Х. А. Абдуваитов, Э. М. Мухамадиев, Об условиях обратимости дифференциального оператора второго порядка,
Дифференц. уравнения, 1977, том 13, номер 12, 2115–2123

ДЕКАБРЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 12

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.937

Х. А. АБДУВАИТОВ, Э. М. МУХАМАДИЕВ

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАТИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть R^1 — вещественная ось; C — пространство непрерывных ограниченных функций $x : R^1 \to R^1$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in R^1} |x(t)|$.

Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве C:

$$Lx = x'' + a(t)x' - b(t)x,$$

где функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на R^1, с областью определения $D = \{x \in C : Lx \in C\}$.

Дифференциальный оператор второго порядка в различных пространствах с различными краевыми условиями был предметом исследований многих авторов, основные результаты которых собраны в книгах [1, 2, 3].

В настоящей работе получены признаки существования и полной непрерывности обратного оператора L^{-1}; критерий обратимости оператора с равномерно непрерывными и ограниченными коэффициентами (когда $b(t) \geqslant 0$); доказано существование знакоопределенной функции Грина.

В случае, когда коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ — почти периодические функции, вопрос об обратимости оператора L в пространстве C и знак функции Грина исследовались в [4]. В [5] исследовался вопрос о дискретности спектра оператора L в пространстве суммируемых с квадратом на R^1 функций, когда $a(t) \equiv 0$.

§ 1. ПРИЗНАКИ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРА L

В дальнейшем мы будем часто ссылаться на следующее утверждение, справедливость которого следует, например, из теоремы Бернштейна (см. [6]): *если $x(t)$ — решение неоднородного уравнения*

$$x'' + a(t)x' - b(t)x = f(t)$$

на отрезке $[\alpha, \beta]$ и функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и $x(t)$ на $[\alpha, \beta]$ по модулю ограничены общей константой C_0, то и производная $x'(t)$ по модулю ограничена некоторой константой C_1, зависящей от C_0 и не зависящей от функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и $x(t)$.

Теорема 1.1. *Пусть $\varliminf\limits_{|t| \to \infty} b(t) > 0$ и однородное уравнение*

$$x'' + a(t)x' - b(t)x = 0 \tag{1.1}$$

не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда существует ограниченный обратный оператор $L^{-1} : C \to C$.

Доказательство. Для доказательства обратимости оператора L, очевидно, достаточно показать, что неоднородное уравнение

$$Lx=f \tag{1.2}$$

имеет решение $x \in C$ при любой правой части $f \in C$.

Рассмотрим оператор L_n, действующий в пространстве $C_{[-n, n]}$ непрерывных и ограниченных на $[-n, n]$ функций $x(t)$: $L_n x = x'' + a(t)x' - b(t)x$, с областью определения $D_n = \{x \in C_{[-n, n]} : x(-n) = x(n) = 0, L_n x \in C_{[-n, n]}\}$.

Покажем, что задача

$$L_n x = f \tag{1.3}$$

имеет на $[-n, n]$ решение при всех достаточно больших значениях n. Допустим противное. Тогда (см. [2]) найдутся сколь угодно большие значения n, при которых задача

$$L_n x = 0 \tag{1.4}$$

имеет ненулевое решение.

Пусть $\{m_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что при $n=m_k$ задача (1.4) имеет ненулевое решение $y_k(t)$. Можно считать, что $\max |y_k(t)| = \max y_k(t) = 1$. Поэтому в силу замечания, сделанного в начале настоящего параграфа, на каждом конечном отрезке множество функций $y'_k(t)$ равномерно ограничено, откуда следует равномерная непрерывность множества функций $y_k(t)$ на этом отрезке. По теореме Арцеля из последовательности $\{y_k(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к некоторой ограниченной функции $y(t)$, определенной на R^1. Нетрудно видеть, что $y(t)$ — решение однородного уравнения (1.1). Покажем, что $y(t)$ — ненулевое решение уравнения (1.1). Для этого достаточно доказать, что множество точек таких, что $y_k(t_k) = 1$, лежит в некотором конечном промежутке.

Допустим противное. Тогда существует число k такое, что $b(t_k) > 0$. Отсюда, учитывая, что $y'_k(t_k) = 0$ и $y''_k(t_k) \leqslant 0$, получим

$$y''_k(t_k) + a(t_k) y'_k(t_k) - b(t_k) y_k(t_k) < 0,$$

чего не может быть, так как $y_k(t)$ — решение задачи (1.1).

Таким образом, $y(t)$ — ненулевое решение уравнения (1.4), что противоречит условию теоремы. Следовательно, при всех достаточно больших значениях n задача (1.3) имеет решение.

Пусть $x_k(t)$ — решение задачи (1.3). Если существуют не зависящие от функции f постоянные числа N, $M>0$ такие, что при всех $n \geqslant N$ имеют место неравенства

$$|x_n(t)| \leqslant M \|f(t)\|, \quad t \in [-n, n], \tag{1.5}$$

то в силу замечания, сделанного в начале настоящего параграфа, на каждом отрезке равномерно ограничено множество функций $x'_n(t)$. Поэтому, по теореме Арцеля, из последовательности $\{x_n(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на каждом отрезке к некоторой функции $x(t)$, являющейся ограниченным решением уравнения (1.2). Очевидно, $\|x(t)\| \leqslant M \|f(t)\|$.

Таким образом, если имеют место неравенства (1.5), то существует ограниченный обратный оператор $L^{-1} : C \to C$.

Покажем существование чисел N, $M>0$ таких, что имеют место неравенства (1.5). Допустим противное. Тогда существуют возрастающая последовательность натуральных чисел n_k и последовательность функций $f_k \in C$ ($\|f_k\| \to 0$) такие, что $\|x_k(t)\| = 1$, где $x_k(t)$ — решение задачи

$$L_{n_k} x = f_k, \quad t \in [-n_k, n_k].$$

Так как $|x_k(t)| \leqslant 1$, то производные $x'_k(t)$ равномерно ограничены на каждом отрезке. Поэтому последовательность $\{x_k(t)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $x(t)$, являющейся решением однородного уравнения (1.1).

Пусть точки t_k такие, что $|x_k(t_k)| = 1$. Нетрудно видеть, что точки t_k лежат внутри некоторого отрезка. Поэтому $x(t)$ — ненулевое ограниченное решение однородного уравнения (1.1), что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть $b(t) \geqslant 0$ и при достаточно больших $|t|$ $b(t) > 0$ и $t^{-1}a(t) \leqslant Kb(t)$ ($K \geqslant 0$). Тогда однородное уравнение (1.1) не имеет ненулевых ограниченных решений.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $x(t)$ — ненулевое решение уравнения (1.1). Тогда

$$x''(t) + a(t)x'(t) - b(t)x(t) \equiv 0. \tag{1.6}$$

Предположим, что существует точка максимума t_0 такая, что $x(t_0) > 0$ и $x(t) < x(t_0)$ при достаточно близких к t_0 точках $t > t_0$. Тогда существует точка $t_1 > t_0$ такая, что $(t_1 - t_0)^{-1} > \max\{|a(t)| : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$, $x'(t_1) < 0$ и при $t \in [t_0, t_1]$ $x(t) \geqslant 0$ и $x'(t) \geqslant x'(t_1)$. Пусть точка $t_2 \in [t_0, t_1]$ такая, что $x'(t_2) = 0$ и $x'(t) < 0$ при $t_2 < t \leqslant t_1$. Тогда, по теореме Лагранжа, существует точка $\xi \in (t_2, t_1)$ такая, что $x''(\xi)(t_1 - t_2) = x'(t_1)$. Отсюда

$$x'(t_1)(t_1 - t_2)^{-1} + a(\xi)x'(\xi) - b(\xi)x(\xi) < |x'(t_1)|\,[(t_1 - t_0)^{-1} - (t_1 - t_2)^{-1}] \leqslant 0,$$

что противоречит тождеству (1.6).

Аналогично $x(t)$ не имеет точки минимума такой, что $x(t_0) < 0$ и $x(t) > x(t_0)$ при достаточно близких к t_0 точках $t > t_0$.

Теперь нетрудно видеть, что при достаточно больших $|t|$ функция $x(t)$ монотонная. Поэтому существуют пределы $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = d_+$ и $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = d_-$. Для определенности будем считать, что $d_+ \geqslant 0$.

Случай 1. $d_+ > 0$ и $x(t) \leqslant d_+$, когда t принимает достаточно большие значения. В этом случае при достаточно больших значениях t $x'(t) \geqslant 0$. Поэтому при этих значениях t

$$x''(t) + b(t)\,[Ktx'(t) - x(t)] \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Покажем, что существует последовательность точек $t_n \to +\infty$ такая, что $t_n x'(t_n) \to 0$. Допустим противное. Тогда при достаточно больших значениях t $tx'(t) \geqslant c > 0$. Пусть точка t_0 такая, что $d_+ < x(t_0) + c$. Интегрируя обе части неравенства $tx'(t) \geqslant c$ от t_0 до $t > t_0$, получим

$$tx(t) - t_0x(t_0) - \int_{t_0}^{t} x(s)\,ds \geqslant c(t - t_0).$$

Разделив левую и правую части на $tx(t)$ и учитывая, что $\int\limits_{t_0}^{t} x(s)\,ds \geqslant x(t_0)(t - t_0)$, получим

$$1 \geqslant \frac{c+x(t_0)}{d_+} - \frac{ct_0}{tx(t)} \quad (t \geqslant t_0), \tag{1.8}$$

что противоречит выбору точки t_0. Таким образом, существуют точки $t_n \to +\infty$ такие, что $t_n x'(t_n) \to 0$.

Если существует достаточно большое число n такое, что $x''(t_n) \leqslant 0$, то

$$x''(t_n) + b(t_n)[Kt_n x'(t_n) - x(t_n)] < 0, \tag{1.9}$$

что противоречит неравенству (1.7). Если же при всех достаточно больших n $x''(t_n) > 0$, то существует последовательность $s_n \to +\infty$ точек минимума функции $x'(t)$ такая, что $s_n x'(s_n) \to 0$. Так как $x''(s_n) = 0$, то при достаточно больших s_n имеем

$$x''(s_n) + b(s_n)[Ks_n x'(s_n) - x(s_n)] < 0,$$

что снова противоречит неравенству (1.7). Таким образом, случай 1 невозможен.

С л у ч а й 2. $d_+ > 0$ и $x(t) > d_+$, когда t принимает достаточно большие значения. В этом случае, так как $x(t)$ не имеет точек положительного максимума, имеем $d_- > d_+$ и $x(t) \leqslant d_-$, когда $t < 0$ и принимает достаточно большие по модулю значения. Нетрудно видеть, что функция $y(t) = x(-t)$ является решением уравнения

$$y'' - a(-t)y' - b(-t)y = 0.$$

Поэтому этот случай сводится к случаю 1.

С л у ч а й 3. $d_+ = 0$. В этом случае $d_- \neq 0$, так как $x(t)$ не имеет точек положительного максимума и отрицательного минимума, можно считать, что $d_- > 0$. Но тогда этот случай аналогично случаю 2 сводится к случаю 1. Теорема доказана.

Если в уравнении (1.1) коэффициент при производной равен нулю, то справедливо следующее утверждение: *пусть $b(t) \geqslant 0$ и $b(t) \not\equiv 0$. Тогда уравнение (1.1) не имеет ненулевых ограниченных решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть $x(t)$ — ненулевое ограниченное решение уравнения (1.1). Пусть точка t_0 такая, что $x(t_0) > 0$. Тогда производная $x'(t)$ в точке t_0 не может быть положительной. Действительно, если бы $x'(t_0) > 0$, то в силу ограниченности функции $x(t)$ нашлась бы точка $t_1 > t_0$ такая, что $x'(t_1) < x'(t_0)$ и $x(t) > 0$, когда $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Поэтому нашлась бы точка ξ $(t_0 \leqslant \xi \leqslant t_1)$ такая, что $x''(\xi) < 0$ и $x(\xi) > 0$. Но тогда $x''(\xi) - b(\xi)x(\xi) < 0$, что невозможно в силу предположения. Если же в точке t_0 $x'(t_0) < 0$, то найдется точка $\xi < t_0$ такая, что $x''(\xi) < 0$ и $x'(\xi) > 0$. Но тогда снова $x''(\xi) - b(\xi)x(\xi) < < 0$, что невозможно.

Таким образом, если в некоторой точке $x(t) > 0$, то $x'(t) = 0$. Отсюда, если хотя бы в одной точке $x(t) > 0$, то $x(t) = \text{const} > 0$, чего не может быть, так как $b(t) \not\equiv 0$. Аналогично, если в некоторой точке $x(t) < 0$, то $x(t) = \text{const} < 0$, что снова невозможно. Следовательно, $x(t) \equiv 0$. Утверждение доказано.

В заключение настоящего параграфа мы рассмотрим уравнение с равномерно непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Пусть $b(t)$ — равномерно непрерывная и ограниченная на R^1 функция. Тогда из любой последовательности $\{b(t+h_k) : h_k \in R^1\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $\bar{b} \in C$. Обозначим через $H(b)$ замыкание множества функций $\{b(t+h) : h \in R^1\}$ в топологии равномерной сходимости на каждом отрезке.

Теорема 1.3. *Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — равномерно непрерывные и ограниченные на R^1 функции и $b(t)\geqslant 0$. Тогда для существования ограниченного обратного оператора L^{-1} необходимо и достаточно, чтобы все функции $b(t)\not\equiv 0$ $(\tilde{b}\in H(b))$.*

Доказательство. Достаточность. Покажем сначала, что однородное уравнение (1.1) не имеет ненулевых ограниченных решений. Допустим противное. Пусть $x(t)$ — ненулевое решение уравнения (1.1). Тогда

$$x''(t)+a(t)x'(t)-b(t)x(t)\equiv 0.$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 1.2, можно показать, что решение $x(t)$ не имеет точки максимума (минимума) t_0 такой, что $x(t_0)>0$ $(x(t_0)<0)$ и $x(t)<x(t_0)$ $(x(t)>x(t_0))$ при достаточно близких к t_0 точках $t>t_0$. Поэтому при достаточно больших значениях t функция $x(t)$ монотонная.

Достаточно рассмотреть случай (см. доказательство теоремы 1.2), когда $d_+\neq 0$.

Так как $a(t)$ и $b(t)$ — равномерно непрерывные ограниченные функции, то существует последовательность вещественных чисел h_k такая, что последовательности $\{a(t+h_k)\}$ и $\{b(t+h_k)\}$ сходятся равномерно на каждом отрезке соответственно к функциям $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)\in C$. При этом последовательность $\{x(t+h_k)\}$ сходится равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $\tilde{x}(t)$, которая является решением уравнения

$$x''+\tilde{a}(t)x'-\tilde{b}(t)x=0. \tag{1.10}$$

Но, с другой стороны, так как $\tilde{x}(t)\equiv d_+$ и $\tilde{b}(t)\not\equiv 0$, $\tilde{x}(t)$ не может удовлетворять уравнению (1.10). Из полученного противоречия следует, что однородное уравнение (1.1) не имеет ненулевых ограниченных решений.

Пусть $\varepsilon_n\to 0$ и $\varepsilon_n>0$. Тогда однородное уравнение

$$x''+a(t)x'-(b(t)+\varepsilon_n)x=0$$

также не имеет ненулевых ограниченных решений. Поэтому, по теореме 1.1, неоднородное уравнение

$$x''+a(t)x'-(b(t)+\varepsilon_n)x=f(t)\quad (f\in C)$$

имеет ограниченное решение $x_n(t)$. Если существует не зависящее от функции f постоянное число $M>0$ такое, что имеют место неравенства

$$\|x_n(t)\|\leqslant M\|f(t)\|,\quad n=1, 2, \ldots, \tag{1.11}$$

то в силу замечания, сделанного в начале настоящего параграфа, множество функций $x'_n(t)$ равномерно ограничено на каждом отрезке. Поэтому из последовательности $\{x_n(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $x(t)$, являющейся ограниченным решением уравнения (1.2). Очевидно, $\|x(t)\|\leqslant M\|f(t)\|$. Таким образом, если имеют место неравенства (1.11), то существует ограниченный обратный оператор L^{-1}.

Покажем существование числа $M>0$ такого, что имеют место неравенства (1.11). Допустим противное. Тогда существуют последовательность целых положительных чисел n_k и последовательность функций $f_k\in C$ $(\|f_k\|\to 0)$ такие, что $\|x_k(t)\|=1$, где $x_k(t)$ — решение уравнения

$$x''+a(t)x'-(b(t)+\varepsilon_{n_k})x=f_k(t).$$

Пусть точки t_k такие, что $|x_k(t_k)|\geqslant 1-1/k$. Так как $a(t)$ и $b(t)$ — равномерно непрерывные ограниченные функции и функции $x_k(t)$ равностепенно непрерывные на каждом отрезке, то из последовательности натуральных чисел можно выделить подпоследовательность $\{k_m\}$ такую, что последовательности $a(t+t_{k_m})$ и $b(t+t_{k_m})$ будут сходиться в топологии равномерной сходимости на каждом отрезке к функциям соответственно $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$, а последовательность $x_{k_m}(t+t_{k_m})$ — к функции $\tilde{x}(t)$, являющейся ненулевым ограниченным решением уравнения

$$y''+\tilde{a}(t)y'-\tilde{b}(t)y=0. \tag{1.12}$$

Но, с другой стороны, так как коэффициенты $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ уравнения (1.12) удовлетворяют условиям настоящей теоремы, то по доказанному выше уравнение (1.12) не имеет ненулевых ограниченных решений. Полученное противоречие доказывает существование числа $M>0$ такого, что имеют место неравенства (1.11). Достаточность доказана.

Необходимость. В силу теорем 1.1 и 1.2 и условия настоящей теоремы оператор L_ε:

$$L_\varepsilon x=x''+a(t)x'-(b(t)+\varepsilon)x$$

имеет ограниченный обратный при каждом $\varepsilon\geqslant0$. Поэтому существует положительное число $N=N(\varepsilon_0)$ такое, что при любом $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ имеет место неравенство $\|x_\varepsilon(t)\|\leqslant N\|f(t)\|$, где $x_\varepsilon(t)$ — решение уравнения $L_\varepsilon x=f$.

Пусть последовательность чисел t_k такая, что последовательности функций $a(t+t_k)$ и $b(t+t_k)$ сходятся равномерно на каждом отрезке к функциям соответственно $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$.

Рассмотрим оператор $\tilde{L}_\varepsilon$:

$$\tilde{L}_\varepsilon x=x''+\tilde{a}(t)x'-(\tilde{b}(t)+\varepsilon)x.$$

Покажем, что решение $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ $(\varepsilon>0)$ уравнения

$$\tilde{L}_\varepsilon x=f \tag{1.13}$$

также удовлетворяет неравенству $\|x_\varepsilon(t)\|\leqslant N\|f(t)\|$. Действительно, пусть $x_k(t)$ — решение уравнения

$$L_\varepsilon x=f(t-t_k).$$

Так как $\|x_k(t)\|\leqslant N\|f(t-t_k)\|$, то $\|x_k(t+t_k)\|\leqslant N\|f(t)\|$. Поэтому последовательность функций $x_k(t+t_k)$ в топологии равномерной сходимости на каждом отрезке сходится к решению уравнения (1.13). Поэтому $\|\tilde{x}_\varepsilon(t)\|\leqslant N\|f(t)\|$.

Предположим, что $\tilde{b}(t)\equiv0$. Тогда $\tilde{x}(t)+1/\varepsilon$ — решение уравнения

$$\tilde{L}_\varepsilon x=f+1.$$

Поэтому $\|x_\varepsilon(t)+1/\varepsilon\|\leqslant N\|f+1\|$. Но, с другой стороны, последнее неравенство при достаточно малых $\varepsilon>0$ не может иметь места, так как $\|\tilde{x}_\varepsilon(t)\|\leqslant N\|f(t)\|$. Таким образом, $\tilde{b}(t)\not\equiv0$ для каждой функции $\tilde{b}\in H(b)$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

§ 2. ПРИЗНАК ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА $L^{-1}: C\to C$

Лемма 2.1. *Пусть $b(t)\geqslant0$, $b(t)\to+\infty$, когда $|t|\to\infty$, и при достаточно больших $|t|$ $t^{-1}a(t)\leqslant Kb(t)$.*

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число $T=T(\varepsilon)$ такое, что для любого $f\in C$ и $\|f\|\leqslant1$ решение уравнения $Lx=f$ удовлетворяет неравенству $|x(t)|<\varepsilon$, лишь только $|t|>T$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение уравнения $Lx=f$ ($\|f\|=1$). Покажем, что $x(t)\to 0$, когда $|t|\to\infty$. Допустим противное. Тогда функция $|x(t)|$ при больших $|t|$ не имеет точек максимума. Следовательно, при больших $|t|$ функция $x(t)$ монотонная. Поэтому, учитывая, что $b(t)\to+\infty$, так же, как и в теореме 1.2, можно показать, что $x(t)\to 0$, когда $|t|\to\infty$. Покажем, что если $f(t)\geqslant 0$, то $x(t)\leqslant 0$. Допустим противное. Так как $x(t)\to 0$, когда $|t|\to\infty$, то существует точка максимума t_0 такая, что $x(t_0)>0$ и $x(t)<x(t_0)$ при $t>t_0$. Но тогда (см. доказательство теоремы 1.2) существует точка $t=\xi>t_0$ такая, что $x''(\xi)+a(\xi)x'(\xi)-b(\xi)x(\xi)<0$. Но $f(\xi)\geqslant 0$. Таким образом, если $f(t)\geqslant 0$, то $x(t)\leqslant 0$. Пусть $x_0(t)$ — решение уравнения $Lx=-1$ и $x_f(t)$ — решение уравнения $Lx=f$, где $-1\leqslant f(t)\leqslant 1$. Тогда будет иметь место неравенство

$$-x_0(t)\leqslant x_f(t)\leqslant x_0(t). \tag{2.1}$$

В силу неравенства (2.1) для любого $\varepsilon>0$ существует число $T=T(\varepsilon)$ такое, что для любого $f\in C$ и $\|f\|\leqslant 1$ решение уравнения $Lx=f$ удовлетворяет неравенству $x(t)<\varepsilon$ при $|t|>T$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $b(t)\geqslant 0$, $b(t)\to+\infty$, когда $|t|\to\infty$, и при достаточно больших $|t|$ $t^{-1}a(t)\leqslant Kb(t)$. Тогда существует обратный вполне непрерывный оператор L^{-1}.*

Доказательство. Из теорем 1.1 и 1.2 следует существование ограниченного обратного L^{-1}. Докажем вполне непрерывность оператора L^{-1}. Пусть дана ограниченная последовательность функций $f_k\in C$ ($\|f_k\|\leqslant 1$) и пусть $x_k(t)$ — решения уравнений $Lx=f_k$. Тогда существует число $N>0$ такое, что $\|x_k(t)\|\leqslant N$. В силу замечания, сделанного в начале § 1, множество производных $x'_k(t)$ равномерно ограничено на каждом отрезке. Поэтому из последовательности $\{x_k(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке. Эта подпоследовательность в силу доказанной леммы будет сходящейся и по норме пространства C. Теорема доказана.

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ОПЕРАТОРА L

Теорема 3.1. *Пусть $b(t)\geqslant 0$, $\varliminf_{|t|\to\infty} b(t)>0$ и при достаточно больших $|t|$*

$$t^{-1}a(t)\leqslant Kb(t).$$

Тогда существует отрицательная функция Грина $G(t, s)$ оператора L.

Доказательство. Рассмотрим оператор L_n, действующий в пространстве $C_{[-n,n]}$ непрерывных и ограниченных на $[-n, n]$ функций $x(t)$:

$$L_n x=x''+a(t)x'-b(t)x,$$

с областью определения $D_n=\{x\in C_{[-n,n]}: x(-n)=x(n)=0,\ L_n x\in C_{[-n,n]}\}$.

Известно, что существует отрицательная функция Грина $G_n(t, s)$ оператора L_n. Пусть s фиксировано. Тогда $G_n(t, s)=\eta_n(t)$. Заметим, что $\eta_n(-n)=\eta_n(n)=0$. Нетрудно видеть, что функция $\eta_n(t)$ при $-n\leqslant t\leqslant s$ монотонно убывает, а при $s\leqslant t\leqslant n$ — монотонно возрастает.

Покажем, что функции $\eta_n(t)$ равномерно ограничены. Допустим противное. Тогда функции $\theta_n(t)=\eta_n(t)/|\eta_n(s)|$ равномерно ограничены. Следовательно, равномерно ограничены и функции $\theta'_n(t)$. А поэтому из последовательности $\{\theta_n(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к ненулевому решению однородного уравнения (1.1), что невозможно в силу теоремы 1.2. Таким образом, множество функций $\eta_n(t)$ равномерно ограничено. Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $\eta(t)$, определенной на R^1. Нетрудно видеть, что сама последовательность $\{\eta_n(t)\}$ сходится к функции $\eta(t)$.

Так как мы фиксировали произвольно выбранное s, то последовательность $G_n(t, s)$ сходится по крайней мере поточечно к некоторой функции $G(t, s)$, определенной на $R^1 \times R^1$. Покажем, что $G(t, s)$ непрерывно по s. Допустим противное. Тогда существует последовательность $\{G(t, s_0+\Delta s_k)\}$ такая, что существует тождественно не равный нулю предел

$$\lim_{\Delta s_k \to 0} [G(t, s_0+\Delta s_k) - G(t, s_0)] = K(t) \not\equiv 0$$

(очевидно, $K'(s_0)=0$), который является решением однородного уравнения (1.1), что невозможно в силу теоремы 1.2. Следовательно, $G(t, s)$ непрерывна по s.

Пусть f такая, что $\operatorname{supp} f \subset [\alpha, \beta]$, где $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ и $x_n(t)$ — решение уравнения $L_n x = f$. Тогда

$$x_n(t) = \int_\alpha^\beta G_n(t, s) f(s)\, ds. \tag{3.1}$$

Очевидно, множество функций $G_n(t, s)$ равномерно ограничено в каждой ограниченной области. Поэтому в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла из (3.1) получим $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds$, где $x(t)$ — решение уравнения (1.2).

Пусть теперь f — произвольная функция из пространства C. Определим функцию f_n следующим образом:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leqslant n, \\ f(-n)(t+n+1), & -(n+1) \leqslant t < -n, \\ -f(n)(t-n-1), & n < t \leqslant n+1, \\ 0, & |t| > n+1. \end{cases}$$

Пусть $x_n(t)$ — решение уравнения $Lx = f_n$. Тогда

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f_n(s)\, ds$$

или

$$x_n(t) = \int_{-n}^{n} G(t, s) f(s)\, ds + \int_{n \leqslant |s| \leqslant n+1} G(t, s) f_n(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Покажем, что второй интеграл в равенстве (3.2) стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, так как

$$\left| \int_{-n}^{n} G_n(t, s)\, ds \right| < K_0, \quad K_0 < +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и $G(t, s) < 0$, то $\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s) ds \right| \leqslant K_0$. Поэтому второй интеграл в равенстве (3.2) стремится к нулю. Так как $x_n(t)$ на каждом отрезке равномерно сходится к решению $x(t)$ уравнения (1.2), то, переходя к пределу в равенстве (3.2), получим

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s) ds.$$

Следовательно, $G(t, s)$ — функция Грина оператора L. Теорема доказана.

Существование знакоопределенной функции Грина позволяет применять методы монотонных операторов (см. [7]) при изучении нелинейных уравнений с монотонной правой частью.

Авторы выражают искреннюю благодарность М. А. Красносельскому за внимание к работе.

Литература

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1 и 2. ИЛ, 1960.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», 1969.
3. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. «Наука», 1970.
4. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. «Наука», 1970.
5. Молчанов А. М. Труды Московск. матем. об-ва, **2**, 1953, стр. 169—200.
6. Бернштейн С. Н. Собр. соч., т. III. Изд.-во АН СССР, 1960.
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 15 июля 1975 г.

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина