УДК 512.554.36 + 514.146

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ В МОДУЛЯХ И АЛГЕБРАХ ЛИ

А. А. Лашхи

§ 1. Введение

В начале двадцатого века, благодаря усилиям многих математиков (в особенности Гильберта), стало известно, что каждой n-мерной проективной геометрии G размерности $n \geqslant 3$ однозначно сопоставляется некоторое ассоциативное тело F; при этом система (решетка) подпространств пространства G оказывается изоморфной решетке линейных подпространств $n+1$-мерного пространства над F.

В тридцатые годы проективная геометрия пополнилась работами алгебраистов (Бэр [19], Биркгоф [23], Маклейн [44] и др.), что и определило в значительной степени ее дальнейшее развитие. К новому этапу исследований можно отнести работы фон Неймана [47], [48], [49]. Эти исследования связали проективную геометрию не только с линейной алгеброй, теорией решеток и теорией колец, но и со многими другими разделами современной алгебры.

Проективная геометрия, как синтез линейной алгебры над общими кольцами и теорией решеток (систем подмодулей) развивалась в дальнейшем в рамках программы фон Неймана. Реализацию этой программы в значительной степени стимулировали также монографии Э. Артина [1], Бэра [2], Дж. фон Неймана [50]. Естественно, одно из основных направлений этих исследований — нахождение условий справедливости основной теоремы проективной геометрии (а также теоремы Штаудта): каждая коллинеация и каждый решеточный изоморфизм (что в случае пространств над телами одно и то же) порождается проективностью (определение см. ниже). Об этом свидетельствует уже та незначительная часть этих работ, которая приведена в списке литературы. Для более точного представления картины укажем на [16], [24], [26] и обширный список цитируемой там литературы. Приведем некоторые из этих результатов.

Рее [54] изучает вопрос в случае модулей над кольцами матриц. В 1960 г. Л. А. Скорняков [15], [16] доказал основную теорему проективной геометрии для модулей без кручения ранга $n \geqslant 3$ над регулярными кольцами. В случае коммутативных колец самым значительным достижением является теорема Оянгурена и Сридхарана [51]: пусть M и N — свободные модули ранга $n \geqslant 3$ над коммутативными кольцами A и B соответственно, $f : \mathfrak{M}(M) \to \mathfrak{M}(N)$ — решеточный изоморфизм, тогда существует изоморфизм $\sigma : A \to B$ и линейное отображение $\mu : M \to N$ такие, что $\mu(ax) = \sigma(a)\mu(x)$, $a \in A$, $x \in M$, и $f(X) = \mu(X)$, $X \in \mathfrak{M}(M)$. В этом случае μ назовем σ-проективностью.

Ограничение на размерность ($n \geqslant 3$) во многих случаях является существенным. Однако для абелевых групп (Бэр) и модулей над коммутативным локальным кольцом Лимайе [43] удается ограничиться случаем $n \geqslant 2$.

В диссертации Брехема [24] исследованы коллинеации и решеточные изоморфизмы (а также некоторые обобщения) для модулей над кольцами Оре. Влияние этой работы, а также [42], [31] в некоторой степени и определили § 3—4. Для некоторых «хороших» основных колец (кольца главных идеалов) обнаруживается, что не только решеточные изоморфизмы, но и такие отображения, которые сохраняют лишь одну решеточную операцию (объединение) и нулевое пересечение, также порождаются проективностями.

С другой стороны, в некоторых случаях проективности однозначно определяются не только изоморфизмом всей решетки подмодулей, но и некоторой ее подрешетки. Это достигается введением на модуле некоторой дополнительной бинарной операции (лиево умножение). Тем самым модуль превращается в алгебру, и можно рассмотреть решетку подалгебр—подрешетку решетки подмодулей. В §§ 5—7 изучена эта задача. В некоторых случаях (2-нильпотентные, свободные, свободные полинильпотентные алгебры Ли), особенно когда основное кольцо — поле, основная теорема проективной геометрии справедлива в ослабленной форме: решеточный изоморфизм влечет проективность. В случае, когда основное кольцо — кольцо главных идеалов, не являющееся полем, решетка подалгебр значительно богаче, и удается получить точную формулировку основной теоремы проективной геометрии для целого ряда классических алгебр Ли (локально нильпотентные, свободные разрешимые, сверхразрешимые, свободные).

§ 2. Проективные пространства и коллинеации

Пусть $\mathscr{K}$ — коммутативное кольцо с единицей. Для каждого свободного $\mathscr{K}$-модуля X можно построить новый объект — проективное пространство $p(X)$, соответствующее X. Его элементы — $\mathscr{K}$-свободные прямые слагаемые ранга 1. Ясно, что всякий элемент из $p(X)$ имеет вид $\mathcal{K}e$ (одномерный подмодуль, порожденный унимодулярным элементом e). Напомним, что элемент e унимодулярен, если существует линейная форма $\mu: X \to \mathcal{K}$ такая, что $\mu(e)=1$. Или, что то же, координаты элемента e в каком-либо базисе порождают единичный идеал $\mathcal{K}$. Если кольцо $\mathcal{K}$ таково, что всякий проективный модуль ранга 1 свободен, то $p(X)$ совпадает с известным из алгебраической геометрии определением проективного пространства.

Это классическое определение проективного пространства мы расширяем следующим образом (оставляя при этом тот же термин и меняя обозначение $p(X)$ на $P(X)$): ассоциированное с X проективное пространство $P(X)$ — это множество всех свободных подмодулей ранга 1. Ясно, что в этом случае через $P(X)$ однозначно воспроизводится любой подмодуль X как объединение некоторого множества элементов из $P(X)$.

Припишем каждому свободному подмодулю $U \subset X$ его проективную размерность $\dim_p U = \dim U - 1$. Будем пользоваться терминами: «точки», «прямые», «плоскости» для свободных подмодулей проективной размерности 0, 1, 2 соответственно. Нулевой подмодуль будем считать «пустым элементом» проективного пространства $P(X)$, имеющим проективную размерность — 1.

Различные точки $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ проективного пространства $P(X)$ назовем коллинеарными, если существует прямая $U \subseteq X$ такая, что $U = p_i + p_j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$ $(i \neq j)$. Ясно, что это определение обобщает классическое определение коллинеарности из проективной геометрии.

Заметим, что если U — подмодуль в X и e — унимодулярный элемент в $P(U)$, то он может не быть унимодулярным в $P(X)$.

Предложение 1. Если p_1, p_2, p_3, p_4 — коллинеарные точки из $P(X)$, то существует прямая $U \subseteq X$, унимодулярные элементы e_1, e_2 этой прямой и единственный обратимый элемент $s \in \mathcal{K}$ такие, что

$$p_1 = \langle e_1 \rangle,\ p_2 = \langle e_2 \rangle,\ p_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle,\ p_4 = \langle e_1 + s e_2 \rangle.$$

Заметим, что через точки p_1, p_2, p_3, p_4 могут проходить разные прямые. Прямую U назовем главной прямой, проходящей через эти точки, а элемент s — двойным отношением точек p_1, p_2, p_3, p_4.

Пусть элементы e_1, e_2 порождают прямую, т. е. $U = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$. Рассмотрим точки $\mathcal{K}(a_i e_1 + b_i e_2) \in P(X)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, a_i, $b_i \in \mathcal{K}$. Обозначим

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}.$$

Эти точки коллинеарны тогда и только тогда, когда все D_{ij} — обратимые элементы кольца $\mathcal{K}$.

Предложение 2. Если четыре точки $\mathcal{K}(a_i e_1 + b_i e_2)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, коллинеарны, то их двойное отношение $s = D_{23} D_{14} D_{13}^{-1} D_{24}^{-1}$.

Четыре точки пространства $P(X)$ назовем гармоническими, если их двойное отношение равно -1.

Предложение 3. Пусть X_1 и X_2 — модули над коммутативными кольцами $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$; $\alpha: P(X_1) \to P(X_2)$ — биекция, тогда следующие условия эквивалентны.

1. Точки $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P(X_1)$ — гармонические тогда и только тогда, когда $\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3), \alpha(p_4) \in P(X_2)$ — гармоническая четверка.

2. Если $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P(X_1)$ — гармоническая четверка, то $\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3), \alpha(p_4) \in P(X_2)$ — тоже гармоническая четверка, и если $q_1, q_2, q_3, q_4 \in P(X_1)$ — гармоническая четверка, то $\alpha^{-1}(q), \alpha^{-1}(q_2), \alpha^{-1}(q_3), \alpha^{-1}(q_4)$ — коллинеарные точки.

Определение 1. Отображение $\mu: P(X_1) \to P(X_2)$ назовем коллинеацией, если μ — биекция и $p_1 \subset p_2 + p_3$ влечет $\mu(p_1) \subset \subset \mu(p_2) + \mu(p_3)$ для всех $p_1, p_2, p_3 \in P(X_1)$, и гармоническим, если μ и μ^{-1} сопоставляют гармоническим четверкам гармонические.

Если теперь e — унимодулярный элемент в $\mathscr{K}_1$-свободном подмодуле $U \subset X_1$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис U и $\mathscr{K}_1 e \subset \sum_{i=1}^{m} \mathscr{K}_1 e_i$, то $\mu(\mathscr{K}_1 e) \subset \sum_{i=1}^{m} \mu(\mathscr{K}_1 e_i)$. Проверяется это аналогично лемме 1 из [51].

Пусть $\sigma: \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_2$ — гомоморфизм. Линейное отображение $f: X_1 \to X_2$ назовем σ-проективностью или проективностью относительно гомоморфизма σ, если $f(ax) = \sigma(a) f(x)$ для всех $x \in X_1$, $a \in \mathscr{K}_1$. В литературе проективность называют также σ-полулинейным отображением, полулинейным изоморфизмом и т. д.

Теорема (фон Штаудт). Пусть X_1 — модуль без кручения над кольцом левых идеалов $\mathscr{K}_1$ и двойка обратима, X_2 — над кольцом $\mathscr{K}_2$; $f: P(X_1) \to P(X_2)$ — гармоническое отображение, тогда существует изоморфизм $\sigma: \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_2$ и σ-проективность $\mu: X_1 \to X_2$, что $f(p) = \mu(p)$ для всех $p \in P(X_1)$.

Если X_1 и X_2 — свободные модули одинакового конечного ранга над кольцами $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ соответственно, $U \in X_1$ — подмодуль, $f: X_1 \to X_2$ — σ-проективность, переводящая базис $e_1, \ldots e_n$ $\mathscr{K}_1$-модуля U в базис $\mathscr{K}_2$-модуля $f(U) = W$, тогда f переводит унимодулярный элемент $e = \Sigma a_i e_i$ $\mathscr{K}_1$-модуля U в унимодулярный элемент $f(e) = \Sigma \sigma(a_i) f(e_i)$ $\mathscr{K}_2$-модуля W. Тем самым мы получаем индуцированное отображение $P(f): P(X_1) \to P(X_2)$, полагая $P(f)(\mathscr{K}_1 e) = \mathscr{K}_2 f(e)$ для унимодулярных элементов всех прямых из X_1. Очевидно также, что соотношение $p_1 \subset p_2 + p_3$ влечет $P(f) p_1 \subset P(f) p_2 + P(f) p_3$, и если σ — изоморфизм, то $P(f)$ — коллинеация.

Если $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — тела и μ — коллинеация, то μ^{-1} также будет коллинеацией (см., например, [1]). В общем случае для произвольных колец μ^{-1} не будет коллинеацией. Скажем, что коллинеация μ сохраняет линейную независимость (СЛН-коллинеация), если для любого $\{p_\alpha \in P(X),\ \alpha \in I\}$, $p_\beta \cap (\bigcup_{\gamma \neq \beta} p_\gamma,\ \gamma \in I) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mu(p_\beta) \cap (\bigcup_{\gamma \neq \beta} \mu(p_\gamma)) = 0$.

Приведем теперь классический пример (см., например, [51]), показывающий, что если μ — СЛН-коллинеация, сохраняющая линейную независимость, то μ^{-1} может не быть таковой.

Пусть $\mathscr{K}$ — коммутативное кольцо главных идеалов, не являющееся полем, F — поле частных $\mathscr{K}$. Каноническое вложение $\sigma : k \rightarrow F$ индуцирует σ-проективность

$$\sigma^n : \mathscr{K}^n = \underbrace{\mathscr{K} \times \mathscr{K} \times \ldots \times \mathscr{K}}_{n} \rightarrow F^n = \underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{n} \quad (n \geqslant 3),$$

которая, в свою очередь, приводит к проективизации $P(\sigma^n)$: $: P(\mathscr{K}^n) \rightarrow P(F^n)$. Отображение $P(\sigma^n)$ — коллинеация, однако $[P(\sigma^n)]^{-1}$ не является ею. Действительно, если $(\ldots, a_i, \ldots)$, $(\ldots, b_i, \ldots)$ — унимодулярные элементы из $\mathscr{K}^n$, представляющие один и тот же элемент из $P(F^n)$, то существуют такие $x, y \in \mathscr{K}$, что $x(\ldots, a_i, \ldots) = y(\ldots, b_i, \ldots) \Rightarrow xa_i = yb_i$. Если $\Sigma a_i \mu_i = 1$, то $x\lambda = y$, где $\lambda = \Sigma b_i \mu_i \in \mathscr{K}$; аналогично, $y\gamma = x$, $y \in \mathscr{K}$. Следовательно, x и y отличаются на обратимый элемент кольца $\mathscr{K}$. Поэтому $\mathscr{K}(\ldots, a_i, \ldots) = \mathscr{K}(\ldots, b_i, \ldots)$. Этим доказано, что $P(\sigma)$ инъективно. При помощи стандартных рассуждений можно показать, что $P(\sigma)$ — сюръекция, т. е. $P(\sigma^n)$ — биекция. Пусть $p_1 \subset p_2 + p_3$. Тогда $P(\sigma) p_1 \subset$ $\subset P(\sigma) p_2 + P(\sigma) p_3$. Далее,

$$P(\sigma) \mathscr{K}(1, 0, \ldots) = F(1, 0, \ldots) =$$
$$= F(x, 0, \ldots) \subset P(\sigma) \mathscr{K}(x, 1, 0, \ldots) + P(\sigma) \mathscr{K}(0, 1, 0, \ldots).$$

Однако $(1, 0, \ldots) \not\subset \mathscr{K}(x, 1, 0, \ldots) + \mathscr{K}(0, 1, 0, \ldots)$, это означает, что $P(\sigma^n)$ не является коллинеацией.

Та же идея лежит в основе конструкции примера, показывающего, что если $\mu : P(X) \rightarrow P(Y)$ — биекция, сопоставляющая гармоническим четверкам гармонические и $\mathscr{K}$, не является полем, то μ^{-1} может не обладать этим свойством. Действительно, предположим (см. предыдущий пример), что $n = 2$, и рассмотрим гармонические четверки $F(x, 1)$, $F(x, -1)$, $F(0, 1)$, $F(1, 0)$. Их прообразами будут $\mathscr{K}(x, 1)$, $\mathscr{K}(x, -1)$, $\mathscr{K}(0, 1)$, $\mathscr{K}(1, 0)$. Ясно, что эта четверка не будет гармонической, так как прямая, проходящая через $\mathscr{K}(1, 0)$ и $\mathscr{K}(0, 1)$, отлична от прямой, проходящей через $\mathscr{K}(x, 1)$ и $\mathscr{K}(1, x)$.

§ 3. СЛН-коллинеации и гемитрофизмы

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, $\mathscr{K}$ обозначает кольцо левых главных идеалов (не обязательно коммутативное), а X — модуль над $\mathscr{K}$.

Изучим СЛН-коллинеацию проективных пространств над кольцом $\mathscr{K}$. В отличие от векторных пространств над телами, в случае $\mathscr{K}$-модулей коллинеации не определяют решеточный изоморфизм. Однако они в какой-то степени порождают решеточный гомоморфизм модулей. Полнее это будет выявлено ниже в § 6, где будет показано, что решеточных гомоморфизмов, в прямом понимании этого слова для модулей (и даже для лиевых алгебр), практически не существует.

Для $\mathscr{K}$-модуля X обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ решетку всех подмодулей. Пусть X_1 — модуль над $\mathscr{K}_1$. Исследуем отображения

$$f:\mathfrak{M}(X)\to\mathfrak{M}(X_1),$$

которые совместимы с операцией решеточного объединения. Поскольку такие отображения однозначно определены их ограничением на проективном пространстве, то естественно сначала рассмотреть отображения $f:P(X)\to\mathfrak{M}(X_1)$.

Предложение 4. Пусть $f:P(X)\to\mathfrak{M}(X_1)$ — отображение, сохраняющее линейную независимость такое, что для любых точек p_1, p_2, $p_3 \in P(X)$ из $p_1 \subset p_2+p_3$ следует $f(p_1)\subset f(p_2)+f(p_3)$, тогда $f(P(X))\subset P(X_1)$.

Таким образом, отображение $f:P(X)\to\mathfrak{M}(X_1)$ является композицией СЛН-коллинеации (обозначаемой также через f) $P(X)\to P(X_1)$ и естественного вложения $P(X_1)\to\mathfrak{M}(X_1)$.

Пусть X_0 — модуль без кручения над кольцом главных идеалов $\mathscr{K}$, F — тело частных $\mathscr{K}$. Рассмотрим тензорное произведение $\bar{X}=F\otimes_{\mathscr{K}} X_0$ и каноническое отображение $i:X_0\to F\otimes_{\mathscr{K}} X_0$; оно инъективно. X можно трактовать как $\mathscr{K}$-подмодуль F-векторного пространства $\bar{X}$. Ясно, что $FX_0= =\langle FX_0\rangle=\bar{X}$. Предположим, что F_1 — тело и $\mathscr{K}_1$ — подкольцо F_1; $\bar{X}_1$ есть F_1-пространство и X_0^1 — такой $\mathscr{K}$-подмодуль X_1, что $\langle F_1X_0^1\rangle=\bar{X}_1$; аналогично, X_0 — такой $\mathscr{K}$-подмодуль, что $\langle FX_0\rangle=\bar{X}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(X_0)$ и $P(X_0)$ соответственно решетку $\mathscr{K}$-подмодулей и проективное пространство $\mathscr{K}$-модуля X_0. Изучим проективность $\mu:\bar{X}\to\bar{X}_1$ относительно вложения тел $\sigma:F\to F_1$, которая сохраняет линейную независимость. Предположим, кроме того, что имеется отображение $f:P(X_0)\to P(X_0^1)$.

Предложение 5. Если сохраняющая линейную независимость σ-проективность μ такая, что существует подкольцо K_1, $\sigma(\mathscr{K})\subseteq K_1\subseteq F_1$ такое, что $K_1\mu(X_0)\subseteq X_0^1$ и $f(\mathscr{K}x)=K_1\mu(x)$ для всех $x\in X_0$, то f — СЛН-коллинеация.

Действительно, пусть для точек p_1, p_2, $p_3\in P(X_0)$ имеем $p_1\subseteq p_2+p_3$ и пусть x_1, x_2, x_3 — унимодулярные элементы, порождающие эти точки, тогда существуют m, $n\in\mathscr{K}$, что $x_1=mx_2+nx_3$. Следовательно,

$$\mu(x_1)=\sigma(m)\mu(x_2)+\sigma(n)\mu(x_3)\Rightarrow K_1\mu(x_1)\subseteq K_1\sigma(k)\mu(x_2)+$$

$$+K_1\sigma(k)\mu(x_3)=K_1\mu(x_2)+K_1\mu(x_3)\Rightarrow f(\mathscr{K}x_1)\subseteq f(\mathscr{K}x_2)+f(\mathscr{K}x_3),$$

т. е. f — коллинеация. Покажем, что f сохраняет линейную независимость. Действительно, так как

$$0 \neq F_1(f(x)) \cap F_1(f(y)) = F_1(K_1(f(x)) \cap F_1(K_1(f(y))),$$

то $\mu(x) \in F_1\mu(y)$, поэтому $x \in Fy$ противоречиво. Предложение доказано.

Справедливо в некоторой степени и обратное утверждение, а именно

Теорема 1 (представление коллинеации проективностями). Пусть $\dim \overline{X} \geqslant 3$ и $f: P(X_0) \to P(X_0^1)$ — СЛН-коллинеация, тогда существуют сохраняющая линейную независимость σ-проективность μ: $\overline{X} \to \overline{X}_1$ и подкольцо K_1 такие, что $\sigma(\mathscr{K}) \subseteq K_1 \subseteq F_1$, $K_1\mu(X_0) \subseteq X_0^1$ и $f(\mathscr{K}x) = K_1\mu(x)$.

Подкольцо K_1 и отображения μ и σ, определенные теоремой, в общем, не однозначны. Действительно, если $0 \neq a \in F_1$, то тогда $K_2 := K_1 a^{-1}$ есть $\mathscr{K}_1$-подмодуль и $\mu_1 := a\mu$ — проективность относительно $\sigma_1 = a\sigma a^{-1}$, так как

$$K_2\sigma_1(\mathscr{K}) = K_1 a^{-1} a\sigma(\mathscr{K}) a^{-1} = K_1\sigma(\mathscr{K}) a^{-1} = K_1 a^{-1} = K_2 \Rightarrow \sigma_1(\mathscr{K}) \subseteq K_2;$$

$$K_2\mu_1(x) = K_1 a^{-1} a\mu(x) = K_1\mu(x).$$

На самом деле, K_1 и μ (с точностью до мультипликативной константы) определены однозначно. Более того, справедливо следующее

Предложение 6. Пусть $\mu: \overline{X} \to \overline{X_1}$ и $\mu_1: \overline{X} \to \overline{X_1}$ — проективности, сохраняющие линейную независимость относительно σ, σ_1 и $\dim \overline{X} \geqslant 2$. Если K и K_1 — подкольца F_1 такие, что $K\mu(x) = K_1\mu_1(x)$, $x \in X$ и $\sigma_1(\mathscr{K}) \subseteq K_1 \subseteq F_1$, $\sigma(\mathscr{K}) \subseteq K \subseteq F_1$, то найдется $a \in F$, что $K_1 = Ka^{-1}$, $\mu_1 = a\mu$.

Действительно, пусть точки Fx и Fy различны. Тогда существуют a, b, $c \in F$, для которых

$$\mu_1(x) = a\mu(x), \quad \mu_1(y) = a\mu(y), \quad \mu_1(x+y) = c\mu(x+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\mu(x) + b\mu(y) = \mu_1(x) + \mu_1(y) = \mu_1(x+y) = c\mu(x+y) \Rightarrow a = b = c.$$

С другой стороны, так как $FX_0 = \overline{X}$, имеем $\mu_1(x) = a\mu(x)$ для всех $x \in \overline{X}$ поэтому

$$K\mu(x) = K_1\mu_1(x) = K_1 a\mu(x) \Rightarrow K = K_1 a, \quad K_1 = Ka^{-1}.$$

Каждое отображение $f: P(X_0) \to \mathfrak{M}(X_0^1)$ определяет отображение $f: \mathfrak{M}(X_0) \to \mathfrak{M}(X_0^1)$, которое сохраняет объединение, т. е. совместимо с операцией «$\cup$». Следуя Цаппа [60], произвольное отображение f из $\mathfrak{M}(X_0)$ в $\mathfrak{M}(X_0^1)$ назовем верхним (нижним) гемитрофизмом модулей X_0 и X_0^1, если оно сохраняет операцию объединения (пересечения). Таким образом, $f: P(X_0) \to \mathfrak{M}(X_0^1)$, где $f(\mathscr{K}x) = K_1\mu(x)$, $\sigma(\mathscr{K}) \subseteq K_1 \subseteq F_1$ может быть трактовано как отображение, которое определено на точках и затем продолжено до верхнего гемитрофизма модулей X_0 и X_0^1. Легко видеть, что если f, μ, σ и K_1 определены теоремой 1, то существует ровно один верхний гемитрофизм $\bar{f}$ им определенный. Действительно, определим для всех $Y \in \mathfrak{M}(X_0)$

$$\bar{f}:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1),\ \bar{f}(\mathscr{K}x)=f(\mathscr{K}x),\ x\in X_0,\ \bar{f}(Y)=\langle K_1\mu(Y)\rangle.$$

Оно корректно, так как K_1 есть $\mathscr{K}_1$-подмодуль F_1 и следует иметь ввиду $\langle K_1\mu(x)\rangle = K_1\mu(x)$.

Представление решеточных изоморфизмов модулей проективностями (основная теорема проективной геометрии) можно обобщить в разные направления: рассмотреть более общие кольца и модули над ними, изучить изоморфизмы подрешеток решеток подмодулей и т. д. Однако изучение решеточных гомоморфизмов фактически сводится к изучению решеточных изоморфизмов (см. § 6). Вместе с тем в этом аспекте основную теорему проективной геометрии можно обобщить следующим образом: описать не решеточные гомоморфизмы, а такие отображения (верхние гемитрофизмы) f, которые сохраняют операцию «$\cup$» и только нулевое пересечение, т. е. если $Y_1\cap Y_2=0$, то $f(Y_1)\cap f(Y_2)=0$. Эти отображения мы назовем гемитрофизмами. Они полностью представляются проективностями и в этом обобщении основная теорема проективной геометрии имеет следующий вид.

Теорема 2. Если $\dim \bar{X}\geqslant 3$, то $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1)$ тогда и только тогда является гемитрофизмом, когда существует сохраняющая линейную независимость проективность μ относительно вложения $\sigma: F\to F_1$ и подкольцо K_1 такое, что $\sigma(\mathscr{K})\subseteq K_1\subseteq F_1$ и для всех $Y\in\mathfrak{M}(X_0)$, $f(Y)=K_1\mu(Y)$, $K_1\mu(X_0)\subseteq X_0^1$.

Если отображения f, σ, μ и подкольцо $K_1\subseteq F_1$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то f — гемитрофизм. Действительно, так как F_1 — тело частных $\mathscr{K}_1$, то для Z_1, $Z_2\in\mathfrak{M}(X_0^1)$ таких, что $Z_1\cap Z_2=0$, имеем $F_1Z_1\cap F_1Z_2=0$; следовательно, $\operatorname{rank} Z_1=\dim F_1Z_1$, и значит условие $Z_1\cap Z_2=0$ эквивалентно $F_1Z_1\cap F_1Z_2=0$. Далее, ясно что f — верхний гемитрофизм. Имеем $Y_1\cap Y_2=0$,

$$F_1f(Y_1)\cap F_1f(Y_2)=F_1K_1\mu(Y_1)\cap F_1K_1\mu(Y_2)=F_1\mu(Y_1)\cap F_1\mu(Y_2)=0,$$

так как μ сохраняет линейную независимость.

Предположим теперь, что $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1)$ — гемитрофизм. Определим $f_1: P(X_0)\to P(X_0^1)$ следующим образом: если точка $\mathscr{K}x=p\in P(X_0)$, то $f_1(p)=f(\mathscr{K}x)$. Тогда f — СЛН-коллинеация и, следовательно, из теоремы 1 следует справедливость теоремы 2.

Заметим, что если $\mathscr{K}_1=F_1$, а μ определено условием теоремы, тогда $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_1)$, $f(Y)=F_1\mu(Y)$ есть решеточный гомоморфизм, сохраняющий размерность. Для частного случая, когда $\mathscr{K}_1=F_1$, теорема выходит за рамки классической теоремы проективной геометрии, так как там изучаются только решеточные изоморфизмы, тогда как теорема 2 полностью описывает отображения, сохраняющие операцию объединения и нулевое пересечения — гемитрофизмы. Справедливо следующее легко проверяемое.

Предложение 7. Если отображения μ и σ определены условиями теорем 1 и 2 и $P(\bar{X}_1)\subseteq\{F_1 f(Z),\ Z\in\mathfrak{M}(X)\}$, то они биективны.

§ 4. Основная теорема проективной геометрии над кольцами

В этом параграфе приведен один вариант основной теоремы проективной геометрии в случае модулей над кольцами главных идеалов. Заметим, что если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, для некоторых $0\neq y\in\bar{X}_1$ и $0\neq x\in X_0$ имеем $f(\mathscr{K}x)=\mathscr{K}_1 y$, тогда σ-проективность μ сохраняет линейную независимость и для всех $Y\in\mathfrak{M}(X_0)$ имеем $f(Y)=\mathscr{K}_1\mu(Y)$, т. е. в теореме 2 можно предполагать: $K_1=\mathscr{K}_1$. Действительно, имеем $\mathscr{K}_1 y=f(\mathscr{K}x)=K_1\mu(x)$, т. е. существует $k\in K_1$, что $y=k\mu(x)$, поэтому $K_1=\mathscr{K}_1 k$. Таким образом, $f(Y)=\langle\mathscr{K}_1 k\mu(x)\rangle=\langle\mathscr{K}_1\mu_1(x)\rangle$, где $\mu_1=k\mu$ и $\sigma_1=k\sigma k^{-1}$.

Предположим, что $\dim(\bar{X})\geqslant 3$ и $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1)$ — некоторое отображение. Предположим, кроме того, что F_1 — тело частных $\mathscr{K}_1$ и существует биективная σ-проективность $\mu:\bar{X}\to\bar{X}_1$, а также подкольца $K_1\subseteq F_1$ и $K\subseteq F$ такие, что

$$\begin{gathered}\langle K_1\mu(K)\rangle=\mathscr{K},\ \langle K\mu^{-1}(K_1)\rangle=\mathscr{K},\ X_0^1=\langle K_1\mu(X_0)\rangle,\\ f(Y)=\langle K_1\mu(Y)\rangle \text{ для всех } Y\in\mathfrak{M}(X_0).\end{gathered}\tag{*}$$

Тогда f — решеточный изоморфизм. Действительно, определим $f_1:\mathfrak{M}(X_0^1)\to\mathfrak{M}(X_0)$ через $f_1(Z)=\langle K\mu^{-1}(Z)\rangle$, $Z\in\mathfrak{M}(X_0^1)$. Имеем

$$f(f_1(Z))=\langle K_1\mu(K\mu^{-1}(Z))\rangle=\langle K_1\sigma(K)Z\rangle=\langle\mathscr{K}_1 Z\rangle=Z,$$

т. е. $ff_1=\mathrm{id}$. Следовательно, f — решеточный изоморфизм.

Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 8. В условиях теоремы 2, если f — решеточный изоморфизм, то существуют изоморфизм $\sigma:F\to F_1$ и СЛН-проективность μ такие, что выполняются равенства (*).

Доказательство. Из предложения 7 следует, что μ и σ биективны и поэтому $\dim\bar{X}=\dim\bar{X}_1\geqslant 3$.

Определим, как выше, проективность $\mu_1:\bar{X}_1\to\bar{X}$ относительно изоморфизма тел $\sigma_1:F_1\to F$ и подкольцо $\mu_1(\mathscr{K}_1)\subseteq K_0\subseteq F$ так, что $f^{-1}(Z)=\langle K_0\mu_1(Z)\rangle$ для всех $Z\in\mathfrak{M}(X_0^1)$. Для любого $Z\in\mathfrak{M}(X_0^1)$ имеем $Z=ff^{-1}(Z)=\langle\langle K_1\sigma(K)\rangle\mu\mu_1(Z)\rangle$. Из предложения 6 следует, что существует такой элемент $0\neq a\in F$, что $\langle K_1\sigma(K_0)\rangle=\mathscr{K}_1 a^{-1}$, $\mu\mu_1=a\,\mathrm{id}(\bar{X})$. Определим $K:=K_0\mu^{-1}(a)$,

$\mu_2:=\mu^{-1}(a^{-1})\mu_1$. Так как

$$\mu(\sigma^{-1}(a^{-1})\mu_1)=a^{-1}\mu\mu_1=\mathrm{id}(\bar{X}_1),$$

имеем $\mu_2=\mu^{-1}$. Далее,

$$\langle K_1\sigma(K)\rangle=\langle K_1\mu(K_0\mu^{-1}(a))\rangle=\langle K_1\sigma(K_0)a\rangle=$$
$$=\langle K_1\sigma(K_0)\rangle a=\mathcal{K}_1a^{-1}a=\mathcal{K}_1\Rightarrow\sigma_2=\sigma^{-1}.$$

Замечание. Из того, что K_1 есть $\mathcal{K}_1$-подмодуль F_1 и K — $\mathcal{K}$-подмодуль F, имеем $\langle K_1\sigma(K_0)\rangle=\mathcal{K}_1$, $\langle K\sigma(K_1)\rangle=\mathcal{K}$. Следовательно, $K_1=\mathcal{K}_1K_1=\langle K_1\sigma(K_0)K_1\rangle=\langle K_1\sigma(K_0)\rangle=$ $=\langle K_1\sigma(\langle K_0\sigma^{-1}(K_1)\rangle)\rangle=\langle K_1\mu(\mathcal{K})\rangle$, $K=\langle K\mu^{-1}(\mathcal{K}_1)\rangle$. Таким образом K_1 и K удовлетворяют условию теоремы.

Укажем теперь одно достаточное условие на кольце $\mathcal{K}$ для того, чтобы каждый решеточный изоморфизм $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1)$ можно было бы представить σ-проективностью $\mu:\bar{X}\to\bar{X}_1$ и при этом для всех $Y\in\mathfrak{M}(X_0)$, $f(Y)=\mu(Y)$.

Теорема 3 (основная теорема проективной геометрии). Пусть $\dim X\geqslant3$ и $\mathcal{K}$ — кольцо главных левых идеалов $f:\mathfrak{M}(X_0)\to\mathfrak{M}(X_0^1)$ — решеточный изоморфизм и F_1 — тело частных $\mathcal{K}_1$. Тогда существуют изоморфизм $\sigma:F\to F_1$ и биективная σ-проективность $\mu:\bar{X}\to\bar{X}_1$ такие, что $\sigma(\mathcal{K})=\mathcal{K}_1$ и для всех $Y\in\mathfrak{M}(X_0)$, $f(Y)=\mu(Y)$.

В последующих параграфах будем изучать ситуации, при которых основная теорема проективной геометрии справедлива для лиевых алгебр (или ослабленный ее вариант: когда решеточный изоморфизм влечет проективность). При этом мы будем использовать как теорему 3 (некоммутативный случай), так и теорему Оянгурена и Сридхарна [51] (коммутативная область целостности).

§ 5. Решеточные свойства алгебр Ли

В этом параграфе доказаны утверждения, которые будут использованы для доказательства основной теоремы проективной геометрии в алгебрах Ли (см. § 7). Рассматривается, какие свойства алгебр Ли сохраняются при решеточных изоморфизмах и когда из решеточного изоморфизма следует проективность алгебр Ли. Здесь под проективностью двух алгебр Ли понимаем биекцию, которая является проективностью модулей и согласована с лиевым умножением.

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, L — алгебра Ли над коммутативным кольцом главных идеалов $\mathcal{K}$, $\mathfrak{M}(L)$ — решетка подалгебр Ли L. В 1935 г. Биркгофом [23] было введено понятие геометрической решетки (см. также [29], [44]). Решетка $\mathfrak{M}$ называется геометрической, если $\mathfrak{M}$ — модулярная, алгебраическая решетка, в которой компактными элементами являются конечные объединения атомов и только они. Напомним, что элемент $a \in \mathfrak{M}$ компактен, если для любого подмножества $X \subseteq \mathfrak{M}$ из $a \subseteq \bigcup X$ следует $a \subseteq \bigcup X_1$ для некоторой конечной части $X_1 \subseteq X$. Решетка $\mathfrak{M}$ называется алгебраической. если любой ее элемент — решеточное объединение компактных элементов. Алгебру Ли L назовем геометрической, если решетка подалгебр $\mathfrak{M}(L)$ — геометрическая решетка.

С учетом теорем 1, 2 из [40] (см. также [14]) справедлива

Теорема 4. Алгебра Ли L над полем является геометрической тогда и только тогда, когда она либо абелева, либо почти абелева, либо простая трехмерная нерасщепляемая $SU(2)$, либо типа S_∞.

Напомним, что S_∞ — это такая бесконечномерная алгебра Ли, в которой каждая собственная подалгебра одномерна (монстр Тарского в алгебрах Ли). Алгебра Ли L над кольцом $\mathcal{K}$ почти абелева, если каждый подмодуль в L является подалгеброй.

Понятие геометрической решетки обобщается следующим образом: элемент $a \in \mathfrak{M}$ назовем циклическим, если $\mathfrak{M}(\langle a \rangle)$ — дистрибутивная решетка с условием максимальности. $\mathfrak{M}$ называется PI — геометрической, если она — алгебраическая решетка, в которой компактными являются конечные объединения циклических элементов, и только они. Если $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо главных идеалов, то решетка подмодулей любого $\mathcal{K}$-модуля — PI-геометрическая решетка. Алгебру Ли L назовем PI-геометрической, если $\mathfrak{M}(L)$ есть PI-геометрическая решетка. Тогда справедлив аналог теоремы 4.

В середине 60-х годов внимание многих математиков привлекло изучение алгебры Ли с точки зрения решеток ([20], [21], [33], [35], [36] и др.), и сразу центральной стала задача: насколько класс разрешимых алгебр Ли определяется решеткой своих подалгебр? В работе [20] Барнес получил положительный результат для конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. При алгебраической незамкнутости ситуация усложняется: простая алгебра Ли $SU(2)$ допускает решеточный изоморфизм на любую двумерную алгебру (когда алгебры определены над бесконечным полем). В [33] Гото показал, что для конечномерных вещественных алгебр Ли это единственное исключение. К настоящему времени имеется большое количество работ, посвященных этой проблеме ([3], [4], [5], [7], [9], [10], [55], [56], [58] и др.), в которых задача решается при различных ограничениях на размерность, основные кольца, принадлежность алгебр Ли к различным классам и др. Отказываясь от этих ограничений, в предположении, что L не содержит подалгебр типа $SU(2)$ или S_∞, нами доказана

Теорема 5. Пусть L и L_1 — алгебры Ли произвольной размерности над коммутативным кольцом главных идеалов и

$\mathfrak{M}(L)\cong\mathfrak{M}(L_1)$. Если L — разрешимая алгебра Ли, то L_1 — такая же, за исключением следующих случаев:

(1) $\mathscr{K}$-алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char}\mathscr{K}=2$, L — трехмерная нильпотентная, а L_1 — простая алгебра Ли с базисом v_{-1}, v_0, v_1 и с соотношениями

$$[v_{-1}, v_0]=v_{-1}, [v_{-1}, v_1]=v_0, [v_0, v_1]=v_1; \qquad (*)$$

(2) $\operatorname{char}\mathscr{K}=2$, L имеет базис x_1, x_0, x_1 и соотношения

$$[x_{-1}, x_0]=\alpha x_1, [x_{-1}, x_1]=x_0, [x_0, x_1]=0, \qquad (**)$$

а L_1 — простая алгебра Ли с базисом v_{-1}, v_0, v_1 и с соотношениями

$$[v_{-1}, v_0]=v_{-1}+\alpha v_1, [v_{-1}, v_1]=v_0, [v_0, v_1]=v_1, \sqrt{\alpha}\notin\mathscr{K}. \quad (***)$$

Замечание. Если $\mathscr{K}$ — конечное или алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики или кольцо, не являющееся полем, то ограничения на L_1 излишни.

В случае алгебраически замкнутых полей характеристики 2, простые алгебры Ли из пунктов (1) и (2) теоремы 5 изоморфны.

При ограничениях теоремы на алгебру L_1 справедливы следующие факты:

(a) Если $R(L)$ — разрешимый радикал L, т. е. максимальный разрешимый идеал и $\mathfrak{M}(L)\overset{f}{\neq}\mathfrak{M}(L_1)$, $0\neq R(L)\neq L$, то $f(R(L))= =R(L_1)$.

(b) Если L — радикальная алгебра в смысле Плоткина, то такова и L_1, за исключением случаев (1) и (2) из теоремы 5. Если $\tilde{R}(L)$ — верхний радикал и $0\neq\tilde{R}(L)\neq L$, то $f(\tilde{R}(L))= =\tilde{R}(f(L))$.

В ряде работ [20], [33], [5], [57] изучается вторая из формулируемых выше задач для простых (и полупростых) алгебр Ли. Позитивные ответы получены Барнесом для алгебраически замкнутых полей характеристики нуль [20], Гото для вещественных конечномерных алгебр [33], Товерсом [57], А. Г. Гейном [5] для простых алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Имеет место следующая

Теорема 6. Пусть $\mathscr{K}$ — поле нулевой характеристики и S — простая конечномерная расщепляемая алгебра Ли над $\mathscr{K}$. Тогда если $\mathfrak{M}(S)\cong\mathfrak{M}(L)$, то $S\cong L$ ([57], [5]). Если же $\mathscr{K}$ — конечное поле, либо алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики, S — простая конечномерная алгебра Ли над $\mathscr{K}$ и $\mathfrak{M}(S\times S)\cong\mathfrak{M}(L)$, то $S\times S\cong L$.

Заметим, что в случае конечных полей предположение конечномерности можно отбросить.

Доказательство второй части теоремы опирается на теорему 5, предложения (а), (в) и использует схему доказательства Судзуки.

Справедливо также следующее

Предложение 9. Если L — чистая разрешимая алгебра Ли и $f:\mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм, то образ квазиидеала — квазиидеал, если же L — чистая трехмерная нильпотентная алгебра Ли, то такова и L_1.

Напомним, что алгебра L называется чистой, если для любого $x\in L$ решетка $\mathfrak{M}(\langle x\rangle)$ бесконечна. Подалгебра $X\subseteq L$ называется квазиидеалом, если для любого $l\in L$ имеем $[X, l]\subseteq X\oplus l$.

Ясно, что если $\mu: L\to L_1$ — проективность алгебр Ли относительно изоморфизма $\sigma:\mathscr{K}\to\mathscr{K}_1$, тогда между решетками подалгебр $\mathfrak{M}(L)$ и $\mathfrak{M}(L_1)$ существует изоморфизм. Обратное не всегда верно. Будем говорить, что решеточный изоморфизм $f:\mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$ порождается σ-проективностью μ, если для любой подалгебры $X\subseteq L$ имеем $f(X)=\mu(X)$. Следующий простой пример показывает, что классическая основная теорема проективной геометрии для нильпотентных алгебр не верна.

Пример. Пусть $L=\langle a, \ b\rangle$ — свободная 2-нильпотентная алгебра Ли над полем F. Ясно, что $\dim L=3$. Пусть f — автоморфизм решетки $\mathfrak{M}(L)$, который оставляет на месте все двумерные подалгебры, а одномерные отображает произвольно, но тождественно по модулю коммутанта, т. е. для любого

$$f(\langle x\rangle)=\langle x+z\rangle,\ z=[a, b].$$

Ясно, что решеточный автоморфизм f не индуцируется никакой проективностью алгебры L.

Скажем, что алгебра Ли L не имеет кручения, если $\alpha x\neq 0$ для любого $\alpha\in\mathscr{K}$. Легко проверяется следующее

Предложение 10. Пусть L и L_1 — конечно порожденные нильпотентные алгебры Ли без кручения над коммутативными кольцами $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$. Если

$$[L, L]\subseteq A\subseteq Z(L),\quad L/A=\sum_{i=1}^{n}(a_i+A),$$

$$[L_1, L_1]\subseteq A_1\subseteq Z(L_1),\quad L_1/A_1=\sum_{i=1}^{n}(b_i+A_1)$$

и существует проективность $\mu: A\to A_1$ относительно изоморфизма $\sigma:\mathscr{K}\to\mathscr{K}_1$ такая, что $\mu([a_i, a_j])=[b_i, b_j]$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$, то соответствие

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i+h\right)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(\alpha_i)\, b_i+\mu(h),\quad h\in A,$$

является проективностью между L и L_1 относительно того же σ.

Пользуясь этим предложением и теоремой из [51], можно доказать, что справедлива

Теорема 7. Если 2-нильпотентные алгебры Ли без кручения L и L_1 над коммутативными кольцами $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$ решеточно изоморфны и $\dim L>3$, то между ними существует проективность.

Замечание. Для общих основных колец теорема доказана в [11]. Случай, когда $\mathscr{K}$ — поле, рассмотрен в [3]. Из теоремы не следует, что L и L_1 изоморфны [3]. Для n-нильпотентных алгебр Ли, где $n\geqslant 3$, теорема не верна [11].

Если алгебры L и L_1 определены над одним и тем же кольцом $\mathscr{K}$, то ограничение $\dim L>3$ можно отбросить: в случае $\dim L=3$, L и L_1 — свободные нильпотентные алгебры класса 2 и $L\cong L_1$; случай $\dim L=2$ тривиален.

Если $\mathscr{K}=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, то в условиях теоремы $L\cong L_1$ без предположения $\dim L>3$. Действительно, если $\dim L>3$, все ясно. При $\dim L=3,2$ имеем $|\mathfrak{M}(L)|=p^3$ или $p^2\Leftrightarrow\dim L=3,2\Rightarrow\mathscr{K}\cong\mathscr{K}_1\cong\cong\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Теорема 8. Пусть L и Q — алгебры над кольцами $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$ соответственно. Если L — свободная алгебра Ли и $f:\mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(Q)$ — решеточный изоморфизм, то $L\cong Q$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда L (и Q) имеют конечное число образующих. Можно показать, что f переводит нижний центральный ряд алгебры L

$$L=L_0\supset L_1\supset\ldots\supset L_n\supset\ldots$$

в нижний центральный ряд алгебры Q

$$Q=Q_0\supset Q_1\supset\ldots\supset Q_n\supset\ldots,\quad Q_i=f(L_i),$$

где факторы L/L_2 и Q/Q_2 решеточно изоморфны. Следовательно, между ними существует проективность μ относительно изоморфизма $\sigma:\mathscr{K}\to\mathscr{K}_1$ (теорема 7). Кроме того, факторы L/L_i и Q/Q_i имеют одинаковый класс нильпотентности и одинаковое полинильпотентное строение. Так как

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}L_i=0 \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty}Q_i=0$$

и L и Q имеют одинаковое количество образующих, то существует гомоморфизм $\alpha:L\to Q$.

Решеточный изоморфизм f индуцирует решеточные изоморфизмы на факторах нижних центральных рядов L и Q. Эти факторы имеют одинаковую конечную размерность, так как для абелевой алгебры размерность — количество образующих, а последнее сохраняется при решеточных изоморфизмах.

Таким образом,

$$\dim L/L_i=\dim Q/Q_i,\ i=1,2,\ldots.$$

Отсюда следует, что α — проективность по модулю каждого члена нижнего центрального ряда L. Так как

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i = 0,$$

то α — проективность. Теорема доказана.

Замечание. Если в условиях теоремы 8 предположить, что $\mathscr{K} \cong \mathscr{K}_1$, то справедливость утверждения можно вывести без предположения коммутативности $\mathscr{K}$, однако на $\mathscr{K}$ надо накладывать условие нётеровости.

Решеточный изоморфизм f назовем нормальным, если f и f^{-1} идеалы переводят в идеалы.

Теорема 9. Если L и Q-алгебры Ли над кольцами $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$ соответственно, L — свободная полинильпотентная алгебра, $f: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(Q)$, и f — нормальный решеточный изоморфизм, то между L и Q существует проективность.

Схема ее доказательства та же, что и у теоремы 8. Если предположить, что Q не содержит подалгебр типа $SU(2)$ и S_∞, то ограничение нормальности на f излишне.

Пример, приведенный в начале параграфа, показывает, что в теореме 9 f может не порождаться проективностью. В § 7 будут изучены случаи, когда решеточные изоморфизмы алгебр Ли порождаются проективностями.

Предложение 11 ([8]). Если решеточный изоморфизм f алгебры Ли без кручения над кольцом $\mathscr{K}$ порождается проективностью, то только одной (см. также, [9], предложение 11).

Пользуясь теоремой Оянгурена, Сридхарана [51], а также теоремой 3, можно доказать

Предложение 12. Если $r: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм между нильпотентными алгебрами Ли без кручения над коммутативными кольцами $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$, либо над кольцами левых главных идеалов и $\dim Z(L) \geqslant 2$, то существует биекция $\mu: L \to L_1$ относительно изоморфизма $\sigma: \mathscr{K} \to \mathscr{K}_1$ такая, что $f(\langle x \rangle) = \langle \mu(x) \rangle$ и μ есть σ-проективность на всех абелевых подалгебрах.

§ 6. $\mathscr{L}$-гомоморфизмы алгебр Ли

Цель этого параграфа — изучение решеточных или, короче, $\mathscr{L}$ — гомоморфизмов алгебр Ли (гомоморфное отображение решетки $\mathfrak{M}(L)$ на некую решетку $\mathscr{L}$). Такие решеточные отображения алгебр Ли были описаны в [39]. Будем пользоваться терминами: $\mathscr{K}$-точка — свободный одномерный $\mathscr{K}$-модуль, локально одномерная алгебра — если каждая конечно порожденная подалгебра точка. Пусть $\lambda: \mathfrak{M}(L) \to \mathscr{L}$ — решеточный гомоморфизм; λ назовем полным, если для любого множества индексов Λ выполняются равенства:

$$\lambda(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha \lambda(A_\alpha),\quad \lambda(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha \lambda(A_\alpha),\quad \alpha\in\Lambda.$$

Не каждый $\mathscr{L}$-гомоморфизм — полный.

Пример. Пусть $\mathscr{K}$ — кольцо главных идеалов, $X=\langle x\rangle$ — точка над $\mathscr{K}$. Отображение $\lambda:\mathfrak{M}(\langle x\rangle)\to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}=\{0, 1\}$

$$\lambda(X_i)=\begin{cases}0, \text{ если } X_i=0,\\ 1, \text{ если } 0<X_i\leqslant X\end{cases}$$

не есть полный $\mathscr{L}$-гомоморфизм. λ назовем собственным, если λ — не изоморфизм и не тривиальный гомоморфизм.

Теорема 10 ([39], теорема 1). Алгебра Ли над полем не допускает собственных $\mathscr{L}$-гомоморфизмов на полную решетку с нулем.

Доказательство. Пусть $\lambda:\mathfrak{M}(L)\to\mathscr{L}$ — собственный $\mathscr{L}$-гомоморфизм, 0 — нулевой элемент $\mathscr{L}$. Предположим, что $A_1, A_2\subseteq L$ такие, что $\lambda(A_1)=\lambda(A_2)$. Предположим, что $A_1\setminus A_2\neq\varnothing$. Если $<x>\subset A_1\setminus A_2$, то

$$\lambda(\langle x\rangle)=\lambda(A_1\cap\langle x\rangle)=\lambda(A_1)\cap\lambda(\langle x\rangle)=$$
$$=\lambda(A_2)\cap\lambda(\langle x\rangle)=\lambda(A_2\cap\langle x\rangle)=\lambda(0)=0.$$

Пусть $y\in L\setminus\langle x\rangle$. Тогда

$$\lambda(\langle y\rangle)=\lambda((\langle y+x\rangle\cup\langle x\rangle)\cap\langle y\rangle)=(\lambda(\langle y+x\rangle)\cup$$
$$\cup\lambda(\langle x\rangle))\cap\lambda(\langle y\rangle)=\lambda(\langle y+x\rangle)\cap\lambda(\langle y\rangle)=$$
$$=\lambda(\langle x+y\rangle\cap\langle y\rangle)=\lambda(0)=0\Rightarrow\lambda(L)=0.$$

Скажем, что алгебра L допускает $\mathscr{L}$-гомоморфизм на алгебру L_1, если существует гомоморфизм $\lambda:\mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$.

Предложение 13. Пусть L — чистая локально одномерная алгебра Ли над коммутативным кольцом главных идеалов $\mathscr{K}$, тогда L допускает собственный полный $\mathscr{L}$-гомоморфизм на $\mathscr{K}$-точку.

Доказательство. Каждый отличный от нуля элемент $u\in L$ порождает точку $\langle u\rangle$. Построим отображение

$$\lambda:\mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(\langle u\rangle),\ \lambda(A)=A\cap\langle u\rangle,\ A\subseteq L.$$

Очевидно, что $\lambda(\bigcap_\alpha A_\alpha)=(\bigcap_\alpha A_\alpha)\cap\langle u\rangle=\bigcap_\alpha(A_\alpha\cap\langle u\rangle)=$ $=\bigcap_\alpha\lambda(A_\alpha)$, $\alpha\in\Lambda$. Проверим двойственное равенство. Ясно, что $\lambda(\bigcup_\alpha A_\alpha)=(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap\langle u\rangle\subseteq\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap\langle u\rangle)=\bigcup_\alpha\lambda(A_\alpha)$. Пусть $z\in\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap\langle u\rangle)$. Тогда существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что $z\in A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}\cup\ldots\cup A_{\alpha_n}$. Обозначим $V=\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap\langle u\rangle)$. Если $V=0$, то все очевидно. Предположим $V\neq 0$. Так как $\langle u\rangle$ — точка, то существует конечное множество индексов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$

такое, что $V = \bigcup_{j=1}^{m} (A_{\mu_j} \cap \langle u \rangle)$. Так как $\mathfrak{M}(L)$ — дистрибутивная решетка [9], то имеем

$$V = \bigcup_{j=1}^{m} (A_{\mu_j} \cap \langle u \rangle) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{\lambda_i} \cap \langle u \rangle) \right) =$$

$$= \left[\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_{\mu_j} \right) \cap \langle u \rangle \right] \cup \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \right) \cap \langle u \rangle \right] =$$

$$= \left[\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_{\mu_j} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \right) \right] \cap \langle u \rangle \subseteq (\bigcap_{\alpha} A_\alpha) \cap \langle u \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha} (A_\alpha \cap \langle u \rangle) \subseteq (\bigcup_{\alpha} A_\alpha) \cap \langle u \rangle \Rightarrow \bigcup_{\alpha} \lambda(A_\alpha) = \lambda(\bigcup_{\alpha} A_\alpha).$$

Справедливо и обратное утверждение: если L допускает $\mathcal{L}$-гомоморфизм на $\mathcal{K}$-точку, то L локально одномерна.

Предложение 14. Алгебра Ли тогда и только тогда допускает собственный $\mathcal{L}$-гомоморфизм на $\mathcal{K}$-точку, когда она локально одномерна.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 10, можно показать, что алгебра Ли L над коммутативным кольцом главных идеалов «почти не допускает» собственных $\mathcal{L}$-гомоморфизмов, т. е. справедливо

Предложение 15. Пусть чистая алгебра Ли L допускает $\mathcal{L}$-гомоморфизм $\bar{\lambda}$ на чистую алгебру Ли L_1. Тогда для каждой максимальной локально одномерной подалгебры $X \subset L$ должно существовать отображение λ, определенное в предложении 13, на максимальную локально одномерную подалгебру $X_1 \subset L_1$. Если X не точка, то λ и $\bar{\lambda}$ — изоморфизмы. Если в L имеется хотя бы одна одномерная подалгебра, не являющаяся точкой, то все максимальные локально одномерные подалгебры L таковы. Если в L_1 имеется хотя бы одна максимальная точка, то все максимальные локально одномерные подалгебры — точки.

Таким образом, если $[\mathcal{K}]$ — локально одномерный $\mathcal{K}$-модуль, то гомоморфизмами $\mathfrak{M}([\mathcal{K}]) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ вполне определяются $\mathcal{L}$-гомоморфизмы $\mathcal{K}$-алгебр Ли.

§ 7. Основная теорема проективной геометрии в алгебрах Ли

В § 6 были изучены решеточные изоморфизмы алгебр Ли и ослабленный вариант основной теоремы проективной геометрии. Для ряда классов алгебр Ли теорема верна в полной общности.

Предположим, что $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо главных идеалов, L — чистая алгебра Ли над $\mathcal{K}$, E — множество обратимых элементов.

Предложение 16. Пусть $f: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм между чистыми нильпотентными алгебрами Ли над $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$, тогда существует σ-проективность $\mu: L \to L_1$ такая, что $f(X) = \mu(X)$ для любого $X \in \mathfrak{M}(L)$.

Биекцию μ между алгебрами Ли L и L_1 назовем полупроективностью, если она является σ-проективностью на $\mathscr{K}$-модуле L и, кроме того,

$$\mu([x, y]) = \alpha[\mu(x), \mu(y)], \ \alpha \neq 0, 1, \ \alpha \in \mathscr{K}_1.$$

Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\alpha, \alpha \in I\}$ — система квазиидеалов алгебры Ли L. Систему Σ назовем фильтром, если (a) в пересечении любых двух членов фильтра $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_\beta$ содержится некоторый третий $\mathfrak{A}_\gamma \subseteq \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$; (b) пересечение всех $\mathfrak{A}_\alpha$ совпадает с нулем. Заметим, что условие (b) равносильно тому, что для каждого элемента $a \in L$ найдется член фильтра, не содержащий a; фильтр назовем строгим, если условие (b) заменено условием (b′); для каждого $a \in L$ найдется член фильтра $\mathfrak{A}_\alpha$, не содержащий ka ни для какого $0 \neq k \in \mathscr{K}$.

Алгебру Ли L назовем концентрируемой Λ-алгебрами (алгебрами из класса Λ), если в L имеется фильтр $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\alpha, \alpha \in I\}$ такой, что для любого $\mathfrak{A}_\alpha \in \Sigma$, если $L = X_\alpha \oplus \mathfrak{A}_\alpha$, то $X_\alpha \in \Lambda (\mathrm{mod}\, \mathfrak{A}_\alpha)$.

Теорема 11 (концентрирующая). Пусть Λ — такой класс алгебр Ли над кольцом $\mathscr{K}$, что решеточный изоморфизм Λ-алгебры A на алгебру A_1 над $\mathscr{K}_1$ индуцируется σ-проективностью μ, если алгебра Ли L над $\mathscr{K}$ концентрируется Λ-алгебрами со строгим фильтром $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\alpha, \alpha \in I\}$ и $f: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(L_1)$ (L_1 — алгебра Ли над $\mathscr{K}_1$) — такой решеточный изоморфизм, что $f(\mathfrak{A}_\alpha) = \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ — квазиидеал в L_1 для любого $\alpha \in I$. Тогда f порождается σ-проективностью μ.

Предположим теперь, что L — чистая нильпотентная алгебра Ли. Пусть $z \in L_{n-2}$ — фиксированный элемент из предпоследнего члена нижнего центрального ряда L. Для произвольного $x \notin L_{n-2}$ подалгебра $\langle x, z\rangle$ либо трехмерна, либо двумерная абелева. Если $\langle x, z\rangle$ двумерна, то, добавляя элемент z_0 из центра L, получим трехмерную абелеву подалгебру. Если же $x \in L_{n-1}$ и $\dim L_{n-1} \geqslant 2$, то подалгебра $\langle x, z, x_1\rangle$, где $x_1 \in L_{n-1}$, $\langle x\rangle \cap \cap \langle x_1\rangle = 0$ — также трехмерная абелева. Если же $\dim L_{n-1} = 1$, то для z либо найдется $z_1 \overline{\in} L_{n-1}$ такой, что $[z, z_1] = x$ и, следовательно, $\dim\langle x, z, z_1\rangle = 3$, либо для всех $z_1 \overline{\in} L_{n-1}$, $[z, z_1] = 0$ и подалгебра $\langle x, z, z_1\rangle$ абелева.

Пусть теперь $f: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм между чистыми нильпотентными алгебрами Ли над кольцами главных идеалов $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$. Из вышесказанного (учитывая предложение 16) заключаем, что на всех трехмерных подалгебрах, содержащих фиксированный элемент $z \in L_{n-2}$, мы можем построить биекции μ_i, $i \in E$, порождающие решеточный изоморфизм f, которые являются либо проективностями, либо полупроективностями относительно одного и того же изоморфизма.

$\sigma:\mathcal{K}\to\mathcal{K}_1$. Зафиксируем одну из этих биекций (и обозначим ее через μ) на некоторой подалгебре A. Этим мы фиксируем биекцию на подалгебре $\langle z\rangle$ и тем самым фиксируется одна определенная биекция μ на всех трехмерных подалгебрах, содержащих z. Ясно, что все эти биекции относительно одного и того же изоморфизма $\sigma:\mathcal{K}\to\mathcal{K}_1$. Таким образом, для любого элемента $x\in L$ и любого $\alpha\in\mathcal{K}$ имеем $\mu(\alpha x)=\sigma(\alpha)\mu(x)$. Пусть теперь $x_1, x_2\in L$ — произвольные элементы и $\langle x_1\rangle\cap\langle x_2\rangle=0$. Рассмотрим подалгебру $A=\langle x_1\rangle\cup\langle x_2\rangle$. Легко видеть, что

$$\mu(x_1+x_2)=\beta_1\mu(x_1)+\beta_2\mu(x_2)+l_0,$$

где β_1, β_2 — обратимые элементы кольца $\mathcal{K}_1$, а $l_0\in[f(A), f(A)]$.

Построим теперь в L подалгебру $(\alpha)L$, состоящую из элементов вида αx, где α — фиксированный элемент из $\mathcal{K}$, а x пробегает все множество L. Решеточный изоморфизм f сопоставляет подалгебре $(\alpha)L$ подалгебру $[\sigma(\alpha)]L$. Легко видеть, что между $(\alpha)L$ и $[\sigma(\alpha)]L$ можно построить биекцию, аналогичную μ и совпадающую с μ на $(\alpha)L$. Обозначим ее через μ_α. Обратимся теперь к подалгебре $\langle\alpha x_1\rangle\cup\langle\alpha x_2\rangle\equiv(\alpha)A$. К ней применимы все предыдущие рассуждения, поэтому

$$\mu(\alpha(x_1+x_2))=\sigma(\alpha)\mu(x_1+x_2)=\sigma(\alpha)(\beta_1\mu(x_1)+\beta_2\mu(x_2)+l_0),$$

$$\|$$

$$\mu(\alpha x_1+\alpha x_2)=\beta_3\mu(\alpha x_1)+\beta_4\mu(\alpha x_2)+l_\alpha\Rightarrow\sigma(\alpha)\beta_1\mu(x_1)+\sigma(\alpha)\beta_2\mu(x_2)+$$
$$+\sigma(\alpha)l_0=\beta_3\sigma(\alpha)\mu(x_1)+\beta_4\sigma(\alpha)\mu(x_2)+l_\alpha,\quad \beta_2,\ \beta_3\in E,$$
$$l_\alpha\in[f(\langle\alpha x_1,\alpha x_2\rangle),\ f(\langle\alpha x_1,\alpha x_2\rangle)]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sigma(\alpha)l_0=l_\alpha=\sigma^2(\alpha)l_1,\quad l_1\in f([A, A])\Rightarrow l_0=\sigma(\alpha)l_1.$$

Последнее равенство выполняется при любом $\sigma(\alpha)\in\mathcal{K}_1$, однако в конечно порожденной нильпотентной алгебре Ли несовместимо с условием максимальности и может выполняться лишь при $l_0=l_1=0$.

Таким образом, для произвольных независимых элементов $x_1, x_2\in L$ имеем $\mu(x_1+x_2)=\beta_1\mu(x_1)+\beta_2\mu(x_2)$, где β_1, β_2 — обратимые элементы кольца $\mathcal{K}_1$. Покажем теперь что $\beta_1=\beta_2=1$.

Пусть z — фиксированный элемент из L_{n-2}. Имеем

$$\mu[z+(x_1+x_2)]=\mu(z)+\mu(x_1+x_2)=\mu(z)+\beta_1\mu(x_1)+\beta_2\mu(x_2),$$
$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\|$$
$$\mu[(z+x_1)+x_2]=\gamma_1\mu(z+x_1)+\gamma_2\mu(x_2)=\gamma_1\mu(z)+\gamma_1\mu(x_1)+\gamma_2\mu(x_2),$$
$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\|$$
$$\mu[(z+x_2)+x_1]=\gamma_3\mu(z+x_2)+\gamma_4\mu(x_1)=\gamma_3\mu(z)+\gamma_3\mu(x_2)+\gamma_4\mu(x_1).$$

Из независимости z, x_1, x_2 имеем $\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1$. Покажем теперь, что $\mu([x_1, x_2])=\varepsilon[\mu(x_1), \mu(x_2)]$, $\varepsilon\in E_1$. Пусть $A=A_0=\langle x_1, x_2\rangle\supset A_1\supset\ldots\supset A_n\supset 0$ — нижний центральный ряд. Из нормальности решеточного изоморфизма [9] имеем $f(A_1)=$ $=f([A_0, A_0])=[f(A_0), f(A_0)]$, поэтому $\mu([x_1, x_2])=$

$=\beta[\mu(x_1), \mu(x_2)]+l_{0,1}$, где $l_{0,1}\in[f(A_0), f(A_0)]$. Поступая аналогично предыдущему, т. е. рассматривая подалгебру $\langle \alpha x_1, \alpha x_2 \rangle$, имеем

$$\mu([\alpha x_1, \alpha x_2])=\sigma^2(\alpha)\mu([x_1, x_2])=\beta\sigma^2(\alpha)[\mu(x_1), \mu(x_2)]+$$
$$+l_{\alpha,1}=\beta\sigma^2(\alpha)[\mu(x_1), \mu(x_2)]+\sigma^2(\alpha)l_{0,1}\Rightarrow l_{\alpha,1}=\sigma^2(\alpha)l_{0,1}.$$

Так как $l_{\alpha,1}=\sigma^3(\alpha)l$, то по тем же соображениям, что и выше, получаем $l_{\alpha,1}=l_{0,1}=l=0$, Таким образом, $\mu([x_1, x_2])=$ $=\beta[\mu(x_1), \mu(x_2)[$. Покажем, что β — обратимый элемент. Используя обратный решеточный изоморфизм f^{-1}, можно построить биекцию $\bar{\mu}$. Находим для нее $\bar{\mu}([\mu(x_1), \mu(x_2)])=\gamma[x_1, x_2]$, где $\gamma\in k$. Так как на точках f индуцируется проективностью, находим

$$\begin{tikzcd} \langle [\mu(x_1), \mu(x_2)] \rangle \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "f\cdot f^{-1}=\mathrm{id}"'] & \langle \gamma[x_1, x_2] \rangle \arrow[dl, "f"] \\ \langle \beta\sigma(\gamma)[\mu(x_1), \mu(x_2)] \rangle & \end{tikzcd},$$

Следовательно, $\beta, \sigma(\gamma)\in E_1$ — обратимые элементы. Используя теперь предложение 11, заключаем, что μ — либо σ-проективность, либо полупроективность. Заменой μ на $\mu_1=\beta^{-1}\mu$ второй случай сводится к первому. Таким образом, с учетом предложения 11, справедлива

Теорема 12. Пусть L и L_1 — алгебры Ли над коммутативными кольцами главных идеалов $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$, $f: \mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм. Если L — чистая локально нильпотентная алгебра Ли, то существует проективность $\mu: L\to L_1$ относительно изоморфизма $\sigma: \mathscr{K}\to\mathscr{K}_1$ такая, что $f(X)=\mu(X)$, $X\in\mathfrak{M}(L)$.

Из доказанной теоремы с учетом предложения и концентрирующей теоремы заключаем, что справедлива

Теорема 13. Пусть L — чистая неабелева свободная полинильпотентная алгебра Ли над коммутативным кольцом главных идеалов $\mathscr{K}$, L_1 — алгебра Ли над $\mathscr{K}_1$, $f: \mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм. Тогда существует σ-проективность $\mu: L\to L_1$ такая, что для любой подалгебры $X\in\mathfrak{M}(L)$, $f(X)=\mu(X)$.

Для абсолютно свободных алгебр Ли справедлива также

Теорема 14. Пусть L — свободная алгебра Ли над коммутативным кольцом главных идеалов $\mathscr{K}$; L_1 — алгебра Ли над $\mathscr{K}_1$, $f: \mathfrak{M}(L)\to\mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм. Тогда f порождается проективностью.

Теоремы 13, 14 доказаны в работе [10], там же доказана и теорема 12 с некоторым ограничением на центр ($\dim Z(L)\geqslant$ $\geqslant 2$).

Чистую алгебру Ли L над кольцом $\mathscr{K}$ назовем плотной сверхразрешимой, если L обладает рядом идеалов

$$0\subset(K_1)\subset(K_2)\subset\ldots\subset(K_\mu)=L,$$

факторы которого — локально одномерные алгебры.

Теорема 15. Пусть L — чистая неабелева плотная сверхразрешимая алгебра Ли над кольцом главным идеалов $\mathcal{K}$, $\dim L \geqslant 3$, L_1 — алгебра Ли над $\mathcal{K}_1$, $f: \mathfrak{M}(L) \to \mathfrak{M}(L_1)$ — решеточный изоморфизм. Тогда существует σ-проективность $\mu: L \to L_1$ такая, что $\mu(X) = f(X)$ для любого $X \in \mathfrak{M}(L)$.

Теорема 15 в случае, когда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 = \mathbf{Z}$, была доказана в [12], без дополнительного предположения $\dim L \geqslant 3$; в случае размерности 2 теорема не верна.

Предположение неабелевости в теоремах 13 и 15 необходимо, так как абелевы алгебры допускают решеточный изоморфизм на почти абелевы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артин Э.*, Геометрическая алгебра. Пер. с англ. М.: Наука, 1969, 283 с. (РЖМат, 1969, 6А150)
2. *Бэр Р.*, Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955, 400 с. (РЖМат, 1956, 5101 К)
3. Гейн А. Г., Проектирование алгебр Ли характеристики нуль. Изв. Высш. учеб. завед. Математика, 1978, *191*, № 4, 26—31 (РЖМат, 1978, 11А320)
4. —, Сверхразрешимые алгебры Ли и закон Дедекинда в решетке подалгебр. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1977, *10*, № 3, 33—42 (РЖМат, 1978, 6А301)
5. —, Модулярные подалгебры и проектирование локально конечномерных алгебр Ли характеристики нуль. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1983, *13*, № 3, 39—51 (РЖМат, 1984, 4А299)
6. *Гретцер Г.*, Общая теория решеток. М.: Мир, 1982, 452 с. (РЖМат, 11А201)
7. *Лашхи А. А.*, Проектирование магнусовых колец и алгебр Ли. Тр. Груз. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, 1971, № 8, 7—11 (РЖМат, 1972, 8А352)
8. —, Структурные изоморфизмы нильпотентных колец Ли. Сообщ. АН ГССР, 1972, 65, № 1, 21—24 (РЖМат, 1972, 5А292)
9. —, Структурные изоморфизмы некоторых классов алгебр Ли. Тр. Тбилис. мат. ин-та АН ГССР, 1975, *46*, 5—21 (РЖМат, 1976, 2А354)
10. —, Структурные изоморфизмы колец и алгебр Ли. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 3, 537—539 (РЖМат, 1977, 2А513)
11. —, О проектировании нильпотентных алгебр Ли. Сообщ. АН ГССР, 1977, *87*, № 1, 39—49 (РЖМат, 1978, 5А266)
12. —, Проектирование чистых сверхразрешимых колец Ли. Мат. заметки, 1979, *26*, вып. 6, 931—937 (РЖМат, 1980, 4А310)
13. —, Решетки с модулярным тождеством и алгебры Ли. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения, 1985, *26*, 213—257 (РЖМат, 1986, 7А263)
14. —, Классификация алгебр Ли с модулярной решеткой подалгебр. Сообщ. АН ГССР, 1985, *118*, № 2, 277—280
15. *Скорняков А. А.*, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.: Наука, 1960
16. —, О структурном изоморфизме модулей над регулярным кольцом. Докл. АН СССР, 1960, *131*, № 3, 756—757 (РЖМат, 1960, 13638)
17. *Amayo R. K., Schwarz I.*, Modularity in Lie algebras. Hirochima Math., J., 1980, *10*, № 2, 311—322 (РЖМат, 1981, 1А283)
18. *Arnold D. M.*, A duality for torsion—free modules of finite rank over a discrete valuation ring. Proc. London Math. Soc., 1972, *24*, 204—216 (РЖМат, 1972, 9А335)

19. *Baer R.*, A unified theory of projective spaces and finite Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc. 1942, *52*, 283—343
20. *Barnes D. W.*, Lattice isomorphisms of Lie algebras. J. Austral. Math. Soc., 1964, *4*, № 4, 470—475 (РЖМат, 1965, 12А304)
21. —, *Wall G. E.*, On normalizer preserving lattice isomorphisms between nilpotent groups. J. Austral. Math. Soc., 1964, *4*, № 4, 454—469 (РЖМат, 1966, 7А193)
22. *Bartolone G.*, *Franco F.*, A remark on the projectivities of the projective line over a commutative ring. Math. Z., 1976, *169*, № 1, 23—29 (РЖМат, 1980, 4А421)
23. *Birkhoff G.*, On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, *31*, 433—454
24. *Brehm Ulrich*, Untermodulverbände Torsionsfreier Moduln. Dissertation des Doktorgrades, Freiburg im Breisgau, 1983, 102 pp.
25. *Carter D. S.*, *Vogt A.*, Collinearity-preserving functions between Desarguesian planes. Memoirs Amer. Math. Soc., 1980, № 235, 98 pp. (РЖМат, 1981, 4А263)
26. *Day A.*, Equational theories of projective geometries, Math. Report. 3—81, Dept. Math. Sci. Lakehead Univ., 1981
27. —, In search of a Pappian lattice, identity. Can. Math. Bull., 1981, *24*, № 2, 187—198 (РЖМат, 1981, 11А317)
28. —, *Pickering D.*, The coordinatization of arguesian lattices. Trans. Amer. Math., Soc., 1983, *278*, № 2, 507—522 (РЖМат, 1984, 2А297)
29. *Dubreil-Jacotin M.-L.*, *Lesieur L.*, *Groisot R.*, Lesons sur la theorie des treillis des structures algebriques ordonnes et des treillis geometriques. Paris, Gauthier-Villars, 1953, viii+385 pp. (РЖМат, 1956, 6472К)
30. *Emaldi M.*, Proietivitá in geometrie proiettive. Atti. Ist. veneto sci. Lett ed arti, Cl. sci. mat. t natur., 1974—1975, *133*, 1—8 (РЖМат, 1977, 1А601)
31. *Faigle U.*, *Herrmann C.*, Projective geometry on partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc., 1981, *266*, № 1, 319—332 (РЖМат, 1970, 7А367)
32. *Glaeser R. C.*, *Kolman B.*, Lattice isomorphic solvable Lie algebras. J. Austral, Math. Soc., 1969, *10*, № 3—4, 266—268 (РЖМат, 1970, 7А264)
33. *Goto M.*, Lattices of subalgebras of real Lie algebras. J. Algebra, 1969, *11*, № 1, 6—24 (РЖМат, 1969, 7А231)
34. *Klingenberg W.*, Projective Geometrien mit homomorphismus. Math. Ann. 1956, *132*, 180—200 (РЖМат, 1959, 3219)
35. *Kolman B.*, Semi-modular Lie algebras. J., Sci. Hiroshima Univ., 1965, Ser. A., *29*, № 2, 149—163 (РЖМат, 1967, 7А245)
36. —, Relatively complemented Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ., 1967, Ser. A, *31*, № 1, 1—11 (РЖМат, 1968, 3А269)
37. *Lashi A. A.*, Projections of mixed Lie ring. Univ. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Math. Cent. Semest., Febr. 15 — June 9, 1978, Warszawa, 1982, 57—66 (РЖМат, 1983, 10А292)
38. —, Projections of wreath products of Lie algebras. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci fis., mat. e natur, 1980 (1981), *69*, № 6, 313—316 (РЖМат, 1983, 3А264)
39. —, $\mathscr{L}$-homomorphisms of Lie algebras. Atti Acad. naz. Lincei, Rend. Cl sci. fis. mat., e natur, 1981 (1982), *70*, 64—68 (РЖМат, 1983, 12А304)
40. —, On the Lie algebras with modular lattices of subalgebras. J. Algebra, 1986, *99*, № 1, 80—88
41. —, *Zimmermann I.*, Modularität und Distributivität im Subidealverband einer Lie-algebra. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1985, *73*, 169—177 (РЖМат, 1985, 10А279)
42. *Limaye B. V.*, The fundamental theorem for the projective line over noncommutative local rings. Arch. Math., 1977, *28*, № 1, 102—109 (РЖМат, 1977, 9А362)
43. —, *Limaye N. B.*, Projectivites over local rings. Math. Z., 1971, *121*, № 2, 175—180 (РЖМат, 1971, 12А398)

44. *MacLane S.,* A lattice formulation for transcendence degrees and bases. Duke Math. J. 1938, *4*, 455—468
45. *McDonald B. R.,* Projectivites over rings with many units. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 2, 195—204 (РЖМат, 1981, 7A382)
46. *Morrison D. R.,* Biregular rings and the ideal lattice isomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, *6*, 46—49 (РЖМат, 1956, 7918)
47. *Neumann J. von,* Continuous geometry. Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 1936, *22*, 92—100
48, —, Examples of continuous geometries. Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 1936, *22*, 101—108
49. —, Algebraic theory of continuous geometries. Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 1937, *23*, 16—22
50. —, Continuous geometry. New York, 1960 (1961) XIII, 299 pp. Brit. Nat. Bibliogr., 1961, № 602, 12
51. *Ojanguren M., Sridharan R.,* A note on the fundamental theorem of projective geometry, Comment math. helv., 1969, *44*, № 3, 310—315 (РЖМат, 1970, 1A287)
52. *Ornstein D.,* Dual vector spaces. Ann. Math., 1959, *69*, 520—534 (РЖМат, 1961, 4A232)
53. *Pickert G.,* Projektive Ebenen. Berlin Göttingen-Heidelberg Springer, 1955, viii, 343 S. (РЖМат, 1958, 6177 К)
54. *Ree R.,* On projective geometry over full matrix rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, *6*, № 1, 144—150 (РЖМат, 1956, 6460)
55. *Towers D. A.,* On Lie algebras in which modular pair of subalgebras are permutable. J., Algebra, 1981, *68*, № 2, 369—377 (РЖМат, 1981, 11A292)
56. —, Dualisms of Lie algebras. J. Algebra, 1979, *59*, № 2, 490—495 (РЖМат, 1980, 3A204)
57. —, Lattice isomorphisms of Lie algebras. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1981, *89*, № 2, 285—292 (РЖМат, 1981, 8A279)
58. *Varea V. R.,* Lie algebras whose maximal subalgebras are modular. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983, *A94*, № 1—2, 9—13 (РЖМат, 1983, 10A235)
59. *Wagner Ascher,* Collineations of finite projective spaces as permutations on the sets of dual subspaces. Math. Z., 1969, 111, 249—254; Correction, Math., Z., 1971, *121*, № 2, 190 (РЖМат, 1971, 12B569)
60. *Zappa G.,* Sulla condizione perche un emitropismo inferiore tipico tra due gruppi sia un omotropismo. Giorn. mat. Battaglini, 1951, *80*, 80—101