=0, 1, \ldots$ *и* X — *польское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $X \in AE(n)$;

2) X — *индуктивно* n-*мягкий образ* P_n;

3) X — n-*обратимый образ* P_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куратовский К. Топология. Т. 2. М., 1969.
2. Hoffmann B. An injective characterization of Peano spaces//Top. Appl. 1980. **11**. 37—46.
3. Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность//Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 5. 55—95.
4. Bestvina M. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta: Dissertation, 1984.
5. Чигогидзе А. Ч. Несчетные степени прямой, натурального ряда и n-мягкие отображения//Докл. АН СССР. 1984. **278**, № 1. 50—53.
6. Чигогидзе А. Ч. Небикомпактные абсолютные экстензоры в размерности n, n-мягкие отображения и их применения//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1986. **50**, № 1. 156—180.
7. Isbell J. R. Uniform neighbourhood retracts//Pacif. J. Math. 1961. **11**, N 2. 609—648.
8. Hanner O. Retractions and extension of mappings of metric and non-metric spaces//Ark. mat. 1952. **2**. 315—360.

9. Curtis D. W. Some theorems and examples on local equiconnectedness and its specializations//Fund. math. 1971. 72. 101—113.
10. Bothe H. G. Eine einbettung m-dimensionalen mengen in einen $(m+1)$-dimensionalen absoluten retrakt//Fund. math. 1963. 52, N 3. 209—224.

Поступила в редакцию
31.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 5

УДК 517.52

М. И. Дьяченко

АНАЛИТИЧНОСТЬ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С БЕСКОНЕЧНО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть заданы последовательность $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и натуральное число m. Скажем, что $a\in M_m$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ и $\Delta^m(a_n)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_{n+k}A_k^{-m-1}=$ $=\sum\limits_{k=0}^{m} a_{n+k}(-1)^k C_m^k\geqslant 0$ при $n=0, 1, 2, \ldots$, где A_k^{-m-1} — соответствующие числа Чезаро. Известно, что при любом m $M_{m+1}\subset M_m$. Положим $M_\infty=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} M_m$. Если $a\in M_1$, то ряд $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ сходится всюду на $(0,2\pi)$, и его сумму будем обозначать через $f(x)$. Хорошо известен (см. [1, с. 365]) такой результат.

Теорема А. *Если $a\in M_2$, то функция $f(x)$ принадлежит классу $C^1((0, 2\pi))$.*

Аналогично устанавливается, что если $m>2$ и $a\in M_m$, то $f(x)\in$ $\in C^{m-1}((0, 2\pi))$. Возникает вопрос: что можно сказать о функции $f(x)$, если $a\in M_\infty$? Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Существует область U комплексной плоскости, содержащая интервал $(0, 2\pi)$ действительной оси, такая, что если $a\in M_\infty$, то соответствующая функция $f(x)$ продолжается до голоморфной в U.*

Конкретный вид области U будет указан при доказательстве теоремы. Отметим, что, как показывают примеры функций вида

$$f_b(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n}\cos nx=\frac{b^2-1}{b^2+1-2b\cos x},\ \text{где } b>1,$$

особыми точками аналитических продолжений которых являются $\pm i\ln b+2k\pi$, k — целое, область U должна лежать в полосе $0<\operatorname{Re} z<$ $<2\pi$. Скорее всего, саму эту полосу можно взять в качестве U, но это доказать не удалось.

Замечание 1. *Если $\alpha>0$ и $\beta\geqslant 0$, то последовательности вида $\{(n+2)^{-\alpha}(\ln(n+2))^{-\beta}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{(\ln(n+2))^{-\alpha}\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежат M_∞.*

Введем еще некоторые обозначения. Пусть B — оператор, действующий на множестве последовательностей $c=\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ так: $B(c)_n=\sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ при $n=0, 1, 2, \ldots$. Пусть также $K(t)=\left\{\frac{1}{2}, \cos t, \cos 2t, \ldots\right\}$,