Функциональный анализ и его приложения
1991, т. 25, вып. 3, с. 12—18

УДК 517.3

МОНОДРОМИЯ ОБРАЗА ОТОБРАЖЕНИЯ $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$

В. В. Горюнов

Рассмотрим росток отображения $\mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^{n+1}, 0$ конечной лево-правой ($\mathcal{A}$-) коразмерности. Пусть его представитель f определен на достаточно малом шаре $D \subset \mathbf{C}^n$ с центром в 0. Пусть $f_{\lambda_0}\colon D \to \mathbf{C}^{n+1}$ — достаточно близкое к f отображение, имеющее только $\mathcal{A}$-устойчивые мультиособенности (уитнификация f). Д. Монд [6] показал, что образ f_{λ_0} в $\mathbf{C}^{n+1}$ гомотопически эквивалентен букету конечного числа n-мерных сфер. Мы будем обозначать это конечное число через σ. При $n = 2$ показано также, что σ не меньше $\mathcal{A}$-коразмерности исходного ростка, а для квазиоднородного отображения совпадает с ней (для отображения прямой в плоскость соответствующие утверждения почти тривиальны, но легко видеть, что если пара $(n, n+1)$ лежит вне области хороших размерностей [2], т. е. $n > 6$, то дословно такие же утверждения неверны). Тем самым, образ V устойчивого возмущения ростка отображения $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ аналогичен милноровскому слою функции с изолированной критической точкой. В настоящей статье мы, продолжая эту аналогию, определяем на V (многообразии с неизолированными особенностями) исчезающие циклы и индекс пересечения с исчезающим циклом, а также описываем монодромию устойчивого образа.

1. Исчезающие циклы. Рассмотрим $\mathcal{A}$-версальную деформацию f_λ, $\lambda \in (\Lambda, 0)$, отображения $f\colon \mathbf{C}^2, 0 \to \mathbf{C}^3, 0$. При общем значении параметра деформации образ f_λ имеет только устойчивые особенности: трансверсальные пересечения двух или трех гладких листов, а также зонтики Уитни. База деформации Λ содержит *$\mathcal{A}$-бифуркационную диаграмму* Σ — гиперповерхность тех значений параметра λ, при которых соответствующий член f_λ версального семейства имеет неустойчивые мультиособенности. В общем случае Σ имеет 5 компонент, отвечающих следующим вырождениям образа $\mathcal{A}$-коразмерности 1:

I — слияние двух зонтиков Уитни;

II — касание двух листов образа;

III — прохождение постороннего листа через зонтик;

IV — касание линии трансверсального пересечения двух листов образа и третьего листа;

V — прохождение листа через точку трансверсального пересечения трех других листов.

На рис. 1 для специально выбранных вещественных форм перечисленных вырождений показан локальный вид соответствующих вещественных поверхностей $\operatorname{Im} f_\lambda$ при значении параметра λ, близком к бифуркационному. Дополнение в $\mathbf{R}^3$ к каждой из изображенных поверхностей имеет единственную компоненту связности, замыкание которой компактно. Граница замыкания этой компоненты, гомеоморфная двумерной сфере, определяет нетривиальный элемент в $H_2(\operatorname{Im} f_\lambda; \mathbf{Z})$ и стягивается в точку при стремлении λ к бифуркационному значению. Указанную границу мы и назовем *исчезающим циклом* на $\operatorname{Im} f_\lambda$, $\lambda \notin \Sigma$.

© В. В. Горюнов, 1991

Определим теперь отмеченный набор исчезающих циклов на устойчивом образе. Для этого рассмотрим проходящую через $0 \in \Lambda$ прямую $l \simeq \mathbf{C}^1$ общего положения. Общим образом немного сдвинем ее с нуля. Полученная прямая l' трансверсально пересекает диаграмму Σ в конечном числе ν точек (ν — индекс пересечения l и Σ). Фиксируем небифуркационную точку λ_0 на l'. Рассмотрим на l' систему из ν непересекающихся и несамопересекающихся

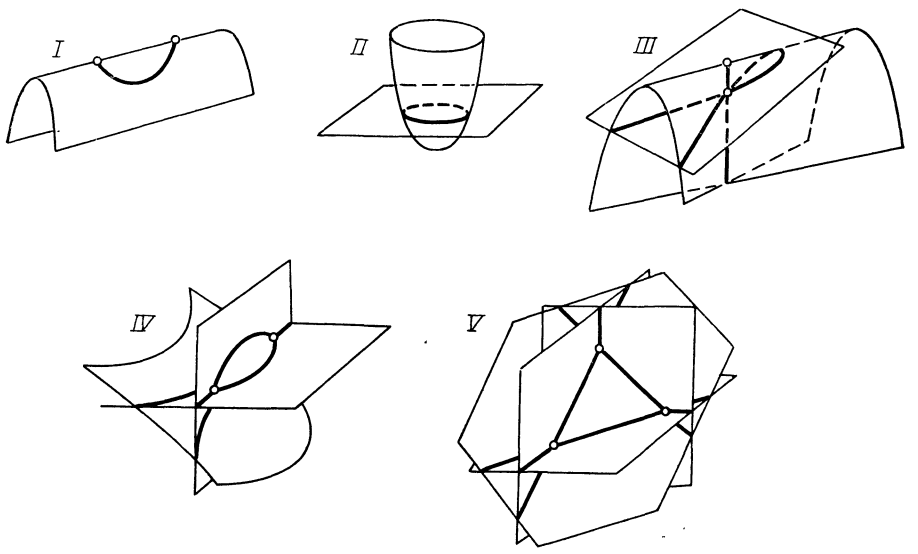

Рис. 1

путей γ_i, ведущих из λ_0 в точки множества $l \cap \Sigma$. Пути перенумерованы в порядке их выхода из λ_0 по часовой стрелке. При движении вдоль каждого из этих путей на устойчивом образе $V = \operatorname{Im} f_{\lambda_0} \simeq VS^2$ затягивается по одному исчезающему циклу e_i. *Набор циклов* $e_1, \ldots, e_\nu$ назовем *отмеченным*.

Теорема 1. *Отмеченный набор циклов порождает группу* $H_2(V; \mathbf{Z})$.

Доказательство. Прямая l' индуцирует из версальной деформации отображение F': $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^4$, $(x, \lambda) \mapsto (f_\lambda(x), \lambda)$, $\lambda \in l'$. Это отображение устойчиво. Пусть $W \simeq VS^3$ — его образ. Рассмотрим отрезок точной гомологической последовательности пары:

$$0 \to H_3(W) \to H_3(W, V) \to H_2(V) \to 0.$$

Центральный член этого отрезка — свободная группа ранга ν, порожденная классами пленок, затягивающих в W исчезающие циклы $e_i \subset V$ вдоль путей γ_i (аналогично [5]). Следовательно, циклы e_i порождают $H_2(V)$.

Использованное нами отображение F' является возмущением отображения F, индуцированного из версальной деформации с помощью прямой l, проходящей через $0 \in \Lambda$.

Следствие. $\nu = \sigma(f) + \sigma(F)$.

Отметим, что для отображений $\mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^2$ и $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^4$ также верны аналоги теоремы 1 и следствия из нее.

2. Операторы локальной вариации. Рассмотрим какой-либо путь $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, в $\Lambda \setminus \Sigma$, выходящий из λ_0. Накрывающая гомотопия определяет отображение $V = \operatorname{Im} f_{\gamma(0)} \to \operatorname{Im} f_{\gamma(1)}$ (которое можно считать диффеоморфизмом). Если путь — петля, получаем автоморфизм V.

Определение. *Группой монодромии* ростка $f\colon \mathbf{C}^2, 0 \to \mathbf{C}^3, 0$ называется образ естественного гомоморфизма $\pi_1(\Lambda \setminus \Sigma, \lambda_0) \to \mathrm{Aut}\, H_*(V; \mathbf{Z})$.

Как обычно [2; 3, гл. 4], для описания группы монодромии рассмотрим сначала автоморфизмы гомологий устойчивых образов, индуцированные обходами по малым петлям вокруг различных компонент бифуркационной диаграммы Σ.

Итак, пусть λ_* — регулярная точка диаграммы Σ, J_* — точка, в которой образ $\mathrm{Im}\, f_{\lambda_*}$ имеет единственную неустойчивую особенность. Нетрудно видеть, что можно так выбрать достаточно малый шар $B \subset \mathbf{C}^3$ с центром в J_* и очень малую окрестность $U \subset \Lambda$ точки λ_*, что расслоение над U со слоем $\mathrm{Im}\, f_\lambda \setminus (\mathrm{Im}\, f_\lambda \cap B)$ будет тривиальным. Следовательно, обход по петле ω в U вокруг Σ определяет диффеоморфизм устойчивого образа $\mathrm{Im}\, f_{\lambda'}$, тождественный вне множества $Y = \mathrm{Im}\, f_{\lambda'} \cap B$ (λ' — начало и конец ω). Тем самым, к элементу Δ из $H_*(Y, \partial Y)$ этот обход добавит его вариацию $\mathrm{Var}_\omega \Delta$ — элемент из $H_*(Y)$. Так как последние гомологии нетривиальны лишь в размерности 2, то $\mathrm{Var}_\omega \Delta = 0$, если $\dim \Delta \neq 2$.

Выпишем для наших пяти элементарных вырождений коразмерности 1 группы $H_2(Y, \partial Y) \simeq H_2^{\text{замк}}(Y)$, указывая их образующие Δ_i, которые мы и будем в дальнейшем иметь в виду.

I — $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$. Δ_1 (порядка 2) — самопересечение. Δ_2 получается так: $f_{\lambda'}$-прообраз самопересечения в $\mathbf{C}^2$ здесь гомеоморфен цилиндру; пусть a — образующая этого цилиндра, которую отображение $f_{\lambda'}$ склеивает пополам; затянем a в $\mathbf{C}^2$ замкнутой двумерной пленкой; $f_{\lambda'}$-образ этой пленки и порождает слагаемое $\mathbf{Z}$.

II — $\mathbf{Z}$. Δ_1 склеивается из двух замкнутых пленок, затягивающих в каждом из листов образующую одномерных замкнутых гомологий самопересечения (самопересечение гомеоморфно цилиндру).

III — $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$. Δ_1 — самопересечение. Δ_2 — вещественный трехгранный угол, «вертикальный» по отношению к трехгранному углу исчезающего цикла.

IV, V — $\mathbf{Z}^2$ и $\mathbf{Z}^4$. Образующие аналогичны образующей Δ_2 бесконечного порядка в предыдущем случае.

Так как в каждом случае $H_2(Y) = \mathbf{Z}$, то оператор вариации переводит любой элемент конечного порядка в нуль. Для описания действия Var_ω на свободные слагаемые выберем ориентации образующих.

Напомним сначала определения некоторых множеств, связанных с кратными самопересечениями устойчивого образа $V = \mathrm{Im}\, f_{\lambda_0}$ [7, 8].

Пространство $\mathbf{C}^2$ содержит кривую V_2 — прообраз самопересечения V. V_2 имеет трансверсальные самопересечения — прообразы тройных точек. Нормализацией V_2 служит кривая $\tilde{V}_2 \subset \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ — замыкание множества пар (x_1, x_2), $x_1 \neq x_2$, таких, что $f_{\lambda_0}(x_1) = f_{\lambda_0}(x_2)$. $\tilde{V}_2$ содержит прообраз V_3 точек самопересечения кривой V_2 при проекции $\pi\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Пример. На рис. 2 эти множества показаны для уитнификации особенности $H_2\colon x, y \mapsto x, y^3, xy + y^5$.

У любого исчезающего цикла e размерность пересечения с кратным самопересечением образа V падает на 1 с ростом кратности самопересечения на 1. Рассмотрим замыкание f_{λ_0}-прообраза множества $e \cap \mathrm{reg}\, V$ в $\mathbf{C}^2$. Граница $\delta_2 e$ этого замыкания — одномерный цикл в V_2. Замыкание π-прообраза $\delta_2 e \cap \mathrm{reg}\, V_2$ имеет границу $\delta_3 e \subset V_3$ (возможно, пустую).

Пусть цикл e исчезает при рассмотренном выше значении параметра $\lambda = \lambda_*$. Пусть Y_2 и Y_3 — аналоги множеств V_2 и V_3 для $Y = \mathrm{Im}\, f_{\lambda'} \cap B$. Рассмотрим какой-либо из базисных циклов бесконечного порядка $\Delta \in \bigoplus H_2^{\text{замк}}(Y)$. Он имеет границы $\delta_2 \Delta \in H_1^{\text{замк}}(Y_2)$ и $\delta_3 \Delta \in H_0(Y_3)$. При

этом $\delta_3\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_3 e = \varnothing$. Зададим индекс пересечения замкнутого и компактного циклов на Y:

$$(\Delta, e) = \begin{cases} (\delta_2\Delta, \delta_2 e), & \text{если } \delta_3 e = 0, \\ (\delta_3\Delta, \delta_3 e), & \text{если } \delta_3 e \neq 0. \end{cases}$$

Индексы справа берутся соответственно на Y_2 и Y_3.

Теорема 2. *Рассмотрим комплексную прямую, трансверсальную бифуркационной диаграмме Σ в регулярной точке λ_*. Пусть ω — малая петля на этой прямой, обходящая λ_* один раз в положительном направлении. Тогда вариации $\mathrm{Var}_\omega\Delta$ базисных элементов бесконечного порядка из $H_2(Y, \partial Y)$ таких, что $(\Delta, e) > 0$* таковы:

I — $2e$;
II — e;
III — $2e$;
IV — e;
V — 0.

Случаи II, IV и V разобраны еще в [4], см. также [3, § 4.1]. Формулы I и III легко следуют из рассмотрения действия Var_ω на $H_1^{\text{замк}}(Y_2)$ и $H_0(Y_3)$ (ср., например, [2, п. 2.1.1.2]).

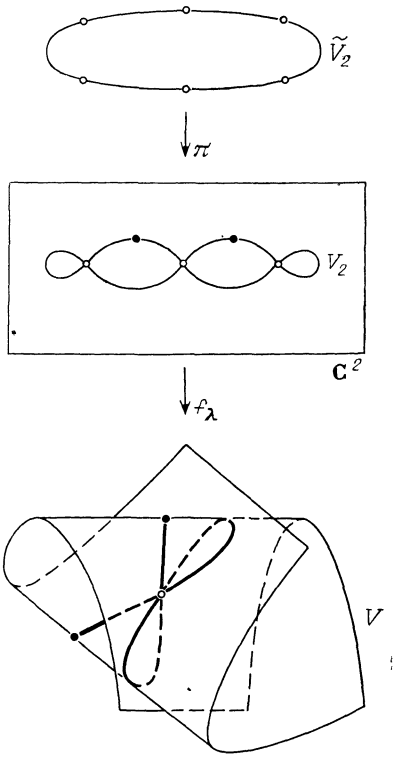

Рис. 2

3. Индекс пересечения с исчезающим циклом. Приведенное нами описание операторов локальной вариации подсказывает, что для описания группы монодромии ростка $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ следует ввести на гомологиях устойчивого образа индекс пересечения с исчезающим циклом. Для этого вернемся к ситуации, в которой в п. 1 определялся отмеченный набор исчезающих циклов. Пусть γ — один из отмеченных путей на прямой l' общего положения, ведущий из отмеченной точки $\lambda_0 \in l'$ в одну из бифуркационных точек $\lambda_* \in l' \cap \Sigma$, e — цикл, исчезающий вдоль γ. Пусть λ' — околоконцевая точка пути γ, $V' = \mathrm{Im}\, f_{\lambda'}$. Группа $H_2(V')$ порождается циклами, имеющими одномерные пересечения с линией самопересечения V'. Используя естественный гомоморфизм $H_2(V') \to H_2^{\text{замк}}(V')$, для компактного цикла c на V' положим

$$(c, e) = \begin{cases} (\delta_2 c, \delta_2 e), & \text{если } \delta_3 e = 0, \\ (\delta_3 c, \delta_3 e), & \text{если } \delta_3 e \neq 0. \end{cases}$$

Справа индексы берутся на V_2' и V_3'.

Перенесение циклов с многообразия V на многообразие V' вдоль пути γ определяет на $H_2(V)$ индекс пересечения с e.

Индексы самопересечения исчезающих циклов I—V равны соответственно 0, 0, 6, 12 и 24.

Если e и e' — два исчезающих цикла на V, то:

$$\delta_3 e = \delta_3 e' = 0 \Rightarrow (e, e') = -(e', e),$$
$$\delta_3 e \neq 0 \neq \delta_3 e' \Rightarrow (e, e') = (e', e),$$
$$\delta_3 e \neq 0 = \delta_3 e' \Rightarrow (e', e) = 0,$$
$$\delta_3 e \neq 0 = \delta_3 e' \not\Rightarrow (e, e') = 0.$$

В первых двух из этих случаев индекс пересечения можно подсчитать сразу на V, не перенося циклы на соответствующие «почти бифуркационные» образы. В третьем случае индекс нулевой, так как цикл e' снимается с цикла e изотопией в окрестности e. В четвертом случае индекс не обязан обращаться в нуль, так как при его подсчете мы пользуемся только изотопиями в малой окрестности цикла e'.

Таким образом, матрица пересечений исчезающих циклов (при некотором их упорядочении, не совпадающем, вообще говоря, с нумерацией в отмеченном наборе) имеет блочный вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix},$$

где матрица A_1 кососимметрична, а A_2 — симметрична.

4. Операторы Пикара — Лефшеца. Группа $\pi_1(\Lambda \setminus \Sigma, \lambda_0)$ порождается ν классами простых петель ω_i на $l' \setminus \Sigma$, отвечающих системе отмеченных путей γ_i (простая петля ω_i, выходя из λ_0, идет вдоль γ_i до околоконцевой точки этого пути, обходит концевую точку против часовой стрелки и возвращается в λ_0 по γ_i). Следовательно, группа монодромии порождается автоморфизмами h_{ω_i} группы $H_2(V)$, индуцированными обходами по простым петлям. Автоморфизмы h_{ω_i} называются *операторами Пикара — Лефшеца*. Их описание следует из теоремы 2.

Т е о р е м а 3. *Операторы Пикара — Лефшеца, отвечающие исчезающим циклам e типов* I—V, *имеют вид*:

I — $c \mapsto c - (c, e)\, e$;

II — $c \mapsto c - 1/2\,(c, e)\, e$;

III, IV — $c \mapsto c - 2\,(c, e)\, e/(e, e)$;

V — id.

Таким образом, операторы III и IV — отражения в плоскостях, ортогональных соответствующим циклам. Операторы I и II на подпространстве в $H_2(V)$, порожденном циклами типов I и II, действуют как косоортогональные отражения в коротких и длинных циклах функции на многообразии с краем.

5. Примеры. 1°. Напомним, что список $\mathcal{A}$-простых ростков отображений $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ содержит в качестве подмножества список простых функций на полуплоскости: A_k, B_k, C_k, F_4 (см. [3]). Назовем *степенью* ростка отображения максимальное число различных прообразов, которое может иметь точка относительно малого шевеления этого ростка (шевеление не обязано быть общим). Тогда, в целом, контактные классы кривых на x, z — плоскости с краем $z = 0$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с $\mathcal{A}$-классами отображений $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ степени 2 и ранга 1: кривой $g(x, z) = 0$ отвечает отображение $x, y \mapsto x, y^2, yg(x, y^2)$. Уитнификации таких отображений не имеют тройных точек, поэтому здесь встречаются исчезающие циклы только типов I и II. Отмеченный набор исчезающих циклов — базис в $H_2(V)$. Введенная нами форма пересечений на $H_2(V)$ совпадает с формой пересечений функции g на полуплоскости [1]. При этом циклам типа I отвечают короткие циклы краевой особенности, а циклам типа II — длинные. Указанное соответствие с очевидностью продолжается до соответствия гиперповерхностей на много-

образии $\mathbf{C}^n$ с краем $\mathbf{C}^{n-1}$ и отображений $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$ степени 2 и ранга 1. Это приводит к появлению групп Вейля A_k, B_k, C_k, D_k, E_k и F_4, а также их кососимметричных аналогов в теории отображений $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$ как групп монодромии соответствующих простых особенностей.

2°. $\mathcal{A}$-простые отображения $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$, не сводящиеся к краевым особенностям, исчерпываются одной бесконечной серией H_k, $k \geqslant 2$: x, $y \mapsto x$, y^3, $xy + y^{3k+1}$. У нее $\operatorname{rk} H_2(V) = k$, но в отмеченном наборе $k+1$ элемент (на рис. 2, где изображена уитнификация H_2, хорошо видны 2 исчезающих цикла типа III; третий, типа I, при соответствующем выборе ориентаций равен разности первых двух). Можно так выбрать отмеченную точку и систему отмеченных путей на прямой общего положения в базе версальной деформации особенности H_k, что диаграмма Дынкина будет иметь вид, соответствующий рис. 3.

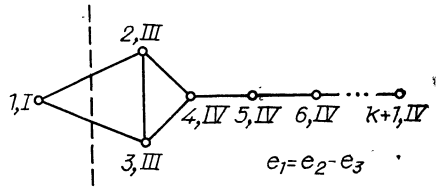

Рис. 3

Для каждого исчезающего цикла здесь указан его тип. Кососимметричная ($\delta_3 e_i = 0$) и симметричная ($\delta_3 e_i \neq 0$) части диаграммы разделены пунктиром. В симметричной части вес ребра в 6 раз меньше индекса пересечения соответствующих циклов; в остальных случаях индекс и вес совпадают. Вес 1 опускается. Оператор h классической монодромии (последовательный обход простых петель, начиная с последней) переводит

$$e_1 \mapsto e_1, \quad e_2 \mapsto e_2 - e_1 - e_4, \quad e_3 \mapsto e_3 - e_1 - e_4,$$
$$e_s \mapsto -e_{s+1}, \quad 4 \leqslant s \leqslant k,$$
$$e_{k+1} \mapsto -e_{k+1} + e_k - e_{k-1} + e_{k-2} - \ldots \pm e_4 \pm 2e_1.$$

Характеристический многочлен оператора h равен $(\lambda - 1)(\lambda^{k-1} - 1)$.

3°. Любой непростой росток $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ более чем второй степени примыкает к особенности P_4: x, $y \mapsto x$, $xy + y^3$, $xy^2 + \alpha y^4$ ($\alpha \neq 0$, 1/2, 1, 3/2). Диаграмма Дынкина P_4 изображена на рис. 4.

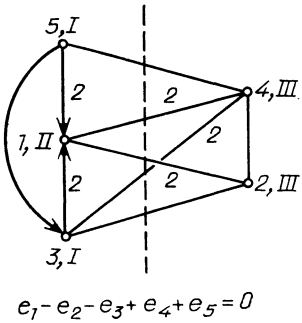

Рис. 4

Ребра в кососимметричной левой части диаграммы направлены от i-й вершины к j-й так, чтобы индекс (e_i, e_j) совпадал с кратностью ребра. Здесь

$$h\colon e_1 \mapsto -e_1 + 2e_5, \quad e_2 \mapsto e_1 + e_4 + 3e_5,$$
$$e_3 \mapsto -e_1 + e_5,$$
$$e_4 \mapsto e_1 + e_3 + e_4 + e_5, \quad e_5 \mapsto -e_3 + e_5,$$
$$\det(\lambda E - h) = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 1).$$

6. Замечания. 1°. Рассмотрим образ V уитнификации отображения $\mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^2$. Индекс пересечения двух одномерных циклов на V, аналогичный введенному в п. 3, считается по точкам трансверсального самопересечения V. При этом надо взять лишь те точки, проходя через которые рассматриваемые циклы переходят с одного листа образа на другой. Если в данной точке смена листов при движении по обоим циклам происходит в одном и том же порядке, то в этой точке считаем индекс пересечения равным 2. Если порядок противоположный, то -2. Такая форма на $H_1(V)$ симметрична.

С учетом рассмотренной ранее аналогии с функциями на многообразии с краем короткий исчезающий цикл здесь изображен на рис. 5 (декартов

лист), а длинный — на рис. 6. Серия $t \to t^2$, t^{2k+1} простых особенностей имеет диаграммы Дынкина B_k. Операторы Пикара — Лефшеца, отвечающие длинному и короткому циклам,— отражения в ортогональных плоскостях. Оператор, отвечающий исчезающему в точке тройного самопересечения образа циклу с квадратом 6, тождественный.

2°. Для отображений $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$, $n > 2$, ситуация гипотетически такова. При вырождениях топологической $\mathcal{A}$-коразмерности 1 на топологически устойчивом образе должна затягиваться n-мерная сфера. Следует ожидать, что действие операторов Пикара — Лефшеца описывается матрицей пересечений отмеченного набора исчезающих циклов, имеющей блочно-треугольный вид с чередующимися симметричными и кососимметричными блоками на диагонали.

Рис. 5

Рис. 6

3°. Еще одно возможное обобщение — описание монодромии дискриминанта отображения g: $\mathbf{C}^n$, $0 \to \mathbf{C}^p$, 0, $n \geqslant p$. По анонсу в [6] дискриминант общего малого шевеления ростка g конечной $\mathcal{A}$-коразмерности гомотопически эквивалентен букету конечного числа (p — 1)-мерных сфер. Аналогом отображения $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$ здесь служит ограничение g на множество критических точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН.— 1978.— Т. 33, № 5.— С. 91—105.
2. *Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В.* Особенности I. Локальная и глобальная теории // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— 1985.— Т. 6.
3. *Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В.* Особенности II. Классификация и приложения // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— 1989.— Т. 39.
4. *Фам Ф.* Введение в топологическое исследование особенностей Ландау.— М.: Мир, 1970.
5. *Hamm H.* Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume // Math. Ann.— 1971.— V. 191, N 3.— P. 235—252.
6. *Mond D.* Vanishing cycles for analytic maps.— Preprint / University of Warwick.— 1989.— 16 p.
7. *Mond D., Marar W. L.* Multiple point schemes for corank 1 maps // J. London Math. Soc.— 1989.— V. 39.— P. 553—567.
8. *Mond D., Pellikaan R.* Fitting ideals and multiple points of analytic mappings.— Preprint / University of Warwick.— 1988.— 52 p.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию 9 апреля 1990 г.