Ю. И. ГРИБАНОВ, Р. Х. МАТЕВОСЯН

О ПОПОЛНЕНИИ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть E — нормированное пространство с нормой p, непрерывно вложенное в отделимое секвенциально полное топологическое векторное пространство X. В заметке устанавливается ряд утверждений, связанных с вопросом о возможности вложения пополнения нормированного пространства E в пространство X, возникших в результате анализа доказательства теоремы о пополнении метрического пространства.

Пусть $x_n \in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty$. Тогда в силу непрерывности вложения E в X ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в X. Норма p называется *регулярной*, если из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty \, (x_n \in E)$ вытекает, что сумма сходящегося в X ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \in E$ и что

$$p\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n). \tag{1}$$

Теорема 1. *Для полноты нормированного пространства E необходимо и достаточно, чтобы p была регулярной нормой.*

Это утверждение в эквивалентной форме было установлено в [1].

Норма p называется *полурегулярной*, если для каждой фундаментальной в E последовательности (x_n) такой, что $x_n \to 0$ в X, следует $p(x_n) \to 0$.

Теорема 2. *Для того, чтобы норма p была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы она была полурегу-*

лярной и из $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty \, (x_n \in E)$ *следовало, что сумма сходящегося в X ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E$.

Доказательство. Пусть норма p регулярна и, следовательно, пространство E полно. Рассмотрим любую фундаментальную в E последовательность (x_n) такую, что $x_n \to 0$ в X. В силу полноты E найдется такой элемент $x \in E$, что $x_n \to x$ в E. Поскольку E непрерывно вложено в X, то также $x_n \to x$ в X. Так как $x_n \to 0$ в X и X отделимо, то $x = 0$ и $x_n \to 0$ в E. Поэтому $p(x_n) \to 0$. Таким образом, норма p полурегулярна. Выполнимость второго условия теоремы очевидна.

Пусть выполнены условия теоремы и $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty \, (x_n \in E)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в X и его остаток $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \to 0$ в X. В силу второго условия теоремы элементы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $r_n \in E$ $(n \geqslant 1)$. Так как при $n < m$

$$p(r_n - r_m) = p\left(\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} p(x_k) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty,$$

то последовательность (r_n) фундаментальна в E. Но $r_n \to 0$ в X. Поэтому $p(r_n) \to 0$ в силу первого условия теоремы. При $m \geqslant 1$

$$p\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} p(x_k) + p(r_m).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $m \to \infty$, получаем (1). Таким образом, норма p регулярна.

Определим множество $\overline{E} \subset X$, считая $x \in \overline{E}$ тогда и только тогда, когда существует такая фундаментальная в E последовательность (x_n), что $x_n \to x$ в X. Ясно, что $E \subset \overline{E}$ и что $\overline{E}$ является векторным подпространством пространства X.

Пусть норма p полурегулярна. Определим отображение $\overline{p} : \overline{E} \to (0, \infty)$, полагая $\overline{p}(x) = \lim_{n \to \infty} p(x_n)$, если последовательность (x_n) фундаментальна в E и $x_n \to x$ в X. Так как $|p(x_n) - p(y_n)| \leqslant p(x_n - y_n)$, то в силу непрерывности вложения E в X, отделимости X и полурегулярности p определение отображения $\bar{p}$ корректно. Ясно, что отображение $\bar{p}$ является нормой на E. В дальнейшем $\bar{E}$ рассматривается как нормированное пространство с нормой $\bar{p}$. Нетрудно видеть, что $\bar{E}$ непрерывно вложено в X, $\bar{p}=p$ на E и E всюду плотно в $\bar{E}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы пополнение E^* пространства E было непрерывно вложимо в X, необходимо и достаточно, чтобы p была полурегулярной нормой. Если норма p полурегулярна, то пространство $\bar{E}$ является пополнением пространства E.*

Доказательство. Пусть $E^* \subset X$, где вложение непрерывно. Рассмотрим любую фундаментальную в E последовательность (x_n) такую, что $x_n \to 0$ в X. Так как E^* есть пополнение E, то найдется такой элемент $x \in E^*$, что $x_n \to x$ в E^*. В силу непрерывности вложения E^* в X последовательность элементов $x_n \to x$ в X. Используя отделимость X, заключаем, что $x=0$. Итак, $x_n \to 0$ в E^*. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n)=0$. Таким образом, норма p полурегулярна.

Пусть норма p полурегулярна. Доказательство теоремы будет завершено, если будет установлена полнота пространства $\bar{E}$. Рассмотрим любую фундаментальную в $\bar{E}$ последовательность (x_n). В силу непрерывности вложения $\bar{E}$ в X и секвенциальной полноты X существует такой элемент $x \in X$, что $x_n \to x$ в X. Фиксируем последовательность элементов $y_n \in E$ такую, что $p(x_n - y_n) < \frac{1}{n}$. Последовательность (y_n) фундаментальна в пространстве E. Поэтому найдется такой элемент $y \in \bar{E}$, что $y_n \to y$ в X. Так как $x_n \to x$ в X, $y_n \to y$ в X и $x_n - y_n \to 0$ в $\bar{E}$, а следовательно, и в X, то в силу отделимости X элемент $x=y$. Из определения нормы $\bar{p}$ непосредственно следует, что $\bar{p}(y_n - y) = \lim\limits_{m\to\infty} p(y_n - y_m)$. Принимая теперь во внимание неравенство

$$\bar{p}(x_n - x) \leqslant \bar{p}(x_n - y_n) + \bar{p}(y_n - y),$$

заключаем, что $x_n \to x$ в $\bar{E}$. Таким образом, пространство $\bar{E}$ полно.

Пример. Обозначим через l пространство числовых последовательностей, для которых конечна норма

$$p(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{|x_n|}{n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} |x_n|.$$

Пространство l непрерывно вложено в пространство s всех числовых последовательностей, наделенное метризуемой топологией покоординатной сходимости. Пространство s отделимо и секвенциально полно. Положим

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 1, 1, \ldots).$$

Тогда $x_n \to 0$ в s, $x_n \in l$, $\lim\limits_{n, m \to \infty} p(x_n - x_m) = 0$ и $p(x_n) = 1 + \frac{1}{n}$. Следовательно, норма p не является полурегулярной, пространство l неполно и его пополнение не может быть непрерывно вложено в s.

Норма p называется *С-максимальной (максимальной)*, если существует такая постоянная $C \geqslant 1$ $(C = 1)$, что из ограниченности последовательности (x_n) в E и $x_n \to x$ в X следует, что $x \in E$ и

$$p(x) \leqslant C \lim_{n \to \infty} p(x_n). \tag{2}$$

Норма p называется слабо *С-максимальной (слабо максимальной)*, если существует такая постоянная $C \geqslant 1$ $(C = 1)$, что из ограниченности последовательности (x_n) в E, $x \in E$ и $x_n \to x$ в X следует выполнимость неравенства (2).

Теорема 4. *Любая С-максимальная норма регулярна. Любая слабо С-максимальная норма полурегулярна.*

Доказательство теоремы не представляет затруднений.

Определим множество $\tilde{E} \subset X$, считая $x \in \tilde{E}$ тогда и только тогда, когда существует такая ограниченная в E последовательность (x_n), что $x_n \to x$ в X. Например, если пространство $c \subset s$ наделено обычной нормой, то $\tilde{c} = l^\infty$. Ясно, что $E \subset \tilde{E}$ и что $\tilde{E}$ является векторным подпространством пространства X. Определим отображение $\tilde{p} : \tilde{E} \to [0, \infty)$, полагая $\tilde{p}(x) = \inf \{\lim\limits_{n \to \infty} p(x_n) : (x_n)$ ограничена в E и $x_n \to x$ в $X\}$. Ясно, что $\tilde{p} \leqslant p$ на E. Нетрудно видеть, что $\tilde{p}$ — полунорма на $\tilde{E}$.

Далее будем предполагать, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности. Тогда, как легко убедиться, из $\tilde{p}(x) = 0$ следует $x = 0$. Таким образом, $\tilde{p}$ — норма на $\tilde{E}$. В дальнейшем $\tilde{E}$ рассматривается как нормированное пространство с нормой $\tilde{p}$.

Теорема 5. *Норма $\tilde{p}$ максимальна и, следовательно, пространство $\tilde{E}$ полно.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) ограничена в $\tilde{E}$ и $x_n \to x$ в X. Используя первую аксиому счетности, нетрудно установить, что существует такое равномерно ограниченное в E семейство последовательностей $(x_n^m)_{m=1}^{\infty}(n \geqslant 1)$, что $x_n^m \to x_n$ в X и $\tilde{p}(x_n) = \lim\limits_{m\to\infty} p(x_n^m)$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n^n \to x$ в X и $|\tilde{p}(x_n) - p(x_n^n)| < \frac{1}{n}$. Но тогда $x \in \tilde{E}$ и из неравенства $p(x_n^n) \leqslant \frac{1}{n} + \tilde{p}(x_n)$ следует $\tilde{p}(x) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{p}(x_n)$.

Теорема 6. *Для того чтобы нормы p и $\tilde{p}$ были эквивалентны на E, необходимо и достаточно, чтобы p была слабо C-максимальной нормой. Если p слабо максимальна, то $p = \tilde{p}$ на E. Для того чтобы $E = \tilde{E}$ и нормы p и $\tilde{p}$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы p была C-максимальной нормой. Если норма p максимальна, то $p = \tilde{p}$.*

Доказательство не вызывает затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грибанов Ю. И. О полноте нормированных пространств. — В кн.: Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. Казань, Изд-во КГУ, 1974, с. 61—63.