



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Липанов, Метод численного решения уравнений гидромеханики в многосвязных областях (первое сообщение), *Матем. моделирование*, 2006, том 18, номер 12, 3–18

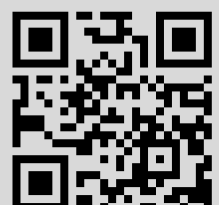
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 100.28.231.85

8 ноября 2024 г., 18:37:16



## МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

(первое сообщение)

© 2006 г. А.М. Липанов

Рассмотрены многосвязные области (МО). Для решения уравнений гидромеханики в таких трехмерных областях с криволинейными граничными поверхностями предлагается делить МО на совокупность конечных объектов (КО) трех типов. Два типа из них односвязные, КО третьего вида двухсвязные. В общем случае КО также имеют криволинейные ограничивающие их поверхности и являются теми пространственными образованиями, на основе которых осуществляется распараллеливание вычислительного процесса. Разностная схема для решения уравнений гидромеханики расписывается для односвязных КО. В двухсвязных КО приближенное решение отыскивается в виде полиномов для заданной совокупности расчетных точек. Начальные и граничные условия формулируются для общей МО. С целью получения непрерывного решения при переходе от одного КО к другому накладываются условия сопряжения соответствующего порядка, определяемого точностью приближенного численного решения. Показано, что при выполнении перечисленных условий величины гидромеханических параметров в МО рассчитываются точно также, как и в односвязных областях.

## NUMERICAL METHOD OF HYDROMECHANICS EQUATIONS IN MULTIPLY CONNECTED DOMAINS

*A.M. Lipanov*

Multiply-connected domains (MDs) have been considered. For solving hydrodynamics equations in these three-dimensional domains with curvilinear boundary surfaces, it is proposed to divide MDs by the totality of final volumes (FV) belonging to three types. FVs of two types are simply-connected, and the FVs of the third type are biconnected. In the general case, the FVs also have curvilinear bounding surfaces, which are spatial formations serving as a basis for carrying out the parallelization of a computational process. For the solution of hydrodynamics equations, the difference scheme is unwound for the simply-connected FVs. In the biconnected FVs, the approximate solution is found in the form of polynomials for the given totality of computation points. The initial and boundary conditions are formulated for the general MD. In order to obtain a continuous solution, the conjugation conditions of the appropriate order being defined by the accuracy of the approximated solution are imposed when passing from one FV to another. It is shown that when the above conditions are fulfilled, the magnitudes of hydromechanical parameters in multiply-connected domains are calculated in the same way as in the simply-connected domains.

### 1. Введение

Проблема аккуратного расчета полей гидромеханических параметров (ГМП) для многосвязных областей (МО) актуальна при решении многочисленных практически важных задач. Это сушка зерна в гуртах потоком теплого воздуха, фильтрация вязкой жидкости через поры в горных породах, очистка загрязненных жидких или газообразных сред фильтрацией через слой частиц, находящихся в некотором объеме и т.д.

Этот перечень задач, где область многосвязная и надо уметь рассчитывать поля ГМП, можно продолжить.

Традиционно такие пространственные задачи сводят к одномерным и решают для односвязной области, используя величину средней пористости и эмпирически найденное сопротивление движению вязкой или идеальной среды [1].

Попытки же более точного решения подобных задач с использованием метода конечных элементов [2] оказываются связанными с необходимостью обращения 3-х мерных матриц тем больших порядков, чем больше масштабы области. Использование систем криволинейных ко-

ординат с началами в геометрических центрах обтекаемых тел сопряжено с необходимостью находить в процессе решения задачи поверхности их пересечения [3]. Это сильно усложняет процесс вычислений и оказывается неприемлемым.

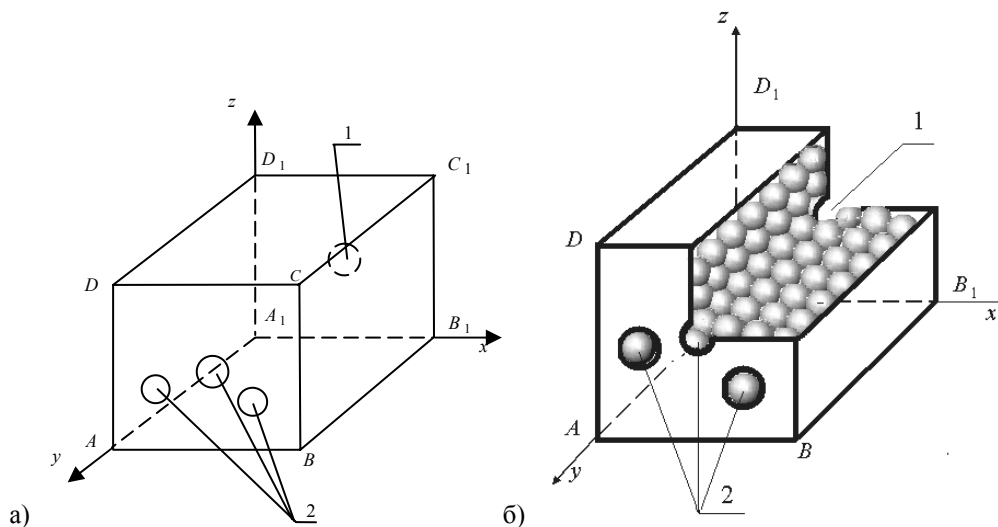
Ниже излагается подход, в котором решение задачи по явной и явно-неявной разностным схемам на каждом шаге интегрирования по времени может быть осуществлено для любой точки с учетом влияния только окружающих её соседних точек. Другими словами решение задачи не связано с необходимостью обращения матриц, относящихся ко всей МО.

## 2. Постановка задачи

Пусть прямоугольный параллелепипед  $Q$  заполнен шарами (рис.1) и сверху плотно закрыт крышкой  $DCC_1D_1$ . Через отверстие 1 грани  $A_1B_1C_1D_1$  в объем параллелепипеда  $Q$  поступает вязкая сжимаемая среда. Она движется между шарами, обтекая их, и между поверхностью параллелепипеда и поверхностями шаров, примыкающих к поверхности параллелепипеда, совершая 3-х мерное движение. Через отверстия 2 грани  $ABCD$  данная среда истекает из параллелепипеда наружу.

Вместо шаров можно рассматривать эллипсоиды, цилиндры, в том числе и многоканальные или другие геометрические образования. Поэтому вместо термина «шары» будем использовать слово «тела».

Если перепад давления  $\Delta P$  между отверстиями 1 и 2 невелик, обтекание тел вязкой средой может быть безотрывным. Однако, начиная с некоторой величины перепада давления  $\Delta P = \Delta P^*$ , частицы среды, обтекая тела, будут образовывать отрывные вихревые зоны. Начиная с некоторых пор (для  $\Delta P > \Delta P^*$ ), эти зоны станут источниками генерации вихрей. Начнется режим нестационарного движения вязкой среды. Можно указать условия, при выполнении которых нестационарное движение может стать турбулентным [4].



**Рис.1.** Многосвязная область.

$AA_1D_1D$ ,  $BB_1C_1C$ ,  $ABCD$ ,  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $ABB_1A_1$ ,  $DCC_1D_1$  – грани параллелепипеда.

1 – отверстие, через которое поступает вязкая или идеальная (невязкая) среда;

2 – отверстия, через которые среда, поступающая в объем параллелепипеда, истекает.

Но в процессе фильтрации через поры между телами движущаяся среда испытывает интенсивное сопротивление. Поэтому, если во входной части объема  $Q$  рассматриваемая среда начинает движение в турбулентном режиме, то на некотором расстоянии от входа это движение должно стать нестационарным, но не турбулентным, а ламинарным.

В результате последующего торможения должен наступить режим ламинарного трехмерного движения с отрывными зонами, но без генерации вихрей, а затем последует и безотрывное обтекание тел.

При заданной вязкости все будет зависеть от величины перепада давления между гранями  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ABCD$ , и толщины пористой среды.

Определенную роль будут играть форма и размеры обтекаемых тел.

Объем между телами, по которому будет двигаться вязкая среда, равен

$$Q_1 = Q - Q_T, \tag{1}$$

где

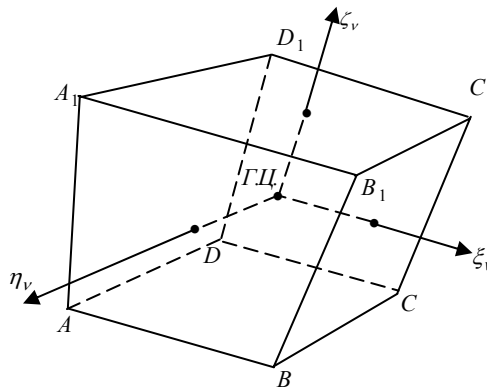
$Q_T$  – суммарный объем, занимаемый обтекаемыми телами в объеме  $Q$ .

Введем общую (глобальную) декартову систему прямоугольных координат  $(x, y, z)$  с координатными поверхностями, совпадающими с гранями  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $AA_1D_1D$ ,  $ABB_1A_1$  параллелепипеда (рис. 1).

Разделим объем  $Q_1$  на  $N$  конечных объемов (КО).

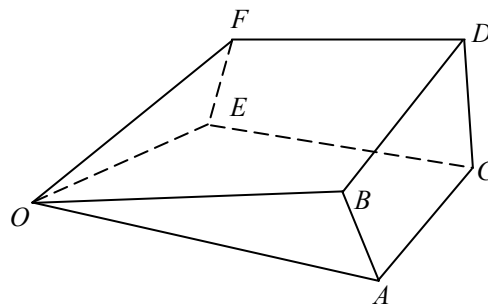
Последние расположим так, чтобы они окружали каждое их обтекаемых тел, соприкасаясь друг с другом (рис. 2). Пронумеруем КО в определенной последовательности от 1 до  $N$ .

Будем рассматривать три вида КО. Прежде всего это КО, контактирующие с обтекаемыми телами. Они имеют ребра, перпендикулярные к обтекаемым телам (рис. 2). Затем КО, являющиеся прямоугольными параллелепипедами. Они находятся внутри ОИ и не контактируют с обтекаемыми телами.



**Рис. 2.**  $v$ -й конечный объем.  
Г.Ц. – геометрический центр КО;  
 $\xi_v, \eta_v, \zeta_v$  – местная (локальная) система координат.

И, наконец, КО, контактирующие одновременно с двумя обтекаемыми телами или с обтекаемым телом и внутренней поверхностью параллелепипеда  $Q$ . Они имеют клинообразную форму (рис. 3) и соответствуют местам касания двух тел или тела с внутренней поверхностью параллелепипеда.



**Рис. 3.** Клинообразный конечный объем.  
O – точка касания двух тел или тела с внутренней поверхностью параллелепипеда.

Количество КО, контактирующих с отдельным телом и их общее число  $N$  в объеме  $Q_1$  определяем асимптотически по результатам сходимости численного решения уравнений гидромеханики с заданной точностью.

Рассматриваем случай, когда тела и все КО неподвижны. С геометрическим центром каждого КО связываем локальную декартову систему координат  $(\xi_v, \eta_v, \zeta_v)$ , где  $v$  – номер КО.

Оси локальной системы координат располагаем так, чтобы ось  $\xi_v$  была коллинеарна грани  $ABCD$   $v$ -го КО (рис. 2), ось  $\zeta_v$  перпендикулярна к этой грани КО, а ось  $\eta_v$  перпендикулярна к плоскости  $(\xi_v, \zeta_v)$ .

Поскольку КО необязательно должны быть прямоугольными параллелепипедами, то другие грани КО (кроме  $ABCD$ ) могут не быть перпендикулярными или параллельными координатным плоскостям локальной системы координат и могут составлять с ней углы, отличные от  $\pi/2$  и нуля.

Локальные координаты  $(\xi_v, \eta_v, \zeta_v)$   $v$ -го КО с глобальными координатами  $(x_v, y_v, z_v)$  будут связаны соотношениями [5]:

$$\begin{aligned}\xi_v &= \alpha_{11}^{(v)} \cdot x_v + \alpha_{12}^{(v)} \cdot y_v + \alpha_{13}^{(v)} \cdot z_v, \\ \eta_v &= \alpha_{21}^{(v)} \cdot x_v + \alpha_{22}^{(v)} \cdot y_v + \alpha_{23}^{(v)} \cdot z_v, \\ \zeta_v &= \alpha_{31}^{(v)} \cdot x_v + \alpha_{32}^{(v)} \cdot y_v + \alpha_{33}^{(v)} \cdot z_v,\end{aligned}\tag{2}$$

где

$\alpha_{ij}^{(v)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты, зависящие от косинусов углов наклона осей  $\xi_v, \eta_v, \zeta_v$  локальной системы координат  $v$ -го КО по отношению к осям  $x_v, y_v, z_v$  глобальной системы координат.

Обратное выражение глобальных координат  $(x_v, y_v, z_v)$  через локальные координаты  $(\xi_v, \eta_v, \zeta_v)$   $v$ -го КО осуществляем с помощью уравнений

$$\begin{aligned}x_v &= \beta_{11}^{(v)} \cdot \xi_v + \beta_{12}^{(v)} \cdot \eta_v + \beta_{13}^{(v)} \cdot \zeta_v, \\ y_v &= \beta_{21}^{(v)} \cdot \xi_v + \beta_{22}^{(v)} \cdot \eta_v + \beta_{23}^{(v)} \cdot \zeta_v, \\ z_v &= \beta_{31}^{(v)} \cdot \xi_v + \beta_{32}^{(v)} \cdot \eta_v + \beta_{33}^{(v)} \cdot \zeta_v,\end{aligned}\tag{3}$$

где

$\beta_{ij}^{(v)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – косинусы углов наклона осей глобальной системы координат  $(x, y, z)$  по отношению к осям  $(\xi_v, \eta_v, \zeta_v)$   $v$ -го КО.

Для любого КО как некоторого объема в системе координат  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  запишем следующую систему уравнений гидромеханики для сжимаемой вязкой среды [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \cdot \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho \cdot \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho \cdot \psi}{\partial \zeta} = 0,\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \cdot \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (P + \rho \cdot \varphi^2) + \frac{\partial \rho \cdot \varphi \cdot \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho \cdot \varphi \cdot \psi}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right\} + \rho \cdot X,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \cdot \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \rho \cdot \varphi \cdot \theta + \frac{\partial}{\partial \eta} (P + \rho \cdot \theta^2) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \rho \cdot \theta \cdot \psi = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right\} + \rho \cdot Y, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \cdot \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \rho \cdot \psi \cdot \varphi + \frac{\partial}{\partial \eta} \rho \cdot \psi \cdot \theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (P + \rho \cdot \psi^2) = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] \right\} + \rho \cdot Z, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \cdot E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (P + \rho \cdot E) \cdot \varphi + \frac{\partial}{\partial \eta} (P + \rho \cdot E) \cdot \theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (P + \rho \cdot E) \cdot \psi = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \cdot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \cdot \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \cdot \psi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \cdot \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \cdot \psi \left( \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \cdot \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \cdot \theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \cdot \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \cdot \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \cdot \psi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu \cdot \psi \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \rho (X \cdot \varphi + Y \cdot \theta + Z \cdot \psi). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$\varphi, \theta, \psi$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{w}$  движения вязкой среды в проекциях на оси прямоугольной системы координат  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно.

$P, \rho$  – давление и плотность движущейся вязкой среды;

$E$  – полная удельная энергия движущейся среды.

$$E = \frac{\varphi^2 + \theta^2 + \psi^2}{2} + C_V \cdot T. \quad (9)$$

Используя уравнение состояния Клапейрона-Менделеева для идеального газа

$$P = \rho RT, \quad (10)$$

и уравнение Майера

$$C_p = C_V + R, \quad (11)$$

равенству (9) придадим следующую форму:

$$E = \frac{\varphi^2 + \theta^2 + \psi^2}{2} + \frac{1}{K-1} \cdot \frac{P}{\rho}. \quad (12)$$

Здесь

$$K = C_p / C_V \quad (13)$$

– отношение изобарной  $C_p$  и изохорной  $C_V$  теплоемкостей. В рассматриваемой постановке отношение  $K$  считаем постоянной величиной,  $R$  – газовая постоянная движущейся среды.

Коэффициенты вязкости  $\mu$  и теплоемкости  $\lambda$  считаем переменными величинами.

Все переменные в уравнениях (4) – (8) безразмерные.

В качестве масштабов возьмем:

$h$  – диаметр отверстия 1 или его максимальный размер, если отверстие 1 (рис.1) не круглое;

$U_0$  – максимальная величина продольной компоненты вектора  $\omega$  в поперечном сечении отверстия 1 (рис.1) на входе в объем  $Q$  в глобальной системе координат.

$P_0, \rho_0$  – величины давления и плотности на входе в объем  $Q$ , соответствующие продольной скорости  $U_0$ .

Безразмерные комплексы

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 \cdot U_0 \cdot h}{\mu_0} \quad (14)$$

– число Рейнольдса;

$$P_r = \frac{C_p \cdot \lambda_0}{\mu_0} \quad (15)$$

-- число Прандля;

( $\mu_0, \lambda_0$  – характерные величины коэффициентов вязкости и теплопроводности, соответствующие величинам  $P_0$  и  $\rho_0$ ).

$$M = U_0 / C_0 \quad (16)$$

– число Маха;

$$C_0 = \left( \frac{K \cdot P_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (17)$$

– характерная скорость звука.

Для решения уравнений (4) – (8) необходимо задать начальные и граничные условия.

Начальными для всех КО могут быть термодинамические условия, когда компоненты вектора скорости равны нулю:

$$\varphi = \theta = \psi = 0, \quad (18)$$

а давление и температура – известные функции пространственных координат, например, константы:

$$P = P_{\text{нач}}, T = T_{\text{нач}}. \quad (19)$$

Что касается граничных условий, то для всех внутренних КО, не выходящих на границы МО, таковыми должны быть условия непрерывного изменения ГМП и их производных как первого, так и второго порядков, а если в процессе решения уравнений (4) – (8) потребуется вычислять производные более высоких порядков, то и их непрерывность на границах между КО тоже.

Дело в том, что любой КО – это не более, чем формально выделяемая часть пространства МО, обусловленная методом численного решения.

Изменение ГМП и их производных любого порядка в вязкой среде непрерывное. Поэтому и при переходе через границы любого КО ГМП и все их частные производные должны изменяться непрерывно.

Поэтому решение уравнений (4) – (8) будем искать в классе функций непрерывных, ограниченных и дифференцируемых любое требуемое число раз.

Если же часть граней КО выходит на границу МО или на твердое тело внутри МО, то для соответствующей грани КО необходимо использовать те граничные условия, которые выполняются на границах МО.

На поверхностях всех тел внутри МО используем условия прилипания:

$$\varphi = \theta = \psi = 0, \quad (20)$$

и условия теплообмена

$$\begin{aligned} T_S &= T_\Gamma, \\ \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial n} &= \lambda_\Gamma \frac{\partial T_\Gamma}{\partial n} \end{aligned} \quad (21)$$

( $n$  – направление местной нормали), если на поверхности тела не протекает никаких физико-химических превращений

или

$$\begin{aligned} T_S &= T_\Gamma, \\ \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial n} &= -\lambda_\Gamma \frac{\partial T_\Gamma}{\partial n} + q_S, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$q_S$  – суммарный тепловой эффект как следствие гетерогенных физико-химических процессов, происходящих на поверхностях твердых тел.

На внутренних поверхностях всех граней рассматриваемого параллелепипеда (рис.1) используем условия (20), (21).

В поперечном сечении отверстия 1 (рис. 1) задаём продольную компоненту  $U_0$  вектора скорости потока, равной [7]:

$$U_\Lambda = f(r, \delta_U) + C_1(P_\Lambda - P_1) \cdot f(r, \delta_S), \quad (23)$$

где

$$f(r, \delta_\mathfrak{Z}) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{r}{\delta_\mathfrak{Z}}\right)^N, & \text{если } 0 \leq r \leq \delta_\mathfrak{Z} \\ 1, & \text{если } \delta_\mathfrak{Z} < r \leq h - \delta_\mathfrak{Z} \\ 1 - \left(\frac{r - h + \delta_\mathfrak{Z}}{\delta_\mathfrak{Z}}\right)^N, & \text{если } h - \delta_\mathfrak{Z} < r \leq h \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathfrak{Z} \Rightarrow (U, S).$$

$U_\Lambda, P_\Lambda$  – продольная компонента вектора скорости и давление на входе в ОИ (в поперечном сечении отверстия 1 (рис.1)).

$C_1$  – постоянная порядка единицы или переменная величина, вычисляемая по формуле [7]:

$$C_1 = \frac{1}{K \cdot M_\Lambda}, \quad (25)$$

где  $M_\Lambda$  – число Маха в поперечном сечении отверстия 1.



$P_1$  – средняя в поперечном сечении отверстия 1 величина давления, являющаяся функцией времени.

$\delta_U, \delta_S$  – толщины пограничных слоев динамического и теплового.

Разность  $P_\wedge - P_1$  в выражении (23) используется для вывода возмущений, приходящих из внутренних точек МО к отверстию 1. В среднем эта разность равна нулю, но при каждом конкретном  $r$  она будет отлична от нуля.

Две другие компоненты вектора скорости  $V_\wedge$  и  $W_\wedge$  принимаем равными нулю:

$$V_\wedge = W_\wedge = 0. \quad (26)$$

Кроме того, в отверстии 1 (рис. 1) задаем условие их энтропичности:

$$P_\wedge = S_\wedge \cdot \rho_\wedge^K, \quad (27)$$

где  $S_\wedge$  – заданная величина энтропийной функции.

На выходе из параллелепипеда вдоль контуров отверстий 2 (рис.1) задаем величину наружного давления.

Обычно на левой границе используют еще то или иное возмущение [8], [4]. Однако, в данном случае такой необходимости нет, поскольку обтекание тел внутри МО привносит тем больше возмущающих воздействий, чем больше тел находится в объеме  $Q$ .

Компоненты  $U, V, W$  вектора скорости  $\omega$  в общей системе координат связаны с компонентами  $\varphi, \theta, \psi$  того же вектора в локальной системе координат выражениями:

$$\begin{aligned} U_v &= \beta_{11}^{(v)} \cdot \varphi_v + \beta_{12}^{(v)} \cdot \theta_v + \beta_{13}^{(v)} \cdot \psi_v, \\ V_v &= \beta_{21}^{(v)} \cdot \varphi_v + \beta_{22}^{(v)} \cdot \theta_v + \beta_{23}^{(v)} \cdot \psi_v, \\ W_v &= \beta_{31}^{(v)} \cdot \varphi_v + \beta_{32}^{(v)} \cdot \theta_v + \beta_{33}^{(v)} \cdot \psi_v. \end{aligned} \quad (28)$$

Если необходимо выразить компоненты  $\varphi, \theta, \psi$  через компоненты  $U, V, W$ , то используем равенства

$$\begin{aligned} \varphi_v &= \alpha_{11}^{(v)} \cdot U_v + \alpha_{12}^{(v)} \cdot V_v + \alpha_{13}^{(v)} \cdot W_v, \\ \theta_v &= \alpha_{21}^{(v)} \cdot U_v + \alpha_{22}^{(v)} \cdot V_v + \alpha_{23}^{(v)} \cdot W_v, \\ \psi_v &= \alpha_{31}^{(v)} \cdot U_v + \alpha_{32}^{(v)} \cdot V_v + \alpha_{33}^{(v)} \cdot W_v. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь

$\alpha_{ij}^{(v)}, \beta_{ij}^{(v)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты перехода от одной системы координат к другой, совпадающие с таковыми в выражениях (2) и (3).

Для численного решения уравнений (4) – (8) каждый КО разбиваем на некоторое число элементарных объемов (ЭО) – малых прямоугольных параллелепипедов.

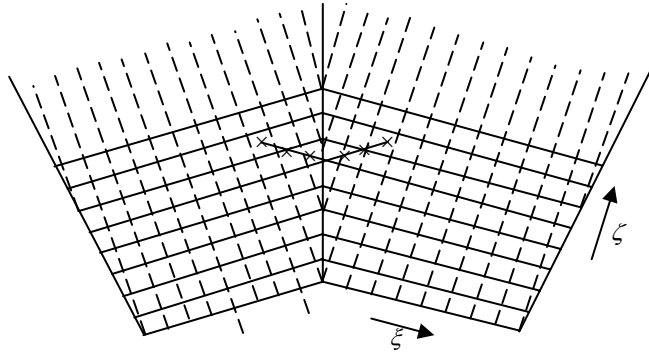
Чем выше точность вычислений, тем на большее число ЭО должен разбиваться каждый КО.

На рис.4 показано сечение двух соседних КО, заполненных ЭО. Зная положение КО в пространстве, определим углы между соседними локальными координатными системами.

При нахождении частных производных от ГМП по пространственным направлениям используем метод неопределенных коэффициентов [9], [4], позволяющий рассчитывать величины нечетных и четных частных производных любого порядка с любой требуемой точностью.

При нахождении частных производных для точек, расположенных в окрестности границ КО, необходимо «заходить» в пределы соседнего КО. На рис.4 показано как это можно сделать, зная относительное взаиморасположение соседних локальных систем координат.

При использовании явной разностной схемы величины параметров в точках, отмеченных на рис. 4 крестиками, на каждом шаге интегрирования по времени находятся интерполированием между точками соседнего КО. Расстояния между точками с крестиками берутся соответствующими таковым для соседнего (слева) КО.



**Рис.4.** Локальные системы координат двух соседних КО, разделенных на ЭО (в плоскости  $(\zeta\xi)$ ).

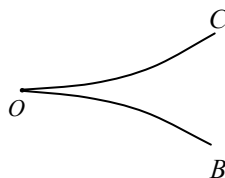
Крестиками показаны точки, используемые в соседнем КО при расчете величин параметров в приграничной между КО зоне.

Поскольку «заходы» в пределы каждого из соседних КО, окружающих рассматриваемый, при расчете частных производных по пространственным направлениям обязательны, они заменяют специальные условия о равенстве величин ГМП и их производных любого порядка на границах соседних КО.

В итоге проблема исключения изломов на границах соседствующих КО при численном решении уравнений гидромеханики (4) – (8) разрешается автоматически.

Если КО одной или бóльшим числом граней выходит на границу ОИ, то расчет частных производных в окрестности границы и на самой границе осуществляем так, как это изложено в работе [4]. Аналогично поступаем, если КО одной из граней или двумя гранями выходит на твердое тело, расположенное внутри МО.

**2.1. Расчет частных производных от ГМП в окрестности касания тел.** Однако в многосвязной ОИ при касании двух твердых тел возникают клинообразные объемы (рис. 3), сечения которых образуют кривые, имеющие точки возврата (рис.5). Аналогичная ситуация имеет место и при касании твердого тела с внутренней поверхностью параллелепипеда. Здесь в окрестности точки  $O$ , используя разностную сетку, трудно определить частные производные в направлении нормалей как для кривой  $OB$ , так и для кривой  $OC$ . Выходом из положения может быть представление ожидаемого решения в виде полинома.



**Рис.5.** Сечение клинообразного КО для касающихся поверхностей двух тел.

При решении задачи со вторым порядком точности можем записать:

$$A = A_0 + A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + A_4\xi^2 + A_5\eta^2 + A_6\zeta^2 + A_7\xi \cdot \eta + A_8\xi \cdot \zeta + A_9\eta \cdot \zeta. \quad (30)$$

Представленная на рис.5 область относится к одному из КО. Количество расчетных точек в каждом КО таково, что всегда позволяет найти совокупность коэффициентов  $A_j (j=0,1,M)$ , входящих в выражение типа (30), где  $M$  – число коэффициентов в выражении типа (30) (в случае использования трех аргументов).

Можно показать, что число коэффициентов  $M$  однозначно связано с порядком аппроксимирующего полинома. Это видно из табл.1, где приведена зависимость числа коэффициентов  $M$  от величины порядка  $m$  аппроксимирующего полинома.

Таблица 1

Число коэффициентов в полиноме в зависимости от его порядка

Порядок полинома, $m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число коэффициентов в полиноме, $M$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	218	286

Зависимость  $M$  от  $m$  целочисленная и для дробных значений числа  $m$  смысла не имеет.

Чтобы определить величины коэффициентов  $A$ , достаточно выражение (30) записать при втором порядке точности решения задачи в десяти расчетных точках соответствующего КО, сформировать систему линейных уравнений относительно десяти неизвестных  $A_j (j=0,1,2,\dots,9)$ , и решить её. В этом случае нет необходимости использовать расчетные точки из соседних КО.

При известных величинах коэффициентов  $A_j (j=0,1,\dots,M)$  частные производные  $\frac{\partial A}{\partial \xi}$ ,

$\frac{\partial A}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial A}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial^2 A}{\partial \eta \partial \zeta}$  находятся дифференцированием выражений типа (30) как непосредственно на границах КО, так и в точках, находящихся в ближайших окрестностях к границам КО.

Аналогично могут быть определены частные производные и более высоких порядков, если в этом возникнет необходимость. Разумеется, в этом случае должен использоваться полином более высокого порядка, чем второй. Переменная  $A$  в выражении типа (30) – это вектор с компонентами  $\rho$ ,  $\rho\varphi$ ,  $\rho\theta$ ,  $\rho\psi$ ,  $\rho E$ . Появление компонентов вектора  $A$  есть следствие записи уравнений (4)–(8) в дивергентной форме.

Чтобы найти величины ГМП в зависимости от компонентов вектора  $A$  необходимо использовать следующие выражения:

для компонентов вектора скорости

$$\varphi = \frac{\rho\varphi}{\rho}; \quad \theta = \frac{\rho\theta}{\rho}; \quad \psi = \frac{\rho\psi}{\rho}; \quad (31)$$

для давления

$$P = (K-1) \left[ \rho E - \frac{(\rho\varphi)^2 + (\rho\theta)^2 + (\rho\psi)^2}{2\rho} \right]. \quad (32)$$

Плотность  $\rho$  получается при решении уравнения (4) непосредственно.

Равенство (32) следует из выражения (12) при решении его относительно  $P$ .

В табл.2 представлены совокупности выражений, сформированных из произведений переменных  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , которые образуют слагаемые, входящие в полиномы типа (30).

В табл.2 коэффициенты  $A_j$  не записаны. Приведены только комбинации выражений различных степеней собственно из переменных  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  для их возможных попарных и тройствен-

ных произведений. Чтобы на их основе построить полином, например, четвертого порядка, достаточно объединить первые пять групп, умножив каждое слагаемое в группе на коэффициент  $A_j$ .

Для полинома четвертого порядка, индекс  $j$  будет изменяться от нуля до тридцати пяти.

Разумеется, если потребуется аппроксимация полиномом десятого порядка, то индекс  $j$  будет изменяться от нуля до двухсот восьмидесяти шести. Кстати, если потребуется использовать полиномы десятого порядка, то матрица  $286 \times 286$  будет наибольшей в процессе решения задачи, которую необходимо будет обращать при определении коэффициентов  $A_j$  в выражениях типа (30).

Данную процедуру необходимо повторять на каждом шаге интегрирования по времени во всех точках в окрестности касающихся поверхностей, пока они не отойдут друг от друга на расстояние, достаточное для применения метода нахождения частных производных с использованием неопределенных коэффициентов [9], [4].

Используя выражение типа (30), сможем находить частные производные любого требуемого порядка как однонаправленные, так и смешанные в окрестностях соприкасающихся поверхностей и на самих поверхностях, включая точки касания.

Таблица 2

Выражения для групп слагаемых с одинаковым порядком в группе

№ группы п/п	Порядок выражения для группы слагаемых	Выражения для слагаемых в группе одного порядка	Кол-во слагаемых в группе
1	0	1	1
2	1	$\xi + \eta + \zeta$	3
3	2	$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta$	6
4	3	$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 + \xi^2\eta + \xi^2\zeta + \eta^2\xi + \eta^2\zeta + \zeta^2\xi + \zeta^2\eta + \xi\eta\zeta$	10
5	4	$\xi^4 + \eta^4 + \zeta^4 + \xi^3\eta + \xi^3\zeta + \eta^3\xi + \eta^3\zeta + \zeta^3\xi + \zeta^3\eta + \xi^2\eta^2 + \xi^2\zeta^2 + \eta^2\xi^2 + \xi^2\eta\zeta + \eta^2\xi\zeta + \zeta^2\xi\eta$	15
6	5	$\xi^5 + \eta^5 + \zeta^5 + \xi^4\eta + \xi^4\zeta + \eta^4\xi + \eta^4\zeta + \zeta^4\xi + \zeta^4\eta + \xi^3\eta^2 + \xi^3\zeta^2 + \xi^3\eta\zeta + \eta^3\xi^2 + \eta^3\zeta^2 + \eta^3\xi\zeta + \zeta^3\xi^2 + \zeta^3\eta^2 + \zeta^3\xi\eta + \xi^2\eta^2\zeta + \xi^2\zeta^2\eta + \eta^2\zeta^2\xi$	21
7	6	$\xi^6 + \eta^6 + \zeta^6 + \xi^5\eta + \xi^5\zeta + \eta^5\xi + \eta^5\zeta + \zeta^5\xi + \zeta^5\eta + \xi^4\eta^2 + \xi^4\zeta^2 + \xi^4\eta\zeta + \eta^4\xi^2 + \eta^4\zeta^2 + \eta^4\xi\zeta + \zeta^4\xi^2 + \zeta^4\eta^2 + \zeta^4\xi\eta + \xi^3\eta^3 + \xi^3\zeta^3 + \xi^3\eta^2\zeta + \xi^3\zeta^2\eta + \eta^3\xi^3 + \eta^3\xi^2\zeta + \eta^3\zeta^2\xi + \zeta^3\xi^2\eta + \zeta^3\eta^2\xi + \xi^2\eta^2\zeta^2$	28
8	7	$\xi^7 + \eta^7 + \zeta^7 + \xi^6\eta + \xi^6\zeta + \eta^6\xi + \eta^6\zeta + \zeta^6\xi + \zeta^6\eta + \xi^5\eta^2 + \xi^5\zeta^2 + \xi^5\eta\zeta + \eta^5\xi^2 + \eta^5\zeta^2 + \eta^5\xi\zeta + \zeta^5\xi^2 + \zeta^5\eta^2 + \zeta^5\xi\eta + \xi^4\eta^4 + \xi^4\zeta^3 + \xi^4\eta^2\zeta + \xi^4\zeta^2\eta + \eta^4\xi^3 + \eta^4\zeta^3 + \eta^4\xi^2\zeta + \eta^4\zeta^2\xi + \zeta^4\xi^3 + \zeta^4\eta^3 + \zeta^4\eta^2\xi + \zeta^4\xi^2\eta + \xi^3\eta^3\zeta + \xi^3\zeta^3\eta + \xi^3\eta^2\zeta^2 + \eta^3\zeta^3\xi + \xi^2\eta^3\zeta^2 + \zeta^3\xi^2\eta^2$	36
9	8	$\xi^8 + \eta^8 + \zeta^8 + \xi^7\eta + \xi^7\zeta + \eta^7\xi + \eta^7\zeta + \zeta^7\xi + \zeta^7\eta + \xi^6\eta^2 + \xi^6\zeta^2 + \xi^6\eta\zeta + \eta^6\xi^2 + \eta^6\xi\zeta + \zeta^6\xi^2 + \zeta^6\eta^2 + \zeta^6\xi\eta + \xi^5\eta^3 + \xi^5\zeta^3 + \xi^5\eta^2\zeta + \xi^5\zeta^2\eta + \eta^5\xi^3 + \eta^5\xi^2\zeta + \eta^5\zeta^2\xi + \zeta^5\xi^3 + \zeta^5\eta^3 + \zeta^5\xi^2\eta + \zeta^5\eta^2\xi + \xi^4\eta^4 + \xi^4\zeta^4 + \xi^4\eta^3\zeta + \xi^4\zeta^3\eta + \xi^4\eta^2\zeta^2 + \eta^4\zeta^4 + \eta^4\xi^3\zeta + \eta^4\zeta^3\xi + \eta^4\xi^2\zeta^2 + \zeta^4\xi^3\eta + \zeta^4\eta^3\xi + \zeta^4\xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3\zeta^2 + \eta^3\zeta^3\xi^2 + \zeta^3\xi^3\eta^2$	45

10	9	$\begin{aligned} & \xi^9 + \eta^9 + \zeta^9 + \xi^8\eta + \xi^8\zeta + \eta^8\xi + \eta^8\zeta + \zeta^8\xi + \zeta^8\eta + \xi^7\eta^2 + \xi^7\zeta^2 + \xi^7\eta\zeta + \eta^7\xi^2 + \\ & + \eta^7\zeta^2 + \eta^7\xi\zeta + \zeta^7\xi^2 + \zeta^7\eta^2 + \zeta^7\xi\eta + \xi^6\eta^3 + \xi^6\zeta^3 + \xi^6\eta^2\zeta + \xi^6\zeta^2\eta + \eta^6\xi^3 + \\ & + \eta^6\zeta^3 + \eta^6\xi^2\zeta + \eta^6\zeta^2\xi + \zeta^6\xi^3 + \zeta^6\eta^3 + \zeta^6\xi^2\eta + \zeta^6\eta^2\xi + \xi^5\eta^4 + \xi^5\zeta^4 + \xi^5\eta^3\zeta + \\ & + \xi^5\zeta^3\eta + \xi^5\eta^2\zeta^2 + \eta^5\xi^4 + \eta^5\zeta^4 + \eta^5\xi^3\zeta + \eta^5\zeta^3\xi + \eta^5\xi^2\zeta^2 + \zeta^5\xi^4 + \zeta^5\eta^4 + \\ & + \zeta^5\xi^3\eta + \zeta^5\eta^3\zeta + \zeta^5\xi^2\eta^2 + \zeta^4\eta^4\zeta + \xi^4\zeta^4\eta + \eta^4\zeta^4\xi + \\ & + \xi^3\eta^4\zeta^2 + \xi^3\zeta^4\eta^2 + \eta^3\xi^2\zeta^4 + \eta^3\xi^4\zeta^2 + \zeta^3\xi^2\eta^4 \end{aligned}$	53
11	10	$\begin{aligned} & \xi^{10} + \eta^{10} + \zeta^{10} + \xi^9\eta + \xi^9\zeta + \eta^9\xi + \eta^9\zeta + \zeta^9\xi + \zeta^9\eta + \xi^8\eta^2 + \xi^8\zeta^2 + \xi^8\eta\zeta + \eta^8\xi^2 + \\ & + \eta^8\zeta^2 + \eta^8\xi\zeta + \zeta^8\xi^2 + \zeta^8\eta^2 + \zeta^8\xi\eta + \xi^7\eta^3 + \xi^7\zeta^3 + \xi^7\eta^2\zeta + \xi^7\zeta^2\eta + \eta^7\xi^3 + \\ & + \eta^7\zeta^3 + \eta^7\xi^2\zeta + \eta^7\zeta^2\xi + \zeta^7\xi^3 + \zeta^7\eta^3 + \zeta^7\xi^2\eta + \zeta^7\eta^2\xi + \xi^6\eta^4 + \xi^6\zeta^4 + \xi^6\eta^3\zeta + \\ & + \xi^6\zeta^3\eta + \xi^6\eta^2\zeta^2 + \eta^6\xi^4 + \eta^6\zeta^4 + \eta^6\xi^3\zeta + \eta^6\zeta^3\xi + \eta^6\xi^2\zeta^2 + \zeta^6\xi^4 + \zeta^6\eta^4 + \\ & + \zeta^6\xi^3\eta + \zeta^6\eta^3\xi + \zeta^6\xi^2\eta^2 + \zeta^5\eta^5 + \xi^5\zeta^5 + \xi^5\eta^4\zeta + \xi^5\zeta^4\eta + \xi^5\eta^3\zeta^2 + \xi^5\zeta^3\eta^2 + \\ & + \eta^5\zeta^5 + \eta^5\xi^4\zeta + \eta^5\zeta^4\xi + \eta^5\xi^3\zeta^2 + \eta^5\zeta^3\xi^2 + \zeta^5\xi^4\eta + \zeta^5\eta^4\xi + \zeta^5\xi^3\eta^2 + \zeta^5\eta^3\xi^2 + \\ & + \xi^4\eta^4\zeta^2 + \xi^4\zeta^4\eta^2 + \eta^4\xi^4\zeta^2 + \xi^3\eta^4\zeta^3 + \xi^3\zeta^4\eta^3 + \eta^3\xi^4\zeta^3 + \xi^2\eta^4\zeta^4 + \eta^2\xi^4\zeta^4 \end{aligned}$	68

**2.2. Интегрирование уравнений гидромеханики во времени.** Далее, рассмотрим вопрос об интегрировании во времени уравнений (4) – (8).

Эту процедуру можно выполнить или по явно- неявной схеме, или по явной схеме.

Пусть в момент времени  $t=t^n$  ( $n$  – число шагов интегрирования по времени) величины всех ГМП в рассматриваемой МО известны. Определив частные производные по пространственным переменным, найдем величины правых частей уравнений (4) - (8) во всех точках каждого КО.

Используя для совокупности переменных  $\rho, \rho\phi, \rho\theta, \rho\psi, \rho E$  обозначение  $A$  как вектора с пятью компонентами  $\rho, \rho\phi, \rho\theta, \rho\psi, \rho E$ , систему уравнений (4) – (8) запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = F(t), \quad (33)$$

где  $F(t)$  – правые части уравнений гидромеханики, зависящие от ГМП и их частных производных по пространственным переменным.

Аппроксимируя правую часть уравнения (33) прямой в пределах шага  $\Delta t$  интегрирования по времени (метод трапеций), для величины  $A^{n+1}$  любой точки МО получим равенство

$$A^{n+1} = A^n + \frac{F^n + F^{n+1}}{2} \cdot \Delta t \quad (34)$$

В первом приближении уравнение (34) решаем по явной схеме при  $F^n = F^{n+1}$ . Находим величины всех параметров при  $t=t^{n+1}$  в первом приближении. С их помощью определяем правые части уравнений (4) – (8) и повторяем расчет по методу трапеций (формула (34)).

При необходимости можно выполнить ещё одно приближение.

В [4] показано, что при интегрировании уравнений (4) – (8) по времени точности решения со вторым порядком оказывается достаточно для широкого диапазона изменения чисел Рейнольдса. При необходимости не составит труда воспользоваться методом Рунге-Кутты третьего порядка. В итоге можно рассчитать величины ГМП как по времени, так и в пространстве и решить рассматриваемую задачу с любой заданной точностью.

Далее, рассмотрим решение данной задачи по явной схеме.

Пусть в момент времени  $t=t^n$  переменные  $\rho, \rho\phi, \rho\theta, \rho\psi, \rho E$  во всех расчетных точках ОИ известны. В момент времени  $t^n + \Delta t$  их величины в тех же точках можно найти, разлагая ожидае-

мое решение в ряд Тейлора:

$$A^{n+1} = A^n + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_n \Delta t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right)_n (\Delta t)^2 + \dots \quad (35)$$

Здесь частные производные  $\partial A / \partial t$  – это левые части уравнений (4) – (8). Чтобы найти частные производные второго порядка  $\partial^2 A / \partial t^2$ , достаточно левые и правые части уравнений (4) – (8) продифференцировать по времени ещё раз.

Учитывая непрерывность получаемого решения, порядок дифференцирования по времени и по пространственным переменным можно менять.

В этом случае, используя уравнения (4), для  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$  получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \rho \varphi}{\partial t \partial \xi} - \frac{\partial^2 \rho \theta}{\partial t \partial \eta} - \frac{\partial^2 \rho \psi}{\partial t \partial \zeta} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t}, \quad (36)$$

но  $\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \rho \theta}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \rho \psi}{\partial t}$  суть левые части уравнений (5) – (7). Заменяя их правыми частями этих уравнений, получим для  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$  выражение, содержащее в правой части только частные производные по пространственным переменным. Порядок их расчета изложен выше.

Расчет вторых частных производных по времени  $\frac{\partial^2 \rho \varphi}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho \theta}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho \psi}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho E}{\partial t^2}$  рассмотрим на примере определения второй частной производной  $\frac{\partial^2 \rho \varphi}{\partial t^2}$ .

Продифференцировав уравнение (5) по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho \varphi}{\partial t^2} = & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varphi^2}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} \rho \varphi \theta - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho \varphi \psi + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right\} + X \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (37)$$

Но  $\frac{\partial P}{\partial t}$  в соответствии с формулой (32) можно записать в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (K-1) \left[ \frac{\partial \rho E}{\partial t} - \frac{\rho \varphi}{\rho} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{\rho \theta}{\rho} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} - \frac{\rho \psi}{\rho} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \frac{(\rho \varphi)^2 + (\rho \theta)^2 + (\rho \psi)^2}{2\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]. \quad (38)$$

Аналогично, записав выражения  $\rho \varphi^2$ ,  $\rho \varphi \theta$ ,  $\rho \varphi \psi$  в виде

$$\rho \varphi^2 = \frac{(\rho \varphi)^2}{\rho}; \quad \rho \varphi \theta = \frac{\rho \varphi \cdot \rho \theta}{\rho}; \quad \rho \varphi \psi = \frac{\rho \varphi \cdot \rho \psi}{\rho}, \quad (39)$$

после дифференцирования по времени будем иметь

$$\frac{\partial \rho \varphi^2}{\partial t} = \frac{2\rho \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{(\rho \varphi)^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \rho \varphi \theta}{\partial t} = \frac{\rho \theta}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\rho \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} - \frac{\rho \varphi \cdot \rho \theta}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \rho \varphi \psi}{\partial t} = \frac{\rho \psi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\rho \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} - \frac{\rho \varphi \cdot \rho \psi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (42)$$

Рассматривая коэффициент вязкости  $\mu$  как функцию температуры и учитывая уравнение состояния (10), можем записать

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\mu}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (43)$$

Выражение для  $\frac{\partial P}{\partial t}$  записано выше (равенство (38)).

Далее, для переменных  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$  используем следующие выражения:

$$\varphi = \frac{\rho \varphi}{\rho}, \quad \theta = \frac{\rho \theta}{\rho}, \quad \psi = \frac{\rho \psi}{\rho}. \quad (44)$$

Тогда для произведений

$$\mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right]; \quad \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right); \quad \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right] &= \frac{d\mu}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) + \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{\rho \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} - \frac{\rho \theta}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} - \frac{\rho \psi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right] \right\}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \frac{d\mu}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{\rho \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} - \frac{\rho \theta}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right], \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{d\mu}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} - \frac{\rho \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} - \frac{\rho \psi}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right]. \quad (47)$$

В итоге все производные по времени в правых частях равенств (38), (40) – (43), (45) – (47) оказываются левыми частями уравнений (4) – (8). Подставляя вместо них правые части этих

уравнений, получим и для  $\frac{\partial^2 \rho \varphi}{\partial t^2}$  выражение, зависящее только от частных производных по

пространственным переменным. Аналогично могут быть получены выражения для

$\frac{\partial^2 \rho \theta}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho \psi}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho E}{\partial t^2}$ . При необходимости можно найти величины  $\frac{\partial^3 A}{\partial t^3}$  и более высокого поряд-

ка.

Учитывая, что все ГМП и их частные производные ограничены, коэффициенты ряда (35) будут конечными величинами.

Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  есть малая величина ( $\Delta t \ll 1$ ). Более того, при использовании явной разностной схемы шаг  $\Delta t$  должен удовлетворять условию устойчивости [10] как

для конвективных слагаемых

$$\frac{\Delta t}{\Delta r} < 1,$$

где

$$\Delta r \Rightarrow (\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta),$$

так и для диссипативных

$$\frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} < 1.$$

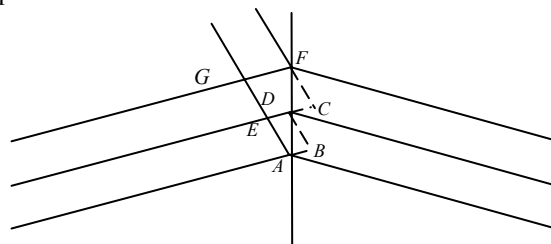
Можно показать [4], что для  $\text{Re} \geq 50$ , если выполняется условие  $\frac{\Delta t}{\Delta r} < 1$ , то условие  $\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} < 1$  выполняется автоматически. Но  $\Delta r$  – это малая величина порядка  $10^{-2}$ . Значит, и  $\Delta t$  будет не больше  $10^{-2}$ . Поэтому ряд (35) будет быстро сходиться, не требуя, как правило, использования слагаемых, пропорциональных  $(\Delta t)^3$  и выше.

В результате и по явной разностной схеме уравнения гидромеханики могут быть решены и в пространстве, и во времени. Более подробно этот вопрос рассмотрен в монографии [4].

**2.3. О расчете величин ГМП на границе двух соседних КО.** Далее, остановимся на порядке расчета величин ГМП для ЭО на границе двух соседних КО. Поскольку при переходе через границу между КО (рис. 4) ГМП изменяются непрерывно, можно предложить следующую вычислительную процедуру.

Образующиеся при пересечении сетки локальной системы координат с границей между КО треугольники и трапеции достраиваем до прямоугольников. На рис.6 это треугольник  $ABD$ , который вместе с треугольником  $EAD$  образует прямоугольный четырехугольник  $EABD$ . Аналогично треугольник  $DCF$  вместе с трапецией  $GEDF$  образует прямоугольный четырехугольник  $GECE$ . Величины ГМП и их производных любого порядка по пространственным переменным в точках  $B$  и  $C$  находим интерполированием, используя их величины для соседнего КО.

После этого расчет величин ГМП для прямоугольных конфигураций осуществляется также, как и для других ЭО внутри КО. Точки  $B$  и  $C$  являются вспомогательными. Величины ГМП в них интегрированием уравнений (4) – (8) не определяются. Величины ГМП в точке  $D$  (рис.6) находим интерполированием требуемого порядка с использованием данных в точках  $C$ ,  $E$  и других точках левого (на рис.6) КО. Аналогично поступаем при расчете величин ГМП для правого КО на рис.6.



**Рис.6.** Граница между двумя КО.  $DAB$  и  $FDC$  – треугольники, используемые для построения прямоугольников  $EABD$  и  $GECE$

**2.4. О тепловой задаче.** В заключение рассмотрим вопрос о нагреве тел, обтекаемых потоком, и стенок параллелепипеда  $Q$ . В последнем случае, если втекающая в объем  $Q$  среда имеет достаточно высокую температуру, необходимо решать 3-х мерную нестационарную тепловую задачу для расчета полей температуры. На внутренних поверхностях граней параллелепи-



педа  $Q$  используем граничные условия (21). Аналогичные условия используем и на их внешних поверхностях.

Нагрев обтекаемых тел рассмотрим для случая, когда последние являются тепловыми изоляторами. В этом случае толщина прогретого слоя  $\delta$  будет мала и будет удовлетворять условию:  $\delta \ll R$ , где  $R$  – радиус или характерный размер обтекаемых тел. Для тонкого прогретого слоя [10] и на криволинейных поверхностях можно использовать уравнение теплопроводности, записанное в декартовых координатах.

Здесь на поверхности обтекаемых тел используем граничные условия (21), пока в прогретых слоях обтекаемых тел не протекают физико-химические превращения, и переходим к использованию условий (22) после начала протекания физико-химических превращений и в прогретых слоях, и на поверхностях обтекаемых тел. Поскольку решение тепловой задачи для различных обтекаемых тел неоднократно рассматривалось [10] в данной работе более подробно на этом вопросе останавливаться не будем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков В.К., Кодолов В.И., Липанов А.М. Моделирование горения полимерных материалов. – М.: Химия, 1990, с.238.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984, с.428.
3. Горохов М.М., Русяк И.Г., Тенев В.А. Численное исследование горения частиц алюминия в двухфазном потоке. // Математическое моделирование, 1997, т.9, №5, с.87-96.
4. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. – Екатеринбург: Издательство Президиума УрО РАН, 2001, с.161.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1986. 544 с.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.II. – М.: Физматгиз, 1968, с.683.
7. Федорченко А.Т. О проблеме вывода вихрей через проницаемую границу расчетной области нестационарного дозвукового потока. // ЖВМ и МФ, 1986, т.26, №1, с.114-129.
8. Рождественский Б.Л., Симакин И.Н. Моделирование турбулентных течений в плоском канале. // ЖВМ и МФ, 1985, т.25, №1, с.96-121.
9. Zalesak S.T. A Physical Interpretation of the Richtmyer two-step Lax-Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order // Advances in computer methods for partial differential equations. Publ. IMACS, 1984, p.491-496.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. – Минск: ЗАО «ЦОТЖ», 1998, с.448.
11. Соркин Р.Е. Внутрикамерные процессы в ракетных системах на твердом топливе. – М.: Наука, 1983, - с.288.

Поступила в редакцию 29.12.05