

## Решения задач из прошлых выпусков

СЕРИЯ 2, вып. 1, с. 221, задача 9. Условие. Докажите, что если рациональная функция от  $x$  не меняется при замене  $x$  на  $1/x$ , то она является рациональной функцией от  $x + 1/x$ .

РЕШЕНИЕ. Положим  $z = x + x^{-1}$ . Пусть

$$f(x) = \frac{x^k P(x)}{x^\ell Q(x)} = \frac{x^k (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)}{x^\ell (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)},$$

где  $a_0, b_0 \neq 0$ . Из условия задачи получаем

$$\begin{aligned} f(x^{-1}) &= x^{\ell-k+m-n} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \equiv \\ &\equiv f(x) = x^{k-\ell} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2(k - \ell) = m - n \quad (1)$$

и

$$P(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_n x^n + \dots + a_0,$$

т. е.  $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_0$  — возвратный многочлен, и аналогично  $Q(x) = b_0 x^m + \dots + b_0$  — возвратный многочлен.

Пусть  $n$  чётно,  $n = 2n'$ . Тогда

$$P(x) = x^{n'} (a_0 (x^{n'} + x^{-n'}) + \dots). \quad (2)$$

Для любого натурального  $k$  имеем

$$(x + x^{-1})^k = (x^k + x^{-k}) + k(x^{k-1} + x^{-k+1}) + \dots$$

Индукцией по  $k$  получаем, что  $x^k + x^{-k}$  является функцией от  $z$ . Тогда ввиду (2)

$$P(x) = x^{n'} \psi(z), \quad (3)$$

где  $\psi$  — рациональная функция.

Если же  $n$  нечётно,  $n = 2n' + 1$ , то  $P(x) = (x + 1)P_1(x)$ , где  $P_1(x)$  — возвратный многочлен степени  $2n'$ . Согласно равенству (3) имеем

$$P(x) = x^{n'}(x + 1)\psi(z), \quad (4)$$

где  $\psi$  — рациональная функция.

Аналогично, если  $m$  чётно,  $m = 2m'$ , то

$$Q(x) = x^{m'}\varphi(z), \quad (5)$$

а если  $m$  нечётно,  $m = 2m' + 1$ , то

$$Q(x) = x^{m'}(x + 1)\varphi(z), \quad (6)$$

где  $\varphi$  — рациональная функция.

Ввиду (1) либо  $m, n$  оба чётны, либо оба нечётны, причём в обоих случаях  $k - \ell = m' - n'$ . Из (3)–(6) получаем

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{k-\ell+n'-m'} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \Psi(z),$$

где  $\Psi$  — рациональная функция, что и требовалось. (Ю. Раскин)

2.7'. Условие. У многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что  $P(x)$  делит многочлен вида  $x^n - 1$  для некоторого  $n$ .

(М. Л. Концевич)

РЕШЕНИЕ. Нам потребуется лемма 1 из статьи: Белов А. Я. О круговых многочленах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 181–184.

Пусть  $Q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при всех  $k \in \mathbb{N}$  коэффициенты многочлена

$$\tilde{Q}_k(x) = (x - x_1^k) \cdot \dots \cdot (x - x_n^k)$$

также целые.

Если все корни многочлена  $Q(x)$  по модулю равны единице, то все корни многочлена  $Q_k(x)$  тоже по модулю равны единице. Далее, из теоремы Виета следует, что модули всех коэффициентов всех  $Q_k$  ограничены и не превосходят максимального числа членов в элементарном симметрическом многочлене  $s_k$  (ибо каждое слагаемое есть произведение корней, а оно равно единице по модулю). Это число максимально, когда  $k = [n/2]$ , и тогда оно равно  $\binom{n}{[n/2]}$ . В силу леммы имеем, что все коэффициенты  $Q_k$  — целые. Так как они не превосходят

по модулю  $\binom{n}{[n/2]}$ , множество всех коэффициентов всех  $Q_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , конечно. Тогда и множество самих многочленов  $Q_k$  тоже конечно.

Поэтому  $Q_\ell = Q_k$  при некоторых  $\ell \neq k$ . Это значит, что  $x_i^\ell = x_i^k$  при  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно, все  $x_i$  суть корни из единицы, откуда следует утверждение задачи. (А. Я. Канель-Белов)

26.8. Условие. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске  $(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1$ , и пусть  $S$  есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что  $S$  — треугольник или что  $S$  — четырёхугольник? (Ф. В. Петров)

Ответ. Больше вероятность, что  $S$  — четырёхугольник.

Решение. Эти вероятности можно оценить численно достаточно грубо. Сначала оценим сверху вероятность того, что  $S$  — треугольник. Обозначим через  $S$  максимальную площадь треугольника, расположенного внутри единичного круга. Как известно, эта площадь равна  $3\sqrt{3}/4 \approx 1,299$  — площади вписанного равностороннего треугольника.

$$\begin{aligned} P(S \text{ — это треугольник}) &= C_{2019}^3 \cdot P(\text{первые 2016 точек лежат} \\ &\quad \text{внутри выпуклой оболочки последних трёх}) < \\ &< C_{2019}^3 \left(\frac{S}{\pi}\right)^{2016} < 2019^3 \cdot 0,42^{2016} < 10^{10} \cdot 0,42^{2016}. \end{aligned}$$

Теперь будем оценивать вероятность того, что  $S$  — четырёхугольник. Впишем в круг квадрат  $A_1A_2A_3A_4$ , его площадь равна 2. Выберем  $\varepsilon = 1/20$  и обозначим  $\varepsilon$ -окрестности вершин квадрата  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Площадь каждой из этих окрестностей оценим снизу как  $1/1000$ . Если выбрано по точке внутри этих окрестностей, то выпуклая оболочка этих четырёх точек имеет площадь чем  $2 - 4\sqrt{2}\varepsilon > 1,7$ .

$$\begin{aligned} P(S \text{ — это треугольник}) &> P(\text{первые 4 точки лежат} \\ &\quad \text{соответственно в } O_1, O_2, O_3, O_4, \text{ а остальные 2015 точек лежат} \\ &\quad \text{внутри выпуклой оболочки первых четырёх}) > \\ &> \left(\frac{1}{1000\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{1,7}{\pi}\right)^{2015} > 10^{-16} \cdot 0,54^{2015}. \end{aligned}$$

Теперь достаточно проверить, что

$$10^{-16} \cdot 0,54^{2015} > 10^{10} \cdot 0,42^{2016}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{0,54}{0,42}\right)^{2015} > \left(\left(\frac{0,54}{0,42}\right)^{10}\right)^{200} > 10^{200},$$

а отсюда следует и требуемое неравенство. (И. В. Митрофанов)

27.4. Условие. Дробно-кубическое отображение — это отображение вида

$$z \rightarrow \frac{a_1 z^3 + b_1 z^2 + c_1 z + d_1}{a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида  $z \rightarrow z^2$ ,  $z \rightarrow z^3$ ,  $z \rightarrow az + b$ ,  $z \rightarrow 1/z$ ? (А. Я. Канель-Белов)

Ответ. Не всегда.

Решение. Будем рассматривать рациональные (дробно-рациональные) функции  $R(z) = P(z)/Q(z)$  над некоторым полем  $\mathbb{K}$ , представленные в несократимом виде. Это означает, что  $P$  и  $Q$  — многочлены над  $K$ , не имеющие общих делителей, причём  $Q \neq 0$ . Степень такой функции по определению равна  $\deg R = \max(\deg P, \deg Q)$ . Разделив многочлены  $P$  и  $Q$  на ненулевой коэффициент одного из них, получим нормированный вид функции  $R$ , в котором хотя бы один коэффициент равен 1. Рациональная функция степени  $n$  в нормированном виде может быть задана  $2n + 1$  параметром. Далее считаем, что рассматриваемые рациональные функции имеют нормированный вид.

Дробно-рациональная функция степени 3 называется дробно-кубической. Дробно-линейное отображение есть рациональная функция  $H(z)$  степени один:

$$H(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad cz \neq 0.$$

Известно (упражнение для читателя), что дробно-линейное отображение можно представить как композицию отображений вида  $z \rightarrow az + b$ ,  $z \rightarrow 1/z$ .

Далее композиция функций обозначается  $\circ$ :  $(R_1 \circ R_2)(z) = R_1(R_2(z))$ . Если  $R_1, R_2$  — рациональные функции, то коэффициенты функции  $R_1 \circ R_2$  являются многочленами от коэффициентов функций  $R_1, R_2$ .

Лемма 1. (а) Пусть  $R$  — рациональная функция,  $k$  — натуральное число. Тогда  $\deg R^k = k \cdot \deg R$ .

(б) Пусть  $H_1, H_2$  — дробно-линейные отображения,  $R$  — рациональное отображение. Тогда  $\deg(H_1 \circ R \circ H_2) = \deg R$ .  $\square$

Следствие. Пусть дробно-кубическое отображение  $R$  представлено в виде композиции отображений, каждое из которых может иметь лишь одну из следующих форм:  $z \rightarrow z^2$ ,  $z \rightarrow z^3$ ,  $z \rightarrow az + b$  ( $a, b \in \mathbb{K}$ ),  $z \rightarrow 1/z$ . Тогда представление имеет вид

$$R = H_1 \circ (H_2)^3, \quad (*)$$

где  $H_1, H_2$  — дробно-линейные отображения. В частности, отображение  $z \rightarrow z^2$  в представлении отсутствует.

Доказательство. Если в композиции присутствует  $z \rightarrow z^2$ , то в силу леммы 1 (а), (б) степень композиции чётна. Если, далее, отсутствует  $z \rightarrow z^3$ , то степень будет равна 1, а если  $z \rightarrow z^3$  присутствует более одного раза, то степень будет выше 3. Значит,  $z \rightarrow z^3$  присутствует один раз, а до и после этого применяются дробно-линейные отображения. Композиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением. Отсюда следует (\*).  $\square$

Идея решения задачи 27.4 — в сравнении количества параметров. Дробно-кубическая функция задаётся семью параметрами, пара дробно-линейных функций — шестью, а семь независимых параметров невозможно выразить через шесть. Аргумент сравнения количеств параметров кажется очевидным, но его реализация нетривиальна! (Вспомним, что существуют *кривые Пеано*, которые осуществляют непрерывное отображение отрезка на множество более высокой размерности.) Мы воспользуемся тем, что этот аргумент работает для векторных пространств: подпространство векторного пространства не может иметь размерность выше, чем всё пространство.

ЛЕММА 2. Пусть  $Q$  — общий знаменатель рациональных функций  $R_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , его степень равна  $v$ , а максимум степеней функций  $R_i$  равен  $w$ . Тогда множество линейных комбинаций мономов степени не выше  $k$  относительно  $R_1, \dots, R_n$  вкладывается как векторное пространство в множество  $V$  линейных комбинаций мономов степени не выше  $k \cdot (v + w)$  относительно  $x_1, \dots, x_m$ .

Доказательство. Рассмотрим отображение  $g \rightarrow g \cdot Q^k$ , где  $g$  пробегает все линейные комбинации мономов от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$ . Это отображение линейно, взаимно однозначно, и его образ содержится в пространстве  $V$ .  $\square$

ЛЕММА 3. Пусть  $V_{k,m}$  — векторное пространство, состоящее из всех многочленов от  $x_1, \dots, x_m$  степени не выше  $k$ . Тогда размерность пространства  $V_{k,m}$  равна  $\binom{k+m}{m}$ .

Доказательство. Нужная размерность равна количеству различных мономов от  $x_1, \dots, x_m$  с коэффициентом 1 и степени не выше  $k$ . Введя переменную  $x_0$  и домножая мономы на её степени, сведём задачу к подсчёту мономов от  $x_0, x_1, \dots, x_m$  степени ровно  $k$  с коэффициентом 1. Такой моном — произведение  $k$  мономов степени 1, причём

можно считать, что сначала идут вхождения  $x_0$ , потом вхождения  $x_1$  и т. д. После всех вхождений  $x_0$  вставим в строку символ 1, после всех вхождений  $x_1$  — символ 2 и т. д. Получаем строку длины  $k + m$ , и каждый моном степени  $k$  определяется тем, в каких  $m$  позициях стоят символы 1, ...,  $m$ . Отсюда следует ответ.  $\square$

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $R_1, \dots, R_n$  — рациональные функции от  $m < n$  переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Тогда существует такой ненулевой многочлен  $P$ , что  $P(R_1, \dots, R_n) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $k$  — натуральное число, а обозначения  $v, w, V$  имеют тот же смысл, что в лемме 3. Положим  $C = v + w$ . По лемме 3 пространство  $V$  имеет размерность  $\binom{Ck + m}{m}$ .

С другой стороны, по той же лемме 3 количество всевозможных мономов от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$  с коэффициентом 1 равно  $\binom{k + n}{n}$ . При достаточно больших  $k$  имеем

$$\binom{Ck + m}{m} = (Ck + m) \dots (Ck + 1) < (2Ck)^m < k^n < (k + n) \dots (k + 1) = \binom{k + n}{n}.$$

Значит, при достаточно большом  $k$  количество таких мономов больше, чем размерность пространства  $V$ . В силу леммы 2 между мономами от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$  существует линейная зависимость

$$\sum_I a_I R_1^{i_1} \dots R_n^{i_n} = 0.$$

Тогда в качестве искомого многочлена  $P$  можно взять

$$\sum_I a_I y^{i_1} \dots y^{i_n}. \quad \square$$

Продолжим решение задачи 27.4. Пусть некоторое дробно-кубическое отображение  $R$  является композицией отображений, указанных в условии задачи. По следствию из леммы 1 представление имеет вид (\*). Тогда 7 коэффициентов отображения  $R$  являются многочленами от 6 коэффициентов отображений  $H_1, H_2$ . В силу доказанной теоремы существует ненулевой многочлен  $P$ , тождественно равный нулю на коэффициентах любой функции вида (\*). Значит, любое дробно-кубическое отображение, коэффициенты которого не обращают  $P$  в нуль, не представляется в виде (\*).

**Замечание.** В случае комплексных коэффициентов дробно-квадратичная функция представима в виде композиции отображений вида  $z \rightarrow z^2, z \rightarrow az + b, z \rightarrow 1/z$ . В вещественном случае ситуация следующая.

Дана функция

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d},$$

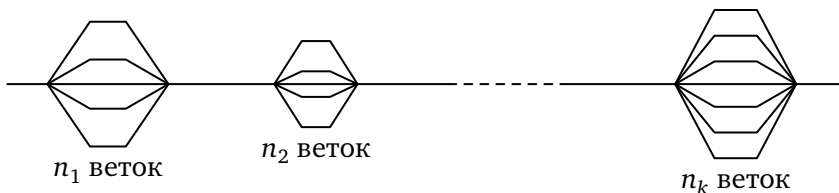
где трёхчлены  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + cx + d$  не имеют общих корней. Тогда следующие два утверждения равносильны:

- 1) найдётся числовой интервал, свободный от значений функции;
- 2) функция  $f(x)$  представима в виде  $f(x) = f_1(f_2(\dots(f_{n-1}(f_n(x))\dots)))$ , где каждая из функций  $f_i(x)$  есть функция одного из видов:  $k_i x + b_i$ ,  $x^{-1}$ ,  $x^2$ .

(Двадцатый Турнир городов, осень 1998 г., основной вариант, 10–11 кл., задача 6, автор А. Я. Канель-Белов. См. в статье: Бугаенко В. О Избранные задачи математических соревнований 1998 года в Москве // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 3. М.: МЦНМО, 1999. С. 215–216, 225–228.)

(А. Я. Канель-Белов)

29.5. Условие. Схема железнодорожного узла имеет следующий вид:



Справа к узлу приближается состав из  $t$  локомотивов, которые могут двигаться лишь справа налево, при этом на одной ветке может уместиться любое число локомотивов. При каком наибольшем  $t$  локомотивы при прохождении через узел могут перестроиться в любом порядке? (Фольклор)

Ответ. При  $M \leq n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .

Решение. Траектория каждого локомотива однозначно определена выбором веток, которые он проходил. А это составляет  $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  возможностей. Если  $M > N$ , то по принципу Дирихле два локомотива будут иметь одну и ту же траекторию и не смогут поменять порядок.

Покажем теперь, что если  $M$  не превосходит  $N$ , то любой порядок осуществим. Сопоставим каждому локомотиву  $k$ -значный код. Последняя (наименее значимая) цифра кода есть число от 1 до  $n_1$ , вторая — от 1 до  $n_2$ , и т. д., старшая цифра — число от 1 до  $n_k$ . Общее количество возможных кодов равно  $N$ , так что если  $M$  не превосходит  $N$ , всем локомотивам можно присвоить разные коды.

Движение локомотивов осуществляется по следующим правилам.

- (а) Только после того, как все локомотивы подъезжают к развилке, они разъезжаются по её веткам.
- (б) Номер ветки, куда направляется локомотив, равен  $i$ -му знаку его кода.
- (с) С развилки сперва выезжают локомотивы первой ветки, затем второй, и т. д.

Легко видеть, что в итоге коды будут возрастать слева направо. Значит, любая перестановка осуществима.

КОММЕНТАРИЙ. На эти темы см.: Кулаков А. Г. Задача 3. Сортировка железнодорожных составов // 8 Летняя конференция Турнира городов. М.: ИЦТГ, 1996. С. 31–38, 76–99. <https://www.turgor.ru/lktg/1996/lktg1996.pdf>.

(А. Канель-Белов, Л. Радзивиловский)

30.10. УСЛОВИЕ. Матрицей Маркова называется квадратная матрица  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , такая, что 1)  $a_{ij} \geq 0$  для любых  $i, j$ ; 2)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $A = (a_{ij})$  — матрица Маркова порядка  $n \geq 18$ . Тогда из неё можно получить циклическими перестановками элементов строк такую матрицу Маркова  $B = (b_{ij})$ , что

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} < 2, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{К. Э. Каибханов})$$

РЕШЕНИЕ содержится в статье: Каибханов К. Э. Об одном свойстве матрицы Маркова // Математическое образование. 2022. № 3(103). С. 23–32. <https://matob.ru/files/nomer103.pdf>.