

УДК 514.7

Егоровские гидродинамические цепочки, уравнение Шази и группа $SL(2, \mathbb{C})^*$

© 2003. В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН, М. В. ПАВЛОВ

Дорогому Израиллю Моисеевичу Гельфанду с восхищением

§1. Введение

В работе [11] при описании динамики жидкости произвольной глубины со свободной поверхностью была выведена первая *гидродинамическая цепочка* — цепочка моментов Бенни

$$\partial_t A_k = \partial_x A_{k+1} + k A_{k-1} \partial_x A_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Эта система уравнений допускает бесконечные наборы законов сохранения и коммутирующих потоков [11, 25, 1] и имеет локальную гамильтонову структуру [4]. Немного позже было показано, что цепочка моментов Бенни эквивалентна бездисперсионному пределу $(2+1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Также [16] была найдена и другая гидродинамическая цепочка

$$\partial_t A_k = \partial_x A_{k+1} + k A_k \partial_x A_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

являющаяся континуальным пределом двумеризованной цепочки Тоды (в классической дифференциальной геометрии ранее известной как цепочка Дарбу–Лапласа). Гидродинамические цепочки в большинстве известных случаев являются бездисперсионными пределами солитонных уравнений. Соответствующие вспомогательные линейные задачи при этом вырождаются. Интегрируемость означает, что уравнения допускают явные решения с помощью преобразования годографа [8, 9].

Квазиклассический переход впервые был эффективно применен для изучения одной из редукций цепочки моментов Бенни — бездисперсионного предела векторного нелинейного уравнения Шрёдингера [1]. Как было показано в [2], бездисперсионный предел соответствует усреднению методом Боголюбова–Уизема многофазных решений интегрируемых уравнений на рациональных кривых. Интегрируемость наследуется при усреднении многофазных решений как $(1+1)$ -систем, так и $(2+1)$ -систем уравнений (см. [2, 3]). Похожее явление известно в теории интегрируемых дисперсионных $(1+1)$ -уравнений; например, результат усреднения уравнения КдФ или нелинейного уравнения Шрёдингера сводится преобразованием по решению к бездисперсионному пределу уравнений «сцепленных» КдФ.

*Работа была частично поддержана грантом поддержки ведущих научных школ 2185.2003.1(ВМБ) и грантами РФФИ 02-01-0659(ВМБ) и 03-01-00100(МВП).

Хотя теория интегрирования $(2+1)$ -систем гидродинамического типа пока не создана, критерий интегрируемости $(2+1)$ -систем гидродинамического типа известен: наличие M -компонентных $(1+1)$ -гидродинамических редукций, параметризуемых M функциями одной переменной, где M — произвольное натуральное число (см. [21, 23]). Впервые примеры $(1+1)$ -гидродинамических редукций были найдены и проинтегрированы в [2] и в [26] для бездисперсионного предела уравнения КП. Уравнения, описывающие все гидродинамические редукции, были найдены в [27, 28] для уравнения Хохлова–Заболоцкой, а недавно и для уравнения Боера–Финли в [22]. В общем случае проблема интегрирования этих уравнений, а также соответствующих гидродинамических редукций для уравнения Хохлова–Заболоцкой остается открытой.

На данный момент уже известно много примеров интегрируемых $(2+1)$ -уравнений, таких, как, например, уравнения Веселова–Новикова и Дэви–Стюардсона; тем не менее, соответствующие им гидродинамические цепочки до недавнего времени не изучались, несмотря на то, что бездисперсионные аналоги этих $(2+1)$ -уравнений были исследованы (см., например, [3]). Дело в том, что требуется одновременное восстановление всех коммутарующих потоков, или, что то же самое, аналогов бездисперсионных уравнений типа Хироты, см. [18]. Наиболее эффективно эта задача решается, если данное $(2+1)$ -уравнение получается как бездисперсионный предел какой-либо $(2+1)$ -интегрируемой задачи. Например, благодаря изучению бездисперсионных пределов псевдодифференциальных операторов типа Сато недавно была найдена бесконечная серия интегрируемых гидродинамических цепочек (см. [12–14]). Эти цепочки, как и примеры выше, полиномиальны по моментам. Для этого класса цепочек проблема эквивалентности с точностью до преобразований, аналогичных преобразованиям Миуры в теории дисперсионных интегрируемых уравнений, остается открытой.

Данная работа посвящена *егоровским* гидродинамическим цепочкам. Термин «егоровские» предложен по аналогии с системами гидродинамического типа — гидродинамические цепочки являются естественным обобщением систем гидродинамического типа на бесконечнокомпонентный случай (см. [7]).

Как показано в [5, 6], описание егоровских гидродинамических цепочек

$$\begin{aligned} \partial_{t^k} H_n &= \partial_{t^0} \Phi_{kn}(H_0, H_1, \dots, H_{n+k}), & k, n &= 0, 1, \dots, \\ \Phi_{kn} &= \Phi_{nk}, & \Phi_{k0} &= H_k, \end{aligned} \quad (1)$$

эквивалентно описанию решений переопределенной системы

$$\begin{aligned} \Phi_{11,1} \Phi_{12,0} + \Phi_{11,2} \Phi_{22,0} &= \Phi_{12,1} \Phi_{11,0} + \Phi_{12,2} \Phi_{12,0} + \Phi_{12,3} \Phi_{13,0}, \\ \Phi_{11,2} \Phi_{22,1} &= \Phi_{12,0} + \Phi_{12,2} \Phi_{12,1} + \Phi_{12,3} \Phi_{13,1}, \\ \Phi_{11,0} + \Phi_{11,1} \Phi_{12,2} + \Phi_{11,2} \Phi_{22,2} &= \Phi_{12,1} \Phi_{11,2} + \Phi_{12,2}^2 + \Phi_{12,3} \Phi_{13,2}, \\ \Phi_{11,1} \Phi_{12,3} + \Phi_{11,2} \Phi_{22,3} &= \Phi_{12,2} \Phi_{12,3} + \Phi_{12,3} \Phi_{13,3}, \\ \Phi_{11,2} \Phi_{22,4} &= \Phi_{12,3} \Phi_{13,4}, \end{aligned} \quad (2)$$

где мы использовали обозначение $\Phi_{nk,m} = \partial_{H_m} \Phi_{nk}$.

Следует указать, что система уравнений (2) тесно связана с вариантом уравнений ассоциативности, предложенным в [15].

Непосредственно из системы (2) следует, что функция Φ_{11} полностью определяет все остальные функции Φ_{ik} . Из свойств егоровских систем гидродинамического типа [7] вытекает, что функции Φ_{12} , Φ_{13} и Φ_{22} связаны с Φ_{11} формулами,

напоминающим бездисперсионные уравнения Хироты [18]. Поэтому, говоря о решении системы (2), мы имеем в виду нахождение функции Φ_{11} .

Первые результаты по интегрированию системы (2) были получены в [5]. На первом шаге интегрирования получается уравнение

$$\partial_{H_2} \Phi_{11} = \frac{1}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma + \varepsilon H_2}, \quad (3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — произвольные константы. В [5, 6] получены следующие частные решения возрастающей сложности:

1. $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = (0, 0, 1, 0)$. Тогда

$$\Phi_{11} = H_2 + \frac{1}{4}(AH_1 + BH_0)^2 + CH_1 + EH_0 + G \exp\{-AH_0\},$$

где A, B, C, E, G — произвольные постоянные.

2. $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = (1, 0, 0, 0)$. Получаем частное решение, связанное с предыдущим заменой переменных $(H_0, H_1, H_2) \rightarrow (-H_0^{-1}, H_1 H_0^{-1}, (H_2 + H_1^2) H_0^{-1})$.

3. $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = (0, 1, 0, 0)$. Тогда

$$\Phi_{11} = (H_2 + BH_0 + C)H_1^{-1} + \frac{1}{6} \eta(H_0)H_1^2,$$

где B и C — произвольные постоянные, а $\eta(t)$ — решение уравнения Шази

$$\eta''' + 2\eta\eta'' - 3\eta'^2 = 0. \quad (4)$$

4. $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = (0, 0, 0, 1)$. Пусть $ad - bc = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = \log H_2 - \log \theta_1 \left(\frac{1}{\pi} \frac{H_1}{cH_0 + d}, \frac{1}{\pi i} \frac{aH_0 + b}{cH_0 + d} \right) \\ - \frac{1}{4} \int \eta(H_0) dH_0 + \frac{1}{2} \log(cH_0 + d) + \frac{cH_1^2}{cH_0 + d}, \end{aligned}$$

где $\theta_1(x, \tau)$ — стандартная нечетная эллиптическая θ -функция, а $\eta(t)$, как и выше, — решение уравнения Шази.

Симметричная запись $\Phi_{kn} = \Phi_{nk}$ гидродинамической цепочки (1) позволяет интерпретировать решения системы (2) как (2+1)-системы гидродинамического типа. А именно, после перехода от $(\Phi_{11}, H_0, H_1, H_2)$ к $(\Omega_{tt}, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy})$ в простейшем из приведенных случаев получается (2+1)-система гидродинамического типа

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \frac{1}{4}(A\Omega_{xt} + B\Omega_{xx})^2 + C\Omega_{xt} + E\Omega_{xx} + G \exp\{-A\Omega_{xx}\},$$

которая является обобщением одновременно бездисперсионного уравнения КП (уравнения Хохлова–Заболоцкой)

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \Omega_{xx}^2$$

и уравнения Боера–Финли [16, 17]

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \Omega_{xt}^2,$$

связанного с длинноволновым пределом иерархии двумеризованной цепочки Тоды.

Два других частных решения дают такие (2+1)-системы:

$$\Omega_{tt} = \frac{\Omega_{xy} + B\Omega_{xx} + C}{\Omega_{xt}} + \frac{1}{6}\eta(\Omega_{xx})\Omega_{xt}^2,$$

$$\Omega_{tt} = \log \Omega_{xy} - \log \theta_1 \left(\frac{1}{\pi} \frac{\Omega_{xt}}{c\Omega_{xx} + d}, \frac{1}{\pi i} \frac{a\Omega_{xx} + b}{c\Omega_{xx} + d} \right) - \frac{1}{4} \int \eta(\Omega_{xx}) d\Omega_{xx} + \frac{1}{2} \log(c\Omega_{xx} + d) + \frac{c\Omega_{xt}^2}{c\Omega_{xx} + d}.$$

Системы, включающие зависимость через эллиптическую θ -функцию, уже возникали. Так, в [29] показано, что усредненные методом Боголюбова–Уизема уравнения двумеризованной цепочки Тоды на эллиптических кривых имеют вид

$$\Omega_{tt} = F(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy})$$

и функция F включает эллиптическую θ -функцию. Другой пример такого рода систем был найден в недавней работе [21] при описании двухкомпонентных (2+1)-систем гидродинамического типа.

Сформулируем основные результаты этой работы.

При выбранных в уравнении (3) параметрах $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = -3\xi^2)$ общее решение системы (2) задается формулой

$$\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2) = \frac{1}{3\xi^2} \log \left[C_0 \frac{(cH_0 + d)\sigma\left(\frac{\xi H_1 + z_0}{cH_0 + d}\right), g_2\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right), g_3\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right)}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma - 3\xi^2 H_2} \right] + \frac{1}{6\xi^2} \left(\frac{(\xi H_1 + z_0)^2}{(cH_0 + d)^2} \eta\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right) + \frac{6c(\xi H_1 + z_0)^2}{cH_0 + d} \right)$$

с параметрами $(C_0, z_0) \in \{\mathbb{C}^2 \mid C_0 \neq 0\}$ и

$(a, b, c, d) \in \{\mathbb{C}^4 \mid ad - bc = 1\} \cup \{\mathbb{C}^4 \mid (ad - bc) = 0, |c| + |d| > 0, \text{Im}[a\bar{c} + b\bar{d}] \neq 0\}$,

где $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, инварианты которой заданы формулами

$$g_2(t) = 12(\eta^2(t) + 6\eta'(t)), \quad g_3(t) = -8(\eta^3(t) + 9\eta(t)\eta'(t) + 9\eta''(t)),$$

а функция $\eta(\cdot)$ — некоторое невырожденное решение уравнения Шази. Если решение уравнения Шази выбрано в виде

$$\eta(t) = \begin{cases} -\partial_t \log \theta'_1(0, t) & \text{при } \text{Im } t > 0, \\ -\partial_t \log \theta'_1(0, -t) & \text{при } \text{Im } t < 0 \end{cases}$$

и $ad - bc = 1$, то функция $\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2)$ как функция переменной H_0 имеет существенную особенность вдоль окружности $\text{Im}[(aH_0 + b)(\bar{c}\bar{H}_0 + \bar{d})] = 0$.

Классическое действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на пространстве решений уравнения Шази индуцирует действие этой группы на пространстве решений системы (2). Индуцированное действие согласовано с действием на пространстве параметров общего решения полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ с умножением $(T_2, t_2) * (T_1, t_1) = (T_2 T_1, t_2)$. Это позволило выделить (в терминах их параметров) *базисные* частные решения, порождающие под действием полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ все решения с $|\xi| > 0$.

Вопрос о регулярности общего решения в окрестности точки $\xi = 0$ и метод получения частных решений, отвечающих выбору параметров $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, из общего

решения предельным переходом $\xi \rightarrow 0$ мы обсуждаем в последнем параграфе работы.

Как будет видно ниже, построение решения системы (2) существенно опирается на модулярные свойства эллиптических функций. Обобщения на N -компонентный и на многомерный случаи, возможно, приведут к новым интегрируемым системам, для решения которых потребуются модулярные свойства абелевых функций нескольких переменных.

§2. Редукция основной системы уравнений

Система уравнений (2) переопределена. Функции, входящие в эту систему уравнений, зависят от разного числа полевых переменных: $\Phi_{11} = \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2)$, $\Phi_{12} = \Phi_{12}(H_0, \dots, H_3)$, $\Phi_{13} = \Phi_{13}(H_0, \dots, H_4)$ и $\Phi_{22} = \Phi_{22}(H_0, \dots, H_4)$, см. (1). Последовательно исключая функции Φ_{22} , Φ_{13} и Φ_{12} , получаем систему из 10 уравнений на функцию Φ_{11} , которая включает подсистему

$$\Phi_{11,2}\Phi_{11,i,j,2} - 2\Phi_{11,i,2}\Phi_{11,j,2}, \quad i, j = 0, 1, 2, i \geq j.$$

Эта подсистема эквивалентна одному уравнению

$$\Phi_{11,2} = \ell^{-1}, \quad \text{где } \ell = \alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma + \varepsilon H_2. \quad (5)$$

Введем обозначение $u_{ij\dots} = \Phi_{11,i,j,\dots}$. Тогда оставшиеся четыре уравнения дают систему

$$\begin{aligned} u_{111} + 2\beta u_{11}\ell^{-1} - 2\beta(2\alpha + \beta u_1)\ell^{-2} &= 2\varepsilon(2u_{01} + u_1 u_{11}), \\ u_{011} + 2\alpha u_{11}\ell^{-1} - 2(\alpha^2 + \beta^2 u_0)\ell^{-2} &= 2\varepsilon(u_{00} + u_0 u_{11}), \\ u_{001} + 2(2\alpha u_{01} - \beta u_{00})\ell^{-1} + 2\alpha(\alpha u_1 - 2\beta u_0)\ell^{-2} &= -2\varepsilon(u_{00}u_1 - 2u_0 u_{01}), \\ u_{000} + 2(u_{00}u_{11} - u_{01}^2) + 2\{\alpha(u_{00} - 2u_{01}u_1 + 2u_0 u_{11}) - 2\beta(u_0 u_{01} - u_{00}u_1)\} &\ell^{-1} \\ - 2\{\alpha^2 u_0 + (\beta u_0 - \alpha u_1)^2\} &\ell^{-2} = 2\varepsilon(u_0 u_{00} - 2u_0 u_{01}u_1 + u_{00}u_1^2 + u_0^2 u_{11}). \end{aligned} \quad (6)$$

Положим $\varepsilon = 0$ в (5) и (6). Тогда

$$\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2) = H_2/\ell^{(0)} + F^{(0)}(H_0, H_1), \quad \text{где } \ell^{(0)} = \alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma,$$

а $F^{(0)}(H_0, H_1)$ удовлетворяет системе уравнений (6) с нулевыми правыми частями и заменой ℓ на $\ell^{(0)}$. Эта система не нуждается в дальнейших упрощениях. Она интегрируется последовательно рассмотрением частных случаев. Три из них даны во введении.

Для $\varepsilon \neq 0$ решение уравнения (5) можно записать в виде

$$\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2) = \frac{1}{\varepsilon} \log[\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma + \varepsilon H_2] + F(H_0, H_1), \quad (7)$$

где функция $F(H_0, H_1)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} F_{111} &= 2\varepsilon(2F_{01} + F_1 F_{11}), \\ F_{011} &= 2\varepsilon(F_{00} + F_0 F_{11}), \\ F_{001} &= -2\varepsilon(F_{00}F_1 - 2F_0 F_{01}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$F_{000} + 2(F_{00}F_{11} - F_{01}^2) = 2\varepsilon(F_0 F_{00} - 2F_0 F_{01}F_1 + F_{00}F_1^2 + F_0^2 F_{11}).$$

Приступим к редукции этой системы.

Первое уравнение системы (8) имеет общее решение вида

$$F = -\frac{1}{4\varepsilon} \int \eta(H_0) dH_0 - \frac{1}{\varepsilon} \log w(H_0, H_1), \quad (9)$$

где $\eta(H_0)$ — произвольная функция, а $w(H_0, H_1)$ — решение уравнения теплопроводности

$$4\varepsilon w_0 = w_{11}. \quad (10)$$

Положим

$$\rho = F_1, \quad v = F_{11}. \quad (11)$$

Первое уравнение системы (8) может быть переписано в виде

$$\rho_0 = \frac{1}{4\varepsilon} v_1 - \frac{1}{2} \rho v. \quad (12)$$

Подставляя выражение (9) во второе уравнение системы (8) и принимая во внимание выражение (12) и его дифференциальное следствие

$$v_0 = \frac{1}{4\varepsilon} v_{11} - \frac{1}{2} \rho v_1 - \frac{1}{2} v^2, \quad (13)$$

получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} v_1^2 = 4v^3 - 4\eta v^2 - 8\eta' v + \delta(H_0), \quad (14)$$

где $\delta(H_0)$ — некоторая функция. Третье уравнение системы (8) выполняется автоматически. Подставив приведенные выше выражения в четвертое уравнение системы (8), получим, что

$$\delta(H_0) = -\frac{8}{3} \eta''. \quad (15)$$

Мы пришли к системе дифференциальных уравнений

$$4\varepsilon w_0 = w_{11}, \quad (16a)$$

$$v_0 = v^2 - \eta v - \eta' - \frac{1}{2} \rho v_1, \quad (16b)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} v_1^2 = 4v^3 - 4\eta v^2 - 8\eta' v - \frac{8}{3} \eta'', \quad (16c)$$

где

$$\rho = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_1 \log w \quad \text{и} \quad v = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_1^2 \log w. \quad (17)$$

Далее, используя теорию эллиптических функций Вейерштрасса, мы построим решение системы уравнений (16a) и (16c), покажем, что уравнение Шази

$$\eta''' + 2\eta\eta'' - 3\eta'^2 = 0 \quad (18)$$

представляет собой условие ее совместности, и проверим, что уравнение (16b) выполняется автоматически, если η удовлетворяет уравнению (18).

§3. Построение общего решения редуцированной системы

Сравним уравнение (16с) с определяющим уравнением теории эллиптических функций Вейерштрасса

$$\wp_z(z, g_2, g_3)^2 = 4\wp^3(z, g_2, g_3) - g_2\wp(z, g_2, g_3) - g_3.$$

Полагая

$$g_2(H_0) = 12(\eta^2 + 6\eta'), \quad g_3(H_0) = -8(\eta^3 + 9\eta\eta' + 9\eta'') \quad \text{и} \quad z = \xi H_1 + z_0,$$

где $\xi^2 = -\varepsilon/3$ и z_0 — постоянная, находим, что при

$$v(H_0, H_1) = \frac{1}{3}\{\eta - \wp(\xi H_1 + z_0, g_2(H_0), g_3(H_0))\}$$

уравнение (16с) выполняется тождественно.

Сравнивая соотношения

$$\wp(z, g_2, g_3) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \log \sigma(z, g_2, g_3)$$

со вторым равенством в (17), получаем, что существуют такие функции $B(H_0)$ и $C(H_0)$, что

$$w(H_0, H_1) = \sigma(\xi H_1 + z_0, g_2(H_0), g_3(H_0)) \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi H_1 + z_0)^2 \eta(H_0) + B(H_0)(\xi H_1 + z_0) + C(H_0)\right\}. \quad (19)$$

Для дальнейшего продвижения нам потребуются линейные дифференциальные операторы, аннулирующие функцию $\sigma(z, g_2, g_3)$ (см., например, [10]). Пусть

$$L_0 = z\partial_z - 4g_2\partial_{g_2} - 6g_3\partial_{g_3} - 1, \quad L_1 = \partial_z^2 - 12g_3\partial_{g_2} - \frac{2}{3}g_2^2\partial_{g_3} + \frac{1}{12}g_2z^2.$$

Тогда

$$L_0(\sigma(z, g_2, g_3)) = 0 \quad \text{и} \quad L_1(\sigma(z, g_2, g_3)) = 0.$$

Уравнение (16а) накладывает на функцию $w(H_0, H_1)$, заданную формулой (19), условие, которое при помощи операторов L_0 и L_1 , сводится к соотношению

$$\begin{aligned} &\{2\xi B(H_0) + \xi(\xi H_1 + z_0)(B(H_0)^2 + 3\eta + 12C'(H_0)) \\ &\quad + 2\xi(\xi H_1 + z_0)^2(B(H_0)\eta + 6B'(H_0))\}\sigma + 8\xi g_2(H_0)B(H_0)\sigma_{g_2} \\ &\quad + \{12\xi g_3(H_0)B(H_0) + 864\xi(\xi H_1 + z_0)H_1(3\eta'^2 - 2\eta\eta'' - \eta''')\}\sigma_{g_3} = 0. \end{aligned}$$

Ввиду того что

$$\sigma(z, g_2, g_3) = z - z^5 \frac{g_2}{240} - z^7 \frac{g_3}{840} + O(z^9),$$

функции $\{\sigma, z\sigma, z^2\sigma, \sigma_{g_2}, \sigma_{g_3}, z\sigma_{g_3}\}$ линейно независимы как функции от z . Мы получаем, что

$$B(H_0) = 0, \quad C'(H_0) = -\frac{1}{4}\eta \quad \text{и} \quad \eta''' + 2\eta\eta'' - 3\eta'^2 = 0.$$

Вычислим $C(H_0)$. Положим $\Delta(H_0) = g_2(H_0)^3 - 27g_3(H_0)^2$. Имеем

$$\Delta'(H_0) + 2\eta\Delta(H_0) = 3888g_3(H_0)(\eta''' + 2\eta\eta'' - 3\eta'^2). \quad (20)$$

Отсюда находим, что $C'(H_0) = \frac{1}{8}(\log \Delta(H_0))'$, когда η удовлетворяет уравнению Шази.

Таким образом,

$$w(H_0, H_1) = C_0 \Delta(H_0)^{1/8} \sigma(\xi H_1 + z_0, g_2(H_0), g_3(H_0)) \exp \left\{ \frac{1}{2} (\xi H_1 + z_0)^2 \eta(H_0) \right\}, \quad (21)$$

где C_0 — постоянная, а $\eta(H_0)$ — решение уравнения (18).

Перейдем к уравнению (16b). Операторы

$$D_0 = 4g_2 \partial_{g_2} + 6g_3 \partial_{g_3} - z \partial_z, \quad D_1 = 12g_3 \partial_{g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \partial_{g_2} - 2\zeta(z, g_2, g_3) \partial_z$$

являются дифференцированиями поля эллиптических функций [24] (напомним, что $\zeta = \partial_z \log \sigma$). В частности (см. [10]),

$$D_0(\wp) - 2\wp = 0 \quad \text{и} \quad D_1(\wp) - 4\wp^2 + \frac{2}{3} g_2 = 0. \quad (22)$$

Выполнив подстановки, согласно (17) и (21), находим, что уравнение (16b) сводится к линейной комбинации тождеств (22) и уравнению (18).

ТЕОРЕМА 1. *Пара функций $(w(x, t), \eta(t))$, где функция $w(x, t)$ дана формулой (21) и $\eta(t)$ — общее решение уравнения Шази, задает общее решение редуцированной системы (16a)–(16c).*

В формуле (21) можно легко перейти от σ -функции к θ -функции. Однако при таком переходе связь с решением уравнения Шази становится неявной.

§4. Преобразования общего решения

Начнем с преобразований решения уравнения Шази (18), индуцированных дробно-линейными преобразованиями $T(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ его аргумента.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $\eta = \eta(t)$ удовлетворяет уравнению Шази и $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем $|c| + |d| > 0$. Функция*

$$(T\eta)(t) = \frac{1}{(ct+d)^2} \eta\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) + \frac{6c}{ct+d} \quad (23)$$

удовлетворяет уравнению Шази тогда и только тогда, когда

$$(ad - bc - 1)(ad - bc) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на многообразии решений уравнения Шази.*

Изучение действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ на решениях уравнения Шази восходит к работам самого Шази. Современный обзор результатов в этом направлении см. в [19].

У уравнения Шази имеются вырожденные решения $\eta^{(0)}(t) = 0$ и $\eta^{(1)}(t) = 1$.

ЛЕММА 2. *Орбита $G^{(0)}$ действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ на решении $\eta^{(0)}(t)$ состоит из рациональных функций вида*

$$\frac{6c}{ct+d}.$$

Стационарная подгруппа решения $\eta^{(0)}(t)$ образована матрицами $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $ad = 1$.

Орбита $G^{(1)}$ действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ на решении $\eta^{(1)}(t)$ состоит из рациональных функций вида

$$\frac{1}{(ct + d)^2} + \frac{6c}{ct + d}.$$

Стационарная подгруппа решения $\eta^{(1)}(t)$ образована матрицами $\begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $d^2 = 1$.

Других решений уравнения Шази, стационарная подгруппа которых имеет положительную размерность, не существует.

Опишем невырожденное решение уравнения Шази.

Пусть $(2\omega, 2\omega')$ — периоды, отвечающие инвариантам (g_2, g_3) . Положим, как обычно, $\tau = \omega'/\omega$. Известно, что «модулярная» эллиптическая функция $\varphi(\tau) = \omega\zeta(\omega, g_2, g_3) = \zeta(1, g_2\omega^4, g_3\omega^6)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi'''(\tau) - \frac{12i}{\pi}(2\varphi(\tau)\varphi''(\tau) - 3\varphi'(\tau)^2) = 0,$$

что дает решение уравнения Шази вида $\eta^{(2)}(t) = -(12i/\pi)\varphi(t)$. Используя известное соотношение

$$\zeta(\omega, g_2, g_3) = -\frac{1}{12\omega} \frac{\theta_1'''(0, \tau)}{\theta_1'(0, \tau)},$$

получаем

$$\eta^{(2)}(t) = -\frac{1}{\pi i} \frac{\theta_1'''(0, t)}{\theta_1'(0, t)},$$

где $\theta_1'(0, \tau)$ и $\theta_1'''(0, \tau)$ — значения в $v = 0$ производных $\partial_v \theta_1(v, \tau)$ и $\partial_v^3 \theta_1(v, \tau)$ стандартной нечетной θ -функции $\theta_1(v, \tau) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\{i\pi((n-1/2)^2\tau + (2n-1)v)\}$.

Орбиту действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ на каноническом решении $\eta^{(2)}(t) = -\partial_t \log \theta_1'(0, t)$ обозначим через $G^{(2)}$.

Согласно лемме 1, вырожденные матрицы $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $|c| + |d| > 0$, действуют на пространстве решений уравнения Шази. Соответствующие им операторы будем называть *вырождающими*.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Вырождающее преобразование $T = \begin{pmatrix} \mu c & \mu d \\ c & d \end{pmatrix}$, $|c| + |d| > 0$, действует следующим образом:*

$$(T\eta)(t) = \frac{\eta(\mu)}{(ct + d)^2} + \frac{6c}{ct + d} \in \begin{cases} G^{(1)}, & \text{если } \eta(\mu) \neq 0, \\ G^{(0)}, & \text{если } \eta(\mu) = 0. \end{cases}$$

Зададим действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ и вырождающих операторов на функциях $w(x, t)$ так:

$$(Tw)(x, t) = (ct + d)^{-1/2} \exp\left\{3\xi^2 \frac{cx^2}{ct + d}\right\} w\left(\frac{x}{ct + d}, \frac{at + b}{ct + d}\right). \quad (24)$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть пара функций $(\eta(t), w(x, t))$ задает решение системы (16a)–(16c); тогда ее преобразования согласно формулам (23) и (24) дают решение $((T\eta)(t), (Tw)(x, t))$ этой системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (21) описывает решение системы (16a)–(16c) как функцию от выбранного решения $\eta(t)$ уравнения Шази. Запишем решение системы (16a)–(16c) как функцию преобразованного решения $(T\eta)(t)$ уравнения Шази:

$$(Tw)(x, t) = C_0 (T\Delta)(t)^{1/8} (T\sigma)(\xi x, g_2(t), g_3(t)) \exp \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 x^2 (T\eta)(t) \right\}.$$

Требуется найти $(T\sigma)(x, g_2(t), g_3(t))$ и $(T\Delta)(t)$. Подробнее:

$$\begin{aligned} (T\sigma)(x, g_2(t), g_3(t)) &= \sigma(x, (Tg_2)(t), (Tg_3)(t)), \\ (T\Delta)(t) &= (Tg_2)(t)^3 - 27(Tg_3)(t)^2. \end{aligned}$$

Инварианты σ -функции g_2 и g_3 связаны с решением $\eta(t)$ уравнения Шази следующим образом:

$$g_2(t) = 12(\eta^2(t) + 6\eta'(t)), \quad g_3(t) = -8(\eta^3(t) + 9\eta(t)\eta'(t) + 9\eta''(t)), \quad (25)$$

Применяя преобразование (23), получаем

$$(Tg_2)(t) = \frac{g_2\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}{(ct+d)^4}, \quad (Tg_3)(t) = \frac{g_3\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}{(ct+d)^6}, \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (T\sigma)(x, g_2(t), g_3(t)) &= (ct+d)\sigma\left(\frac{x}{ct+d}, g_2\left(\frac{at+b}{ct+d}\right), g_3\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)\right), \\ (T\Delta)(t) &= \frac{\Delta\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}{(ct+d)^{12}}. \end{aligned}$$

Мы установили, что преобразование (23) индуцирует преобразование (24). \square

§5. Общие решения на орбитах группы $SL(2, \mathbb{C})$

Итак, согласно (9) и (7), мы получили общее решение исходной системы

$$\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2) = \frac{1}{3\xi^2} \log \left\{ C_0 \frac{\sigma(\xi H_1 + z_0, g_2(H_0), g_3(H_0))}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma - 3\xi^2 H_2} \right\} + \frac{1}{6} \left(H_1 + \frac{z_0}{\xi} \right)^2 \eta(H_0) \quad (27)$$

как функцию от выбранного решения $\eta(t)$ уравнения Шази.

Выбрав представителя $\eta^{(2)}(t)$ в орбите $G^{(2)}$ и применив найденные выше формулы индуцированного действия группы $SL(2, \mathbb{C})$, получаем следующую формулу для общего решения на орбите $G^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{(2)}(H_0, H_1, H_2) &= \frac{1}{3\xi^2} \log \left[C_0 \frac{(cH_0 + d)\sigma\left(\frac{\xi H_1 + z_0}{cH_0 + d}, g_2\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right), g_3\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right)\right)}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma - 3\xi^2 H_2} \right] \\ &+ \frac{1}{6\xi^2} \left(\frac{(\xi H_1 + z_0)^2}{(cH_0 + d)^2} \eta^{(2)}\left(\frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}\right) + \frac{6c(\xi H_1 + z_0)^2}{cH_0 + d} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

На орбите $G^{(1)}$ простейший представитель — это $\eta^{(1)}(t) = 1$. Инварианты σ -функции, согласно (25), оказываются равными $g_2(t) = 12$, $g_3(t) = -8$, а дискриминант Δ равен нулю на всей орбите, см. (26). Эллиптическая функция вырождается до тригонометрической. Общее решение на $G^{(1)}$ имеет вид

$$\Phi_{11}^{(1)}(H_0, H_1, H_2) = \frac{1}{3\xi^2} \log \left[C_0 \frac{(cH_0 + d) \operatorname{sh} \left(\frac{\xi H_1 + z_0}{cH_0 + d} \right)}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma - 3\xi^2 H_2} \exp \left(\frac{3c(\xi H_1 + z_0)^2}{cH_0 + d} \right) \right]. \quad (29)$$

На орбите $G^{(0)}$ берем $\eta^{(0)}(t) = 0$. Инварианты $g_2(t)$ и $g_3(t)$ равны 0 на всей орбите, и поэтому σ -функция вырождается до рациональной функции. Соответствующее общее решение имеет вид

$$\Phi_{11}^{(0)}(H_0, H_1, H_2) = \frac{1}{3\xi^2} \log \left[C_0 \frac{\xi H_1 + z_0}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma - 3\xi^2 H_2} \exp \left(\frac{3c(\xi H_1 + z_0)^2}{cH_0 + d} \right) \right]. \quad (30)$$

Вырождающие преобразования переводят (28) в (29) или (30), а (29) в (30). Таким образом, формула (28) задает наиболее общий вид решения исследуемой системы (2). Аналитические свойства, описанные во введении, вытекают из аналитических свойств решений уравнения Шази [20, 19].

§6. Базисные решения

Выше мы получили две формы записи общего решения системы (2), а именно, форму (27), в которой свободными параметрами являются постоянные C_0 и z_0 , вектор $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = -3\xi^2) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^3$, а также некоторое решение уравнения Шази $\eta(t)$, и форму (28), в которой выбрано «стандартное» решение $\eta^{(2)}(t)$ и введены параметры a, b, c, d , позволяющие перейти от стандартного решения к любому заданному решению.

Рассмотрим полугруппу $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$, образованную парами (T, t) с законом композиции

$$(T_2, t_2) * (T_1, t_1) = (T_2 T_1, t_2).$$

Рассмотрим отображение $p: \mathbb{C}^9 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $p(H_0, H_1, H_2, \alpha, \gamma, z_0, \beta, \xi, C_0) = (\beta, \xi, C_0)$, как проекцию тривиального расслоения. Тогда определено послойное действие

$$(T, t)(H_0, H_1, H_2, \alpha, \gamma, z_0; \beta, \xi, C_0) = (\tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{z}_0; \beta, \xi, C_0)$$

полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$, заданное в слое над точкой (β, ξ, C_0) при $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ формулами

$$\tilde{H}_0 = \frac{aH_0 + b}{cH_0 + d}, \quad \tilde{H}_1 = \xi^{-1} \left(\frac{\xi H_1 + z_0}{cH_0 + d} - t \right), \quad \tilde{H}_2 = \frac{H_2}{cH_0 + d}, \quad (31)$$

$$\tilde{\alpha} = -c(\gamma - \beta\xi^{-1}z_0) + d\alpha, \quad \tilde{\gamma} = a(\gamma - \beta\xi^{-1}z_0) - b\alpha + \beta\xi^{-1}t, \quad \tilde{z}_0 = t.$$

Действие полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$, заданное формулами (31), индуцирует действие на пространстве функций вида (27). Будем рассматривать (27) как формулу, задающую отображение $\Phi_{11}: \mathbb{C}^9 \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда, обозначив для краткости точку слоя $(H_0, H_1, H_2, \alpha, \gamma, z_0)$ через X , имеем

$$\Phi_{11}((T, t)(X; \beta, \xi, C_0)) - (T\Phi_{11})(X; \beta, \xi, C_0) + c(H_1 + \xi^{-1}z_0)(\tilde{H}_1 + \xi^{-1}t) = 0. \quad (32)$$

Действительно, согласно результатам предыдущих параграфов, формула (28), с точностью до переобозначения, задает преобразование $T\Phi_{11}$ общего решения в форме (27). Тожество (32) непосредственно вытекает из сопоставления этих формул.

Таким образом, мы заключаем, что ограничение описанного выше послонного действия полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ на подрасслоение $\hat{p}: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\hat{p}(\alpha, \gamma, z_0; \beta, \xi, C_0) = (\beta, \xi, C_0)$, является действием на пространстве параметров общего решения системы (2) в форме (27), индуцированным преобразованиями (23) и (24). Если $|\beta| > 0$, слой над точкой базы (β, ξ, C_0) является орбитой точки $(0, 0, 0; \beta, \xi, C_0)$. Над точками базы $(0, \xi, C_0)$ слой состоит из двух орбит — орбиты, проходящей через точку $(0, 1, 0; 0, \xi, C_0)$, и неподвижной точки $\{(0, 0, 0; 0, \xi, C_0)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Решение системы (2) в форме (27) с параметрами $\{(\alpha, 0, \gamma, -3\xi^2), z_0, C_0\}$ получается из решения с параметрами $\{(0, 0, 1, -3\xi^2), 0, C_0\}$ под действием преобразования (T, t) , где $a\alpha + c\gamma = 0$ и $t = z_0$.*

Решение системы (2) в форме (27) с параметрами $\{(\alpha, \beta, \gamma, -3\xi^2), z_0, C_0\}$, где $|\beta| > 0$, получается из решения с параметрами $\{(0, \beta, 0, -3\xi^2), 0, C_0\}$ композицией преобразований $(1_2, \beta^{-1}\xi)$ и (T, t) .

Таким образом, мы описали базисные решения, порождающие под действием полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ все решения с $|\xi| > 0$, в терминах их параметров.

§7. Условие регулярности решений при $\xi \rightarrow 0$

Рассмотрим решение исходной системы вида (28) при дополнительном условии, что все входящие в него параметры являются функциями от ξ , допускающими разложение в ряд Лорана при $\xi = 0$. В этих условиях функция $\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2; \xi)$ будет регулярной в точке $\xi = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Psi(H_0, H_1, H_2; \xi) = \exp \left\{ \frac{\xi^2}{3} \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2; \xi) \right\} = 1 + O(\xi^2)$$

при всех значениях переменных H_0, H_1 и H_2 .

ТЕОРЕМА 3. *Подмногообразие решений системы (2) вида (28), регулярных в точке $\xi = 0$, выделяется следующими условиями:*

$$\begin{aligned} \Psi(H_0, H_1, H_2; 0) &= 1, & \partial_\xi \Psi(H_0, H_1, H_2; \xi)|_{\xi=0} &= 0, \\ \partial_{H_i} \Psi(H_0, H_1, H_2; \xi)|_{\xi=0} &= 0, & i &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Опишем предел одного из базисных решений.

Пусть $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$. Возьмем общее решение в форме (27). Положим

$$z_0 = 0, \quad C_0(\xi) = \xi^{-1}, \quad (\alpha(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi)) = (3\alpha_2\xi^2, 1, 3\gamma_2\xi^2).$$

Получаем частное решение — третий пример из введения.

$$\Phi_{11}^{(0)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi_{11} = \eta(H_0) \frac{H_1^2}{6} - \frac{\alpha_2 H_0 + \gamma_2 - H_2}{H_1}.$$

Заметим, что поскольку описанное выше действие полугруппы $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ — послонное, очевидная регуляризация $z_0(\xi) = \xi z_0$ и $t(\xi) = \xi t$ дает действие этой полугруппы на пространстве решений с $\xi = 0$, см. второй пример из введения.

Благодарности

Авторы признательны С. П. Новикову за стимулирующие обсуждения результатов работы и И. М. Кричеверу за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи. Функци. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 15–24 (1980).
2. *Кричевер И. М.* Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений. Функци. анализ и его прил., **22**, вып. 3, 37–52 (1988).
3. *Кричевер И. М.* Спектральная теория двумерных операторов и ее приложения. УМН, **44**, вып. 2, 121–184 (1989).
4. *Купершмидт Б. А., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью II. Гамильтонова структура и высшие уравнения. Функци. анализ и его прил., **12**, вып. 1, 25–37 (1978).
5. *Павлов М. В.* Новые интегрируемые (2+1)-уравнения гидродинамического типа. УМН, **58**, вып. 2, 171–172 (2003).
6. *Павлов М. В.* Классификация интегрируемых егоровских гидродинамических цепочек. Теор. мат. физ., в печати.
7. *Павлов М. В., Царев С. П.* Тригамильтоновы структуры егоровских систем гидродинамического типа. Функци. анализ и его прил., **37**, вып. 1, 38–54 (2003).
8. *Царев С. П.* О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа. ДАН СССР, **282**, №3, 534–537 (1985).
9. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа. Изв. АН СССР. сер. матем., **54**, №5, 1048–1068 (1990).
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами (под ред. М. Абрамовица, И. Стиган), Наука, М., 1979.
11. *Benney D. J.* Some properties of long non-linear waves, Stud. Appl. Math., **52**, 45–50 (1973).
12. *Błaszak M.* Classical R -matrices on Poisson algebras and related dispersionless systems. Phys. Lett. A, **297**, 191–195 (2002).
13. *Błaszak M., Szablikowski B. M.* Classical R -matrix theory of dispersionless systems: I. (1+1)-dimension theory. J. Phys. A: Math. Gen., **35** 10325–10344 (2002).
14. *Błaszak M., Szablikowski B. M.* Classical R -matrix theory of dispersionless systems: II. (2+1)-dimension theory. J. Phys. A: Math. Gen., **35**, 10345–10364 (2002).
15. *Boyarsky A., Marshakov A., Ruchayskiy O., Wiegmann P., Zabrodin A.* Associativity equations in dispersionless integrable hierarchies. Phys. Lett. B, **515**, 483–492 (2001).
16. *Boyer C. P., Finley J. D.* Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces. J. Math. Phys., **23**, 1126–1130 (1982).
17. *Boyer C. P., Finley J. D., Plebarnski J. F.* Complex general relativity, H and HH spaces—a survey of one approach. In: General Relativity and Gravitation, Vol. 2, Plenum, New York, 1980, pp. 241–281.
18. *Carroll R., Kodama Y.* Solutions of the dispersionless Hirota equations. J. Phys. A: Math. Gen., **28**, 6373 (1995).
19. *Clarkson P. A., Olver P. J.* Symmetry and the Chazy equation. J. Diff. Eq., **124**, 225–246 (1996).
20. *Chazy J.* Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale possède un coupure essentielle mobile. C.R. Acad. Sc. Paris, **150**, 456–458 (1910).
21. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R.* On integrability of (2+1)-dimensional quasi-linear systems. Comm. Math. Phys., to appear; arXiv: nlin.SI/0305044.
22. *Ferapontov E. V., Korotkin D. A. and Shramchenko V. A.* Boyer–Finley equation and systems of hydrodynamic type, Class. Quantum Grav., **19**, No. 24, L205–L210 (2002).

23. *Ferapontov E. V., Pavlov M. V.* Hydrodynamic reductions of the heavenly equation. *Class. Quantum Grav.*, **20**, No. 11, 2429–2441 (2003).
24. *Frobenius F., Stichelberger L.* Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten. *Crelle's Journal*, **XCII**, 311–337 (1882).
25. *Gibbons J.* Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations. *Phys. D*, **3**, No. 3, 503–511 (1981).
26. *Gibbons J., Kodama Y.* A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. II. *Phys. Lett. A*, **135**, No. 3, 167–170 (1989).
27. *Gibbons J., Tsarev S. P.* Reductions of the Benney equations. *Phys. Lett. A*, **211**, 19–24 (1996).
28. *Gibbons J., Tsarev S. P.* Conformal maps and reductions of the Benney equations. *Phys. Lett. A*, **258**, 263–270 (1999).
29. *Krichever I.M., Marshakov A., Zabrodin A.* Integrable Structure of the Dirichlet Boundary Problem in Multiply-Connected Domains. [arXiv:hep-th/0309010](https://arxiv.org/abs/hep-th/0309010).

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: buchstab@mendeleevo.ru

Институт Магнетизма НАН Украины

e-mail: dile@imag.kiev.ua

Loughborough University

e-mail: maxim.pavlov@mtu-net.ru

Поступило в редакцию

15 сентября 2003 г.