Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Фонарев, О решении нелинейных уравнений в некоторых нормированных пространствах, *Дифференц. уравнения*, 1980, том 16, номер 12, 2177–2180

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
16 марта 2025 г., 16:39:34

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДЕКАБРЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 12

УДК 518:517.948.34

А. А. ФОНАРЕВ

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Вводятся пространства с p-нормой и формулируются некоторые их свойства. В введенных пространствах рассматриваются итерационные процессы, сходящиеся к решению нелинейного уравнения при любом начальном приближении. Дается приложение к обыкновенному дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно старшей производной, причем вместо дифференциального уравнения рассматривается соответствующее ему интегро-дифференциальное уравнение, решение которого является обобщенным решением дифференциального уравнения.

Рассматривается итерационный процесс в вещественном гильбертовом пространстве для отображений с условием монотонности слабее, чем в [1], причем обобщается теорема 1 из [2].

Определение 1. Нормированное пространство E называется пространством с p-нормой, если существует отображение $V: E\times E\to K$ (K — комплексная плоскость; если пространство E вещественное, то K заменяется на вещественную прямую R), заданное для $(x, y)\in E\times E$, такое, что $V(\gamma x, y)=\gamma V(x, y)$ для $\gamma\in R$ и выполняется одно из следующих двух условий: 1) существуют число $p\in(1, 2]$ и положительные числа $C_1=C_1(p)$, $C_2=C_2(p)$ такие, что $\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+C_1\|x\|^{p-2}\times\times\operatorname{Re} V(x, y)+C_2\|y\|^p$ для $x, y\in E$; 2) существуют число $p>2$ и положительные числа $C_1=C_1(p)$, $C_2=C_2(p)$, $C_3=C_3(p)$ такие, что $\|x+y\|^p\leqslant\leqslant\|x\|^p+C_1\|x\|^{p-2}\operatorname{Re} V(x, y)+C_2\|y\|^p+C_3\|x\|^{p-2}\|y\|^2$ для $x, y\in E$.

Пространствами с p-нормой являются: гильбертово пространство H; пространство l_p последовательностей комплексных чисел $x=(x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ с нормой $\|x\|=(\Sigma\,|x_i|^p)^{1/p}$ (здесь и далее, где не указываются пределы изменения индекса i, индекс i принимает значения натуральных чисел от 1 до ∞ и везде, где встречается p, $p>1$) для $x\in l_p$; лебегово пространство $L_p(G)$ комплекснозначных функций $x(u)$, заданных на измеримом множестве G конечной меры, принадлежащем конечномерному евклидову пространству; пространство С. Л. Соболева $W_p^m(\omega)$ комплекснозначных функций, заданных на ограниченной области n-мерного евклидова пространства [3, с. 367—368]; пространство типа Жеврея $W_p^\infty(\omega)$ [4, с. 201], являющееся пространством Соболева бесконечного порядка. Далее, в H имеем $p=2$, $C_1=2$, $C_2=1$, $V(x, y)$ — скалярное произведение в H; в пространствах l_p, L_p, W_p^m, W_p^∞ имеем $C_1=p$, $V(x, y)=\langle U(x), y\rangle$, где U — дуальное отображение соответственно из l_p, L_p, W_p^m, W_p^∞ в сопряженное пространство, а $\langle z, y\rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $z\in E^*$ (E^* — пространство, сопряженное с нормированным пространством E) на элементе $y\in E$ (см. [3]).

1. Свойства пространств с p-нормой.

Теорема 1. *Пространство с p-нормой равномерно гладко.*

Из теоремы 1 и [5, с. 300] вытекают два следствия.

Следствие 1. *Пространство E^*, сопряженное с пространством E с p-нормой, равномерно выпукло.*

Следствие 2. *Банахово пространство с p-нормой рефлексивно.*

Теорема 2. *Пусть для пространства E с p-нормой отображение V из определения 1 такое, что $V(x, y)=\langle\varphi(x), y\rangle$, где φ — отображение из E в E^*. Если последовательность $\{u_i\}\subset E$ слабо сходится к $u\in E$, то существует такая подпоследовательность $\{u_{i_n}\}$ последовательности $\{u_i\}$, что*

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}u_{i_n}-u\right\|\to 0 \ \text{при} \ m\to\infty. \tag{1}$$

Из следствия 2 и теоремы 2 вытекает теорема Банаха — Сакса для пространств с p-нормой [6, с. 189], т. е.

Теорема 3. *Пусть для банахова пространства E с p-нормой отображение V из определения 1 такое же, как в теореме 2. Если последовательность $\{u_i\}\subset E$ ограниченная, то существуют такие подпоследовательность $\{u_{i_n}\}$ последовательности $\{u_i\}$ и элемент $u\in E$, что справедливо (1).*

2. Итерационные процессы в пространствах с p-нормой. Отметим, что в банаховом пространстве с p-нормой при $|V(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ справедливы: предложение, аналогичное теореме 21.1 из [3], и предложение, аналогичное теоремам для приближений типа наискорейшего спуска в l_p и L_p [3, теоремы 21.5 и 21.6].

При рассмотрении пространства E с p-нормой последовательность положительных чисел $\{\alpha_i\}$ будем называть подходящей, если ряд $\Sigma\,\alpha_i$ расходится и выполняется одно из следующих двух условий: 1) ряд $\Sigma\,\alpha_i^p$ сходится, если $p\in(1, 2]$; 2) ряд $\Sigma\,\alpha_i^2$ сходится, если $p>2$.

Теорема 4. *Пусть E — пространство с p-нормой и $p\in(1, 2]$. Предположим, что: 1) отображение F из линейного множества $D\subseteq E$ в D ограниченное; 2) уравнение*

$$F(x)=0 \quad (x\in E) \tag{2}$$

имеет обобщенное решение $x_0\in E$, т. е. $\|x-x_0\|^{p-2}\operatorname{Re}V(x-x_0, F(x))\geqslant\geqslant m(\|x-x_0\|)$ для всех $x\in D$, где $m(t)$ — непрерывная функция, заданная для $t\geqslant 0$, такая, что $m(0)=0$, $m(t)>0$ для $t>0$. Тогда для любых чисел δ и γ таких, что $\delta\geqslant\gamma\geqslant 0$, и любой подходящей последовательности $\{\alpha_i'\}$ ИП (итерационный процесс)

$$x_{i+1}=x_i-\alpha_i F(x_i) \tag{3}$$

$(i=1, 2, \ldots;\ \alpha_i=\alpha_i'/a_i,\ \ \|F(x_i)\|+\delta\geqslant a_i\geqslant\|F(x_i)\|+\gamma)$, начатый с любой точки $x_1\in D$, сходится к x_0.

Теорема 4 доказывается так же, как теорема 1 из [2].

Теорема 5. *Пусть E — пространство с p-нормой и $p>2$. Предположим, что выполнены условия 1, 2 теоремы 4. Тогда для любых чисел δ, γ, δ_0, γ_0 таких, что $\delta\geqslant\gamma>0$, $\delta_0\geqslant\gamma_0>0$, и любой подходящей последовательности $\{\alpha_i'\}$ ИП (3) $(i=1, 2, \ldots;\ \alpha_i=\alpha_i'/(a_ib_i)$, $\|F(x_i)\|+\delta\geqslant a_i\geqslant\|F(x_i)\|+\gamma$, $(\|x_i\|+\delta_0)^{(p-2)/p}\geqslant b_i\geqslant(\|x_i\|+\gamma_0)^{(p-2)/p})$, начатый с любой точки $x_1\in D$, сходится к x_0.*

Замечание 1. Теоремы 4, 5 остаются справедливыми, если условие 2 теоремы 4 заменить на условие: уравнение (2) имеет обобщенное решение $x_0 \in E$, т. е. $\mathrm{Re}\, V(x-x_0, F(x)) \geqslant m(r)\|x-x_0\|^2$ для всех $x \in D$, где $r=\max(\|x\|, \|x_0\|)$, а $m(t)$ — положительная невозрастающая функция, заданная для $t \geqslant 0$. Причем при $\alpha_i' = 1/i$ для последовательности $\{x_i\}$ ИП (3) в теореме 4 (соответственно 5) при отмеченной замене имеем $\|x_i-x_0\| = O(i^{-\alpha/p})$, где постоянная $\alpha \in (0, 1)$.

Замечание 2. В теореме 4 (соответственно 5) и замечании 1 уравнение (2) имеет единственное обобщенное решение $x_0 \in E$ в силу единственности предела последовательности $\{x_i\}$ ИП (3).

Замечание 2 справедливо, ибо хотя в теореме 4 и замечании 1 функция $m(t)$, при помощи которой определяется обобщенное решение $x_0 \in E$, вообще говоря, зависит от x_0, однако ИП (3) теорем 4, 5 не зависит от функции $m(t)$.

Достаточное условие выполнения условия 2 теоремы 4 дает

Теорема 6. *Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, у которого сопряженное пространство E^* равномерно выпукло, F — непрерывное ограниченное отображение из E в E такое, что $\langle U(x-y), F(x)-F(y)\rangle \geqslant m(\|x-y\|)$ для всех $x, y \in E$, где $m(t)$ — такая же функция, как в условии 2 теоремы 4 (U — дуальное отображение из E в E^*). Тогда отображение F есть гомеоморфизм E на E.*

Теорема 6 доказывается с использованием теоремы 22.4 из [3].

В связи с ИП (3) представляет интерес (ср. [7, теорема 1])

Теорема 7. *Пусть E — пространство с p-нормой и для отображения F из множества $D \subseteq E$ в E выполнено условие 2 теоремы 4. Предположим, что подходящая последовательность $\{\alpha_i\}$ и последовательность $\{x_i\} \subseteq D$ такие, что $x_{i+1} = x_i - \alpha_i F(x_i)$ $(i=1, 2, \ldots)$. Тогда если последовательности $\{x_i\}$ и $\{F(x_i)\}$ ограничены, то $x_i \to x_0$ при $i \to \infty$.*

3. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной. Рассмотрим задачу Коши $(m \geqslant 1)$

$$\begin{gathered} x^{(m)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(m)}), \\ x^{(i)}(0) = 0 \quad (i=0, \ldots, m-1), \end{gathered} \tag{4}$$

где $t \in [0, 1]$, а вещественная функция $f(t, y)$ определена на $B=[0, 1]\times \times R^{m+1}$ (R^{m+1} есть $(m+1)$-мерное евклидово пространство), непрерывна по $y \in R^{m+1}$ почти при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ и измерима по t при каждом $y \in R^{m+1}$.

Пусть $W_p^m(0, 1)$ — соболевское пространство вещественных функций с нормой $\|x\|_{p,m} = \left(\int\limits_0^1 |x^{(m)}(t)|^p dt\right)^{1/p}$ для $x \in W_p^m(0, 1)$ таких, что $x^{(i)}(0)=0$ $(i=0, \ldots, m-1)$. Очевидно, что для дуального отображения U из $W_p^m(0, 1)$ в $(W_p^m(0, 1))^*$ имеем $\langle U(x), y\rangle = \|x\|_{p,m}^{2-p} \int\limits_0^1 |x^{(m)}(t)|^{p-2} x^{(m)}(t) y^{(m)}(t)\, dt$ для $x, y \in W_p^m(0, 1)$.

Предположим, что выполнены условия: 1) для $(t, y) \in B$ имеем $|f(t, y)| \leqslant C\left(a(t) + \sum\limits_{i=1}^{m+1} |y_i|\right)$, где $a(t) \in L_p(0, 1)$, $y=(y_1, \ldots, y_{m+1}) \in R^{m+1}$, C постоянная; 2) для любых $x, y \in W_p^m(0, 1)$ имеем $\langle U(x-y), \psi(x) - \psi(y)\rangle \geqslant M\|x-y\|_{p,m}^2$ (постоянная $M>0$), где ψ — отображение из $W_p^m(0, 1)$ в $W_p^m(0, 1)$, определяемое следующим образом:

$$\psi(x)=x(t)-\int_0^t\left(\int_0^{\tau_m}\ldots\left(\int_0^{\tau_2}f(\tau_1,x(\tau_1),x'(\tau_1),\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,x^{(m)}(\tau_1))\,d\tau_1\right)\ldots d\tau_{m-1}\right)d\tau_m$$

для $x\in W_p^m(0, 1)$. Тогда для отображения ψ выполнены условия теоремы 6 и замечания 1.

Назовем обобщенным решением задачи (4) функцию $x_0\in W_p^m(0, 1)$, являющуюся решением интегро-дифференциального уравнения $\psi(x)=0$ $(x\in W_p^m(0, 1))$.

Теорема 8. *Для нахождения обобщенного решения $x_0\in W_p^m(0, 1)$ задачи (4) применим ИП (3) теоремы 4 (соответственно 5) с отображением ψ, причем при $\alpha_i'=1/i$ $(i=1, 2, \ldots)$ для последовательности $\{x_i\}$ ИП (3) имеем $\|x_i-x_0\|_{p,m}=O(i^{-\alpha/p})$ (постоянная $\alpha\in(0, 1)$).*

4. ИП в вещественном гильбертовом пространстве H.

Теорема 9. *Пусть для монотонного (определение см. в [3]) отображения $F:H\to H$ выполнено условие 2 теоремы 4, в котором в данном случае $D=E=H$, $p=2$, $V(x, y)=(x, y)$ — скалярное произведение в H. Тогда для любых чисел δ и γ таких, что $\delta\geqslant\gamma>0$, и любой последовательности положительных чисел $\{\alpha_i'\}$ такой, что ряд $\Sigma\,\alpha_i'$ расходится и ряд $\Sigma\,(\alpha_i')^2$ сходится, ИП (3) теоремы 4, начатый с любой точки $x_1\in H$, сходится к x_0.*

Замечание 3. Пусть для монотонного отображения $F:H\to H$ выполнено условие замечания 1, при этом $D=E=H$, $V(x, y)$ — скалярное произведение в H. Тогда справедливо заключение теоремы 9, причем при $\alpha_i'=1/i$ $(i=1, 2, \ldots)$ для ИП (3) имеем $\|x_i-x_0\|=O(i^{-q/2})$ (постоянная $q\in(0, 1)$).

Замечание 4 (см. замечание 2). В теореме 9 и замечании 3 уравнение (2) имеет единственное обобщенное решение $x_0\in H$ (ср. [1, теорема 5]).

Замечание 5. Теорема 2 из [2] остается справедливой при замене в ней существования обычного решения существованием обобщенного решения, а если в теореме 2 из [2] пространство вещественное, то она остается справедливой без требования ограниченности отображения и при отмеченной замене. При этом справедливо замечание 3, переформулированное для теоремы 2 из [2] (ибо в теореме 2 из [2] можно заменить неравенство $1/2<\alpha<1$ на неравенство $1/2<\alpha\leqslant1$).

В заключение отметим, что теорема 6 из [2] остается справедливой без требования ограниченности отображения F (см. [2]).

Литература

1. Перов А. И., Юргелас В. В.— ЖВМ и МФ, 1977, т. 17, № 4, с. 859—870.
2. Фонарев А. А.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 4, с. 680—689.
3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.
5. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
6. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.
7. Bruck Ronald E.— J. Math. Anal. and Appl., 1974, vol. 48, N 1, p. 114—126.

Московский институт стали и сплавов

Поступила в редакцию 17 ноября 1978 г.