



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зайцев, Е. Л. Тонков, Достижимость, согласованность и метод поворотов
В. М. Миллионщикова, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, номер 2, 45–56

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

10 февраля 2025 г., 10:22:57



В.А. ЗАЙЦЕВ, Е.Л. ТОНКОВ

ДОСТИЖИМОСТЬ, СОГЛАСОВАННОСТЬ И МЕТОД ПОВОРОТОВ
В.М. МИЛЛИОНЩИКОВА

Здесь исследуются условия, при которых существует принципиальная возможность построения управления, создающего “хорошее окружение” тривиальному решению уравнения

$$\dot{x} = v_0(t, x) + u_1 v_1(t, x) + \dots + u_r v_r(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (1)$$

где $u \doteq (u_1, \dots, u_r) \in U$, $0 \in U$. Пусть, например, требуется построить такое управление $u(t) \in U$, что уравнение (1) структурно устойчиво (в окрестности нуля). Оказывается, что эта задача разрешима, если линейное уравнение

$$\dot{x} = A_0(t)x + u_1 A_1(t)x + \dots + u_r A_r(t)x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (2)$$

где $A_i(t) = \partial v_i(t, 0)/\partial x$, равномерно локально достижимо или равномерно согласованно (см. ниже теорему 1 и следствие 1). Показано также, что свойства равномерной достижимости и согласованности тесно связаны с так называемым “методом поворотов” В.М. Миллионщикова, применявшимся при исследовании поведения показателей Ляпунова при малых возмущениях параметров уравнения.

1. Обозначения и определения

Пусть \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n , $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма в \mathbb{R}^n (* — операция транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x); $\mathcal{O}_\varepsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \varepsilon\}$, $\mathcal{O}_\varepsilon^n = \mathcal{O}_\varepsilon^n(0)$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Для произвольного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ через \bar{D} обозначим замыкание, $\text{int } D$ — внутренность, $\mathcal{O}_\varepsilon^n(D)$ — ε -окрестность, $\xi \rightarrow c(\xi, D)$ — опорную функцию ([1], гл. 2, § 12) множества D .

Пространство $M_{n,m}$ линейных операторов из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n будем отождествлять с пространством матриц размерности $n \times m$ (если $n = m$, то пишем M_n); $|A| = \max\{|Ax| : |x| = 1\}$ — норма в $M_{n,m}$. Для $Q \in M_{n,m}$ обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon(Q) = \{H \in M_{n,m} : |H - Q| \leq \varepsilon\}$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ (индексы m и n в обозначении $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$ опускаем, если ясно, о каком пространстве идет речь).

Введем топологическую динамическую систему (Ω, f^t) (Ω — полное метрическое сепарабельное пространство, f^t — поток на Ω , т. е. однопараметрическая группа преобразований Ω в себя, непрерывная по $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$). Обозначим через $\gamma(\omega)$ траекторию движения $t \rightarrow f^t \omega$, $\gamma_+(\omega)$ — положительную полутраекторию, $\bar{\gamma}(\omega)$ — замыкание $\gamma(\omega)$ в метрике пространства Ω . Напомним, что множество $E \subset \Omega$ называется инвариантным, если $f^t E \subset E$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и E называется минимальным, если оно инвариантно, компактно и $\bar{\gamma}(\omega) = E$ для каждого $\omega \in E$. Если E минимально, то для каждого $\omega \in E$ имеет место равенство $\bar{\gamma}(\omega) = \bar{\gamma}_+(\omega)$. Отметим, что всякое компактное инвариантное множество E в Ω содержит по крайней мере одно минимальное подмножество; далее, если $\bar{\gamma}_+(\omega)$ компактно, то омега-предельное множество $L^+(\omega)$ точки ω

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00413) и конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (грант 97-04).

непусто (при этом $L^+(\omega)$ инвариантно и компактно), и для всякого компактного E определена зона притяжения $W^s(E) \doteq \{\omega \in \Omega : L^+(\omega) \subset E\}$ множества E .

Каждой паре (\mathbb{A}, ω) , где $\mathbb{A} \doteq (A_0, A_1, \dots, A_r) : \Omega \rightarrow M_{n,m}$, $m = n(r+1)$, и вектору $u = (u_1, \dots, u_r)$ поставим в соответствие уравнение

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1 A_1(f^t\omega)x + \dots + u_r A_r(f^t\omega)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Будем предполагать, что для каждого $\omega_0 \in \Omega$ функция $t \rightarrow |\mathbb{A}(f^t\omega_0)|$ измерима по Лебегу, ограничена на \mathbb{R} и для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство $\max_{|t| \leq N} \int_t^{t+1} |\mathbb{A}(f^s\omega) - \mathbb{A}(f^s\omega_0)| ds < \varepsilon$, как только $\rho(\omega, \omega_0) < \delta$ (ρ — метрика в Ω). Уравнение (3) будем отождествлять с парой (\mathbb{A}, ω) .

Пусть задано произвольное множество $U \subset \mathbb{R}^r$ такое, что $0 \in U$; множество \mathcal{U} , состоящее из всех измеримых функций $u : \mathbb{R} \rightarrow U$, будем называть множеством допустимых управлений. Зафиксируем уравнение (\mathbb{A}, ω) . Пусть $X_u(t, s, \omega)$ — функция Коши уравнения (3) при фиксированном управлении $u = u(t, \omega)$. Отметим, что функция $\omega \rightarrow X_u(t, s, \omega)$ непрерывна в каждой точке $\omega_0 \in \Omega$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в \mathbb{R}^2 и, если управление стационарно относительно потока, т. е. $u(t, \omega) = u(f^t\omega)$, то $X_u(t + \tau, s + \tau, \omega) = X_u(t, s, f^\tau\omega)$.

Для любого $\vartheta > 0$ построим множество достижимости

$$\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) = \{X \in M_n : X = X_u(\vartheta, 0, \omega), u(\cdot) \in \mathcal{U}\}$$

уравнения (3) в пространстве матриц M_n из единичной матрицы и множество

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega) = \{X \in M_n : X = HX_0(\vartheta, 0, \omega), H \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)\},$$

где I — единичная матрица.

Лемма 1. *Имеют место включения*

$$\mathcal{B}_{\nu_1}(X_0(\vartheta, 0, \omega)) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathcal{B}_{\nu_2}(X_0(\vartheta, 0, \omega)), \quad (4)$$

где $\nu_1 = \varepsilon/|X_0(0, \vartheta, \omega)|$, $\nu_2 = \varepsilon|X_0(\vartheta, 0, \omega)|$.

Доказательство. Пусть $H = I + G$, тогда

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega) = X_0(\vartheta, 0, \omega) + \mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega),$$

где $\mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega) = \{X \in M_n : X = GX_0(\vartheta, 0, \omega), |G| \leq \varepsilon\}$. Поэтому включения (4) эквивалентны включениям $\mathcal{B}_{\nu_1} \subset \mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathcal{B}_{\nu_2}$. Если $A \in \mathcal{B}_\varepsilon$, то $|AX_0(\vartheta, 0, \omega)| \leq \varepsilon|X_0(\vartheta, 0, \omega)| = \nu_2$, откуда следует второе включение. Если $|A| \leq \nu_1$, то $|AX_0(0, \vartheta, \omega)| \leq \varepsilon$, поэтому

$$A = AX_0(0, \vartheta, \omega)X_0(\vartheta, 0, \omega) \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega),$$

откуда следует первое включение. \square

Определение 1. Уравнение (3) называется

а) локально достижимым, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что выполнено включение

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega);$$

б) равномерно локально достижимым, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ имеет место включение

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I)X_0(\vartheta, 0, \omega_0) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega_0).$$

Лемма 2. Уравнение (3) локально достижимо в том и только том случае, если существуют такие $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что найдется управление $(t, H) \rightarrow u(t, H)$, определенное на $[0, \vartheta] \times \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ и обеспечивающее равенство

$$X_u(\vartheta, 0, \omega) = HX_0(\vartheta, 0, \omega). \quad (5)$$

Уравнение (3) равномерно локально достижимо в том и только том случае, если существуют такие $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для любой непрерывной функции $H : \overline{\gamma}(\omega) \rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ найдется управление $(t, \omega_0) \rightarrow u(t, \omega_0)$, определенное на $[0, \vartheta] \times \overline{\gamma}(\omega)$ и обеспечивающее равенство

$$X_u(\vartheta, 0, \omega_0) = H(\omega_0)X_0(\vartheta, 0, \omega_0). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть при $u = u(t, H)$ выполнено равенство (5); тогда для всех $H \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ имеем $HX_0(\vartheta, 0, \omega) \in \mathcal{D}_\vartheta(\omega)$, следовательно, уравнение (3) локально достижимо.

Очевидно, что из равномерной локальной достижимости следует (6). Пусть для всякой непрерывной $H(\omega_0)$ выполнено равенство (6). Если найдется $H_0 \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ такая, что матрица $H_0X_0(\vartheta, 0, \omega_0)$ не содержится в $\mathcal{D}_\vartheta(\omega_0)$, то для функции $H(\omega_0) \equiv H_0$ и любого допустимого управления равенство (6) не выполнено. \square

Замечание 1. Наличие свойства локальной или равномерной локальной достижимости предоставляет возможность (в силу (5) или (6)) “немного поворачивать” функцию Коши уравнения (3) с помощью подходящего управления (и тем самым влиять на поведение решений). Не всякое уравнение обладает этим свойством, но очевидно, что уравнение $\dot{x} = A(t)x + U(t)x$, где матрица $A(t)$ ограничена, а элементы матрицы $U(t)$ интерпретируются как управляющие функции ($|U(t)| \leq \varepsilon$), равномерно локально достижимо. Таким образом, выполнено (6) и это обстоятельство позволило В.М. Миллионщикову [2], [3], а вслед за ним и другим исследователям [4], построить современную теорию показателей Ляпунова. Сам же метод “поворотов” получил название метода поворотов Миллионщикова.

По уравнению (\mathbb{A}, ω) построим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{Z} = A_0(f^t\omega)Z + (u_1A_1(f^t\omega) + \dots + u_rA_r(f^t\omega))X_0(t, 0, \omega) \quad (7)$$

относительно $Z \in M_n$. Обозначим через $\mathcal{L}_\vartheta(\omega)$ множество достижимости уравнения (7) из нуля за время ϑ под действием управлений $u : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^r$. Таким образом, $G \in \mathcal{L}_\vartheta(\omega)$ в том и только том случае, если найдется $u_G : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^r$, что уравнение (7) при $u = u_G(t)$ имеет решение $Z(t)$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$. В силу линейности уравнения (7) множество $\mathcal{L}_\vartheta(\omega)$ является линейным подпространством в M_n .

Определение 2. Уравнение (\mathbb{A}, ω) называется согласованным, если найдется $\vartheta > 0$ такое, что $\mathcal{L}_\vartheta(\omega) = M_n$, и равномерно согласованным, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\beta > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ множество $\mathcal{L}_\vartheta(\omega_0)$ совпадает с M_n , и выполнено неравенство $|u_G(t, \omega_0)| \leq \beta|G|$, $0 \leq t \leq \vartheta$ (здесь $u_G(t, \omega_0)$ — управление, переводящее решение уравнения (7) при $\omega = \omega_0$ из нуля в точку G в момент $t = \vartheta$).

Замечание 2. Непосредственно из определения следует, что если уравнение (\mathbb{A}, ω) согласованно (равномерно согласованно), то для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ ($\tau \in \mathbb{R}$) уравнение $(\mathbb{A}, f^{-\tau}\omega)$ согласованно (равномерно согласованно).

Замечание 3. Определения согласованности и равномерной согласованности введены в [5] для системы $\dot{x} = (A(f^t\omega) + B(f^t\omega)UC^*(f^t\omega))x$ (элементы матрицы U интерпретируются как управляющие функции) в связи с задачами управления показателями Ляпунова и изучались в [6]–[8] (см. библиографию в [8]).

2. Равномерная локальная достижимость

Основное свойство равномерно локально достижимых уравнений содержится в формулируемой ниже теореме 1. Эта теорема утверждает, что при надлежащем выборе допустимого управления все решения уравнения (3) ведут себя подобно решениям заранее заданного модельного уравнения с дискретным временем. Таким образом, появляется возможность влиять на асимптотические свойства решений уравнения (3), например, управлять показателями Ляпунова или аналогичными характеристиками, отвечающими за асимптотическое поведение решений. В прикладных задачах это бывает важно, потому что позволяет разделять движения (добиваясь структурной устойчивости) и улучшать асимптотику движений за счет перемещения показателей влево. Если же модельное уравнение стационарно: $y_{k+1} = Qy_k$ (см. (10) в формулируемой ниже теореме 1), то уравнение (3) “почти стационарно”, т. е. приводимо ляпуновским преобразованием к стационарному уравнению (следствие 1).

Предварительно докажем две простые леммы.

Лемма 3. Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω и для каждого $\omega \in E$ уравнение (3) равномерно локально достижимо. Тогда оно равномерно локально достижимо на множестве E , т. е. найдутся общие для всех $\omega \in E$ константы $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, участвующие в определении равномерной локальной достижимости.

Доказательство. Пусть $\vartheta(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ — константы, участвующие в определении равномерной локальной достижимости уравнения (\mathbb{A}, ω) . Надо показать, что $\sup_E \theta(\omega) < \infty$, где $\theta(\omega) = \max\{\vartheta(\omega), \varepsilon^{-1}(\omega)\}$. Если $\sup_E \theta(\omega) = \infty$, то найдется такая сходящаяся (в силу компактности E) последовательность $\{\omega_i\}$, что $\theta(\omega_i) \rightarrow \infty$. Это означает, что уравнение $(\mathbb{A}, \hat{\omega})$, где $\hat{\omega} = \lim \omega_i$, не является равномерно локально достижимым. \square

Лемма 4. Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω , $u : \mathbb{R} \times E \rightarrow U$ — произвольное допустимое управление. Если для некоторого $\tau > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$u(t, \omega) = u(t - \tau, f^\tau \omega), \quad (8)$$

то $X_u(t + \tau, s + \tau, \omega) = X_u(t, s, f^\tau \omega)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Если равенство (8) выполнено для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и всех $t \in \mathbb{R}$, то управление $u(t, \omega)$ стационарно относительно потока f^t , т. е. $u(t, \omega) = \hat{u}(f^t \omega)$ для некоторой функции $\hat{u} : E \rightarrow U$.

Доказательство. Введем в рассмотрение матричное уравнение

$$\dot{X} = A_0(f^t \omega)X + u_1 A_1(f^t \omega)X + \dots + u_r A_r(f^t \omega)X, \quad X \in M_n, \quad (9)$$

отвечающее уравнению (3). Для доказательства первого утверждения леммы достаточно подставить управление, удовлетворяющее равенству (8), в уравнение (9) и провести замену времени $t \rightarrow t + \tau$. Тогда в силу определения $u(t, \omega)$ получим равенство $u(t + \tau, \omega) = u(t, f^\tau \omega)$, которое эквивалентно (8).

Второе утверждение следует из (8) при $\tau = t$. \square

Теорема 1. Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω и для каждого $\omega \in E$ уравнение (3) равномерно локально достижимо. Тогда существуют $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любой функции $Q : E \rightarrow M_n$, удовлетворяющей при всех $\omega \in E$ неравенству $|Q(\omega)X_0(0, \vartheta, \omega) - I| \leq \varepsilon$, найдется управление $u : \mathbb{R} \times E \rightarrow U$, обеспечивающее для решения $x_u(t, x_0, \omega)$ уравнения (3) при $u = u(t, \omega)$, всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $k = 0, 1, \dots$ равенства $x_u(t_k, x_0, \omega) = y_k(x_0, \omega)$, где $t_k = k\vartheta$, $\{y_k(x_0, \omega)\}_{k=0}^\infty$ — решение задачи

$$y_{k+1} = Q(f^{t_k} \omega)y_k, \quad y_0 = x_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Доказательство. Пусть ϑ и ε как в лемме 3, и $Q(\omega)$ удовлетворяет условию теоремы. Для каждого $\omega \in E$ построим управление $u^0(\cdot, \omega) : [0, \vartheta] \rightarrow U$, определенное на отрезке $[0, \vartheta]$ и такое, что (см. лемму 2) при $u = u^0(t, \omega)$ для уравнения (3) выполнено равенство $X_{u^0}(\vartheta, 0, \omega) = H(\omega)X_0(\vartheta, 0, \omega)$, где $H(\omega) = Q(\omega)X_0(0, \vartheta, \omega)$. Следовательно, для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $x_{u^0}(\vartheta, x_0, \omega) = Q(\omega)x_0$ или в силу (10) $x_{u^0}(\vartheta, x_0, \omega) = y_1(x_0, \omega)$.

Тем самым для каждого $k = 0, 1, \dots$ построено управление $u^k = u^0(t, f^{t_k}\omega)$, определенное на $[0, \vartheta]$ и обеспечивающее для решений уравнения $(\mathbb{A}, f^{t_k}\omega)$ равенство $x_{u^k}(\vartheta, x_0, f^{t_k}\omega) = y_1(x_0, f^{t_k}\omega)$.

“Растянем” последовательность $\{u^k(t)\}_{k=0}^\infty$, $t \in [0, \vartheta]$, на \mathbb{R}_+ , определив управление $u : \mathbb{R}_+ \times E$ на каждом полуинтервале $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$ равенством $u(t, \omega) = u^0(t - t_k, f^{t_k}\omega)$ при $t \in \Delta_k$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для каждого целого $m \geq 0$ при $\tau = t_m$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено равенство (8). Поэтому в силу леммы 4 имеют место равенства $X_u(t_{k+1}, t_k, \omega) = X_u(\vartheta, 0, f^{t_k}\omega)$.

Пусть $x_u(t, x_0, \omega)$ — решение уравнения (\mathbb{A}, ω) , отвечающее управлению $u(t, \omega)$. Покажем тогда, что последовательность $\{x_u(t_k, x_0, \omega)\}_{k=1}^\infty$ является решением задачи (10). Действительно,

$$x_u(t_{k+1}, x_0, \omega) = X_u(t_{k+1}, 0, \omega)x_0 = X_u(t_{k+1}, t_k, \omega)X_u(t_k, 0, \omega)x_0.$$

С учетом равенства $X_u(t_{k+1}, t_k, \omega) = X_u(\vartheta, 0, f^{t_k}\omega)$ имеем далее

$$x_u(t_{k+1}, x_0, \omega) = X_u(\vartheta, 0, f^{t_k}\omega)x_u(t_k, x_0, \omega) = Q(f^{t_k}\omega)x_u(t_k, x_0, \omega). \quad \square$$

Следствие 1. Пусть множество $\bar{\gamma}(\omega)$ компактно и уравнение (3) равномерно локально достижимо. Тогда существуют такие $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для любой вещественной матрицы $A \in M_n$, удовлетворяющей неравенству $|\exp(\vartheta A)X_0(0, \vartheta, \omega) - I| \leq \varepsilon$, найдется управление $t \rightarrow u(t, \omega) \in U$, при котором уравнение (3) приводимо ляпуновским преобразованием к уравнению $\dot{y} = Ay$ с постоянной матрицей A .

Управление $t \rightarrow u(t, \omega)$ обладает следующим свойством: если ω — периодическая точка (т. е. найдется $T > 0$, для которого $f^{t+T}\omega \equiv f^t\omega$), то при некотором целом $m \geq 1$ управление периодически с периодом mT : $u(t + mT, \omega) \equiv u(t, \omega)$.

Доказательство. Пусть $Q(\omega) \equiv \exp(\vartheta A)$, тогда матрица Q удовлетворяет условиям теоремы 1. По матрице Q построим управление $t \rightarrow u(t, \omega)$ (как это было сделано в доказательстве теоремы 1) и матрицу $\Phi(t) = X_u(t, 0, \omega) \exp(-tA)$. В силу известной теоремы Н.П. Еругина ([9], § 19, с. 119) достаточно показать, что матрица $\Phi(t)$ является ляпуновской матрицей.

Функция $t \rightarrow \Phi(t)$ непрерывна и ограничена на \mathbb{R}_+ . Действительно, из (10) для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем равенство $x_u(t_k, x_0, \omega) = \exp(t_k A)x_0$, поэтому $X_u(t_k, 0, \omega) = \exp(t_k A)$. В силу компактности $\bar{\gamma}(\omega)$, ограниченности $\mathbb{A}(f^t\omega)$ и управления $u(t, \omega)$ на \mathbb{R}_+ найдется такая константа a , что $|X_u(t, s, f^\tau\omega)| \leq a$ для всех $(t, s) \in \Delta_k \times \Delta_k$, всех $k = 0, 1, \dots$ и всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. Пусть $t \in \Delta_k$, тогда $\Phi(t) = X_u(t, t_k, \omega)X_u(t_k, 0, \omega) \exp(-tA) = X_u(t, t_k, \omega) \exp(t_k - t)A$, поэтому $|\Phi(t)| \leq c$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, причем c не зависит от k . Аналогично доказывается ограниченность $\Phi^{-1}(t)$.

Ограниченность производной $\dot{\Phi}(t)$ следует из равенства

$$\dot{\Phi}(t) = (A_0(f^t\omega) + u_1(t, \omega)A_1(f^t\omega) + \dots + u_r(t, \omega)A_r(f^t\omega))\Phi(t) - \Phi(t)A$$

и ограниченности $\Phi(t)$.

Докажем второе утверждение следствия. Отметим, во-первых, что непосредственно из определения равномерной локальной достижимости и условия $0 \in U$ следует, что если это свойство имеет место при некоторых ϑ и ε , то оно имеет место при всех $\vartheta_1 \geq \vartheta$. Поэтому найдется такое целое $m \geq 1$, что уравнение (3) равномерно локально достижимо при $\vartheta = mT$. В силу (8) имеем $u(t + mT, \omega) = u(t, f^{mT}\omega) = u(t, \omega)$. \square

3. Равномерная согласованность и достижимость

В этом параграфе показано, что в некритическом случае ($0 \in \text{int } U$) равномерная согласованность — это равномерная локальная достижимость по первому приближению.

В силу леммы 2 локальная достижимость уравнения (3) эквивалентна разрешимости уравнения (9) с условием (5), а равномерная локальная достижимость — с условием (6). Произведем в (9) замену $Y(t, \omega) = X_u(t, 0, \omega) - X_0(t, 0, \omega)$, тогда уравнение относительно Y запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{Y} = & A_0(f^t \omega)Y + \left(u_1 A_1(f^t \omega) + \dots + u_r A_r(f^t \omega) \right) Y + \\ & + \left(u_1 A_1(f^t \omega) + \dots + u_r A_r(f^t \omega) \right) X_0(t, 0, \omega), \quad Y \in M_n, \quad (11) \end{aligned}$$

а условие (5) разбивается на два условия: $Y(0, \omega) = 0$, $Y(\vartheta, \omega) = GX_0(\vartheta, 0, \omega)$, где $G = H - I$. Обозначим через $\mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ множество достижимости за время $\vartheta > 0$ уравнения (11) из точки $Y = 0$ под действием управлений $u \in \mathcal{U}$ (отметим, что $0 \in \mathbb{D}_\vartheta(\omega) \subset M_n$). Тогда включение $0 \in \text{int } \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ при некотором $\vartheta > 0$ эквивалентно локальной достижимости уравнения (3), а включение $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega_0)$, выполненное при некоторых $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$, эквивалентно равномерной локальной достижимости.

Теорема 2. Пусть $0 \in \text{int } U$ и уравнение (3) согласованно (равномерно согласованно), тогда оно локально достижимо (равномерно локально достижимо).

Доказательство. Уравнение (7) служит линейным приближением (в окрестности точки $u = 0$, $Y = 0$) для уравнения (11), а свойство согласованности, сформулированное в терминах уравнения (7), эквивалентно свойству полной достижимости уравнения (7) (т. е. множество достижимости $\mathcal{L}_\vartheta(\omega)$ уравнения (7) совпадает с пространством M_n). Воспользуемся теоремой 3 работы [10]. С этой целью матрицы Y и Z в уравнениях (11) и (7) “развернем в вектор”, а в теореме 3 из [10] проведем замену времени $t \rightarrow \vartheta - t$ и слова “локальная управляемость в малом” заменим на слова “локальная достижимость в малом” (локальная достижимость в малом означает локальную достижимость “развернутого уравнения” (11), дополненную следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|G| < \delta$, то решение $Y(t, \omega)$, переходящее в точку $Y(\vartheta, \omega) = G$ при надлежащем управлении, удовлетворяет для всех $t \in [0, \vartheta]$ неравенству $|Y(t, \omega)| < \varepsilon$). В силу условия $0 \in \text{int } U$ и цитируемой теоремы 3 из [10] первое утверждение доказано.

Второе утверждение теоремы после аналогичных рассуждений следует из теоремы 1 из [11] (в этой работе требуется минимальность множества $\bar{\gamma}(\omega)$, но это предположение излишне: достаточно предполагать, что $\bar{\gamma}(\omega)$ компактно). \square

4. Критерии согласованности

В этом параграфе результаты работ [5], [8] о согласованности уравнения

$$\dot{x} = (A(f^t \omega) + B(f^t \omega)UC^*(f^t \omega))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

где U — $(m \times k)$ -матрица управляющих параметров, переносятся на уравнение (3). Для каждого $i, j, p, s \in \{1, \dots, n\}$ введем обозначения

$$\gamma_{ijps}(\vartheta, \omega) = \int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p e_s^* \hat{A}_l^*(t, \omega) e_j dt,$$

где $e_k \in \mathbb{R}^n$ — k -й столбец единичной матрицы, $\hat{A}_l(t, \omega) = X_0(0, t, \omega) A_l(f^t \omega) X_0(t, 0, \omega)$, $l = 1, \dots, r$. Построим далее $(n \times n)$ -матрицы $\Gamma_{ij}(\vartheta, \omega) = \{\gamma_{ijps}(\vartheta, \omega)\}_{p,s=1}^n$, $i, j = 1, \dots, n$, и $(n^2 \times n^2)$ -матрицу $\Gamma(\vartheta, \omega) = \{\Gamma_{ij}(\vartheta, \omega)\}_{i,j=1}^n$, которую в дальнейшем будем называть матрицей согласования (уравнения (3) на $[0, \vartheta]$).

Лемма 5. Матрица согласования обладает следующими свойствами:

- а) $\Gamma(\vartheta, \omega) = \Gamma^*(\vartheta, \omega)$;
- б) $\lambda(\vartheta, \omega) \geq 0$, (λ — наименьшее собственное значение матрицы Γ);
- в) $\lambda(\vartheta_1, \omega) \geq \lambda(\vartheta, \omega)$ при $\vartheta_1 \geq \vartheta$.

Доказательство. Утверждение а) следует из равенства $\gamma_{ijps} = \gamma_{jis p}$. Докажем утверждение б). Достаточно доказать, что для любого $h = \text{col}(h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{nn})$ справедливо неравенство $h^* \Gamma h \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} h^* \Gamma h &= \sum_{i,j,p,s=1}^n h_{ip} h_{js} \gamma_{ijps} = \int_0^{\vartheta} \sum_{l=1}^r \sum_{i,j,p,s=1}^n h_{ip} h_{js} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p e_s^* \hat{A}_l^*(t, \omega) e_j dt = \\ &= \int_0^{\vartheta} \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i,p=1}^n h_{ip} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p \right) \left(\sum_{j,s=1}^n h_{js} e_s^* \hat{A}_l^*(t, \omega) e_j \right) dt = \\ &= \int_0^{\vartheta} \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i,p=1}^n h_{ip} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Утверждение в) следует из неравенства (13). \square

Определим функции $u_{ip}^l : [0, \vartheta] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и вектор-функции u_{ip} равенствами

$$u_{ip}^l(t, \omega) = e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p, \quad i, p = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, r, \quad (14)$$

$$u_{ip}(t, \omega) = \text{col}(u_{ip}^1(t, \omega), \dots, u_{ip}^r(t, \omega)), \quad i, p = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Лемма 6. Совокупность вектор-функций (15) линейно независима на $[0, \vartheta]$ в том и только том случае, если $\lambda(\vartheta, \omega) > 0$.

Доказательство. Пусть функции (15) линейно независимы на $[0, \vartheta]$, но $\lambda(\vartheta, \omega) = 0$. Тогда существует такой ненулевой вектор h , что $\Gamma(\vartheta, \omega)h = 0$. Следовательно, $h^* \Gamma(\vartheta, \omega)h = 0$ и в силу (13) для всех $l = 1, \dots, r$ выполнены равенства

$$\sum_{i,p=1}^n h_{ip} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p = 0, \quad t \in [0, \vartheta]. \quad (16)$$

Это эквивалентно равенству $\sum_{i,p=1}^n h_{ip} u_{ip}(t, \omega) = 0$, $t \in [0, \vartheta]$, что противоречит линейной независимости функций (15).

Докажем теперь достаточность условий леммы. Если функции (15) линейно зависимы, то найдется такой ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^{n^2}$, что $\sum_{i,p=1}^n h_{ip} u_{ip}(t, \omega) = 0$, $t \in [0, \vartheta]$. Следовательно, для всех $t \in [0, \vartheta]$ и $l = 1, \dots, r$ выполнено равенство (16), поэтому в силу (13) имеем $h^* \Gamma(\vartheta, \omega)h = 0$, т. е. $\lambda(\vartheta, \omega) = 0$. \square

Замечание 4. Матрица $\Gamma(\vartheta, \omega)$ представляет собой матрицу Грама для совокупности вектор-функций $\{u_{ip}(\cdot, \omega)\}_{i,p=1}^n$ на отрезке $[0, \vartheta]$.

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) уравнение (3) согласованно;
- б) найдется $\vartheta > 0$, при котором матрица $\Gamma(\vartheta, \omega)$ положительно определена ($\lambda(\vartheta, \omega) > 0$);
- в) совокупность вектор-функций $\{u_{ip}(\cdot, \omega)\}_{i,p=1}^n$, определенных равенствами (14), (15), линейно независима на $[0, \vartheta]$ для некоторого $\vartheta > 0$.

Доказательство. Условия б) и в) эквивалентны в силу леммы 6. Покажем, что из б) следует а). Пусть $\lambda(\vartheta, \omega) > 0$ при некотором $\vartheta > 0$. Для любой $G \in M_n$ требуется найти управление $u = \text{col}(u_1, \dots, u_r) : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^r$, при котором уравнение (7) имеет решение, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$. Таким образом, задача о построении $u(\cdot)$ сводится к задаче о разрешимости уравнения

$$\int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r \hat{A}_l(t, \omega) u_l(t) dt = Q(\vartheta, \omega), \quad (17)$$

где $Q(\vartheta, \omega) = X_0(0, \vartheta, \omega)G$. Решение $\hat{u} = \text{col}(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r)$ уравнения (17) будем искать в виде $\hat{u}(t) = \sum_{j,s=1}^n h_{js} u_{js}(t)$, где $u_{js}(t)$ определены равенствами (14), (15). Подставляя $\hat{u}(t)$ в (17) и умножая (17) слева на e_i^* , а справа на e_p , получим систему n^2 алгебраических уравнений

$$\sum_{j,s=1}^n \gamma_{ijps} h_{js} = q_{ip}, \quad i, p = 1, \dots, n, \quad (18)$$

относительно h_{js} . Здесь $q_{ip} = e_i^* Q(\vartheta, \omega) e_p$. Поскольку $\lambda(\vartheta, \omega) > 0$, то система (18) разрешима: $h = \Gamma^{-1}q$, где $h = \text{col}(h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{nn})$, $q = \text{col}(q_{11}, \dots, q_{1n}, \dots, q_{n1}, \dots, q_{nn})$. Поэтому уравнение (3) согласованно. Заметим, что для решения $\hat{u}(t)$ уравнения (17) имеется оценка

$$|\hat{u}(t)| \leq \sum_{j,s=1}^n |h_{js}| |u_{js}(t)| \leq |\Gamma^{-1}(\vartheta, \omega)| \sum_{j,s=1}^n |u_{js}(t)| |q(\vartheta, \omega)|.$$

Далее, из ограниченности $A_l(f^t \omega)$ и $X_0(t, s, \omega)$ при $(t, s) \in [0, \vartheta] \times [0, \vartheta]$ следует ограниченность на $[0, \vartheta]$ функций $u_{js}(t)$. Поэтому найдется такая константа β (не зависящая от G , но зависящая от ϑ), что $|\hat{u}(t)| \leq \beta |G|$, $0 \leq t \leq \vartheta$.

Докажем, что из а) следует в). Выберем $\vartheta > 0$ из определения согласованности. Достаточно показать, что если уравнение (17) разрешимо относительно $u(t)$ для любой Q , то совокупность вектор-функций (15) линейно независима на $[0, \vartheta]$. Предположим противное, пусть существует ненулевой вектор $h = \text{col}(h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{nn})$ такой, что $\sum_{i,p=1}^n h_{ip} u_{ip}(t, \omega) = 0$, $t \in [0, \vartheta]$.

Тогда $\sum_{i,p=1}^n h_{ip} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p = 0$ при всех $l = 1, \dots, r$ и $t \in [0, \vartheta]$. Для матрицы $H = \{h_{ip}\}_{i,p=1}^n$ существует такая функция $\hat{u} = \text{col}(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^r$, что

$$\int_0^\vartheta X_0(0, t, \omega) (\hat{u}_1(t) A_1(f^t \omega) + \dots + \hat{u}_r(t) A_r(f^t \omega)) X_0(t, 0, \omega) dt = H,$$

поэтому для всех $i, p = 1, \dots, n$

$$\int_0^\vartheta e_i^* X_0(0, t, \omega) (\hat{u}_1(t) A_1(f^t \omega) + \dots + \hat{u}_r(t) A_r(f^t \omega)) X_0(t, 0, \omega) e_p dt = h_{ip}.$$

Умножая каждое из этих равенств на h_{ip} и суммируя по $i, p = 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,p=1}^n h_{ip}^2 &= \sum_{i,p=1}^n h_{ip} \int_0^\vartheta e_i^* X_0(0, t, \omega) (\hat{u}_1(t) A_1(f^t \omega) + \dots + \hat{u}_r(t) A_r(f^t \omega)) X_0(t, 0, \omega) e_p dt = \\ &= \int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r \hat{u}_l(t) \left(\sum_{i,p=1}^n h_{ip} e_i^* \hat{A}_l(t, \omega) e_p \right) dt = 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию $h \neq 0$. \square

Замечание 5. Пусть задана тройка $(A_0(\omega), B(\omega), C(\omega))$, где $B = (b_1, \dots, b_m)$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $C = (c_1, \dots, c_k)$, $c_j \in \mathbb{R}^n$. Положим $r = mk$ и построим матрицы $A_1 = b_1 c_1^*$, $A_2 = b_1 c_2^*$, \dots , $A_k = b_1 c_k^*$, $A_{k+1} = b_2 c_1^*$, \dots , $A_{2k} = b_2 c_k^*$, \dots , $A_{r-k+1} = b_m c_1^*$, \dots , $A_r = b_m c_k^*$. Тогда определение согласованности для уравнения $\dot{x} = A_0(f^t \omega)x + u_1 A_1(f^t \omega)x + \dots + u_r A_r(f^t \omega)x$ с построенными таким образом матрицами A_i совпадает с определением согласованности, введенным в [5] для уравнения (12).

Теорема 4. Пусть множество $\bar{\gamma}(\omega)$ компактно. Тогда уравнение (\mathbb{A}, ω) равномерно согласованно в том и только том случае, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$ наименьшее собственное значение $\lambda(\vartheta, \omega_0)$ матрицы согласования $\Gamma(\vartheta, \omega_0)$ удовлетворяет неравенству $\lambda(\vartheta, \omega_0) \geq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть уравнение (\mathbb{A}, ω) равномерно согласованно. Поскольку множество $\bar{\gamma}(\omega)$ компактно, а функция $\omega_0 \rightarrow \lambda(\vartheta, \omega_0)$ непрерывна, то существует $\omega_1 \in \bar{\gamma}(\omega)$ такое, что $\lambda(\vartheta, \omega_1) = \min\{\lambda(\vartheta, \omega_0) : \omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)\}$. Если $\lambda(\vartheta, \omega_1) = 0$, то уравнение (\mathbb{A}, ω_1) не является согласованным, что противоречит определению 2.

Пусть $\lambda(\vartheta, \omega_0) \geq \varepsilon$ при некоторых $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$. Тогда для каждого $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$ уравнение (\mathbb{A}, ω_0) согласованно (теорема 3), поэтому уравнение (7) имеет решение $Z(\cdot)$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$, при $u_G(t, \omega_0) = \sum_{i,p=1}^n h_{ip} u_{ip}(t, \omega_0)$, где $u_{ip}(t, \omega_0)$ определены равенствами (14), (15), а h_{ip} находятся из уравнений (18). Поскольку имеет место оценка $|h| \leq |\Gamma^{-1}(\vartheta, \omega_0)| |q(\vartheta, \omega_0)|$, а $|\Gamma^{-1}(\vartheta, \omega_0)| \leq \varepsilon^{-1}$ для всех $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$, то $|h| \leq \varepsilon^{-1} |q(\vartheta, \omega_0)|$. Далее, найдется константа η такая, что $|u_{ip}(t, \omega_0)| \leq \eta$ при всех $(t, \omega_0) \in [0, \vartheta] \times \bar{\gamma}(\omega)$ и всех $i, p = 1, \dots, n$ (это следует из ограниченности \mathbb{A} на $\bar{\gamma}(\omega)$ и инвариантности $\bar{\gamma}(\omega)$ относительно f^t), поэтому найдется такое $\beta > 0$, что $|u_G(t, \omega_0)| \leq \beta |G(\omega_0)|$, $(t, \omega_0) \in [0, \vartheta] \times \bar{\gamma}(\omega)$. \square

Теорема 5. Пусть $\bar{\gamma}(\omega)$ минимально. Тогда уравнение (\mathbb{A}, ω) равномерно согласованно в том и только том случае, если оно согласованно.

Доказательство основано на рассуждениях работы [5].

Пример 1. Система уравнений

$$\dot{x}_1 = u(a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2), \quad \dot{x}_2 = u(a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2), \quad |u| \leq 1,$$

с почти периодическими в смысле Бора коэффициентами равномерно согласованна (и, следовательно, равномерно локально достижима), если функции $a_{ij}(t)$ линейно независимы на \mathbb{R} (тогда в силу почти периодичности они будут линейно независимы на $[\tau, \tau + \vartheta]$ при некотором $\vartheta > 0$ и всех τ). Для доказательства этого факта достаточно по матрице $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ построить замыкание (в топологии равномерной сходимости на прямой) множества сдвигов $\mathcal{H}(A)$ матрицы $A(t)$ и на $\mathcal{H}(A)$ задать динамическую систему сдвигов ([12], гл. VI, § 5). Так как $\mathcal{H}(A)$ минимально, то, воспользовавшись утверждением в) теоремы 3 и теоремой 5, получаем требуемое.

Введем в рассмотрение отображение $\text{vec} : M_n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, которое “разворачивает” матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$ по строкам в вектор-столбец $\text{vec } H \doteq \text{col}(h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{nn})$. Нетрудно проверить, что для любых $C, L, A, M \in M_n$ из $C = LA$ следует $\text{vec } C = (L \otimes I_n) \text{vec } A$ и из $C = AM$ следует $\text{vec } C = (I_n \otimes M^*) \text{vec } A$ (\otimes — кронекерово (прямое) произведение матриц ([13], с. 235)). Построим по уравнению (\mathbb{A}, ω) так называемое “большое уравнение” [6]

$$\dot{z} = F(f^t \omega)z + G(f^t \omega)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^r, \quad (19)$$

где $F(\omega) = A_0(\omega) \otimes I - I \otimes A_0^*(\omega) \in M_{n^2}$, $G(\omega) = (\text{vec } A_1(\omega), \dots, \text{vec } A_r(\omega)) \in M_{n^2 \times r}$. Через $Z_0(t, s, \omega)$ обозначим функцию Коши уравнения $\dot{z} = F(f^t \omega)z$. Уравнение (19) будем отождествлять с тройкой (F, G, ω) .

Напомним, что уравнение (F, G, ω) называется вполне управляемым ([14], гл. 6, § 20), если при некотором $\vartheta > 0$ матрица управляемости

$$W(\vartheta, \omega) = \int_0^\vartheta Z_0(0, t, \omega) G(f^t \omega) G^*(f^t \omega) Z_0^*(0, t, \omega) dt \quad (20)$$

определенно положительна, и равномерно вполне управляемым [15], если найдется такое $\vartheta > 0$, что $W(\vartheta, \omega_0)$ определено положительно равномерно относительно $\omega_0 \in \bar{\gamma}(\omega)$.

Теорема 6. Уравнение (\mathbb{A}, ω) согласованно (равномерно согласованно) в том и только том случае, если уравнение (F, G, ω) вполне управляемо (равномерно вполне управляемо).

Доказательство. Пусть $\Gamma(\vartheta, \omega)$ — матрица согласования уравнения (\mathbb{A}, ω) . Поскольку $\hat{A}_l(t, \omega) = X_0(0, t, \omega) A_l(f^t \omega) X_0(t, 0, \omega)$, то $\text{vec } \hat{A}_l(t, \omega) = (X_0(0, t, \omega) \otimes X_0^*(t, 0, \omega)) \text{vec } A_l(f^t \omega)$, поэтому $\Gamma(\vartheta, \omega) = \int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r \text{vec } \hat{A}_l(t, \omega) \cdot (\text{vec } \hat{A}_l(t, \omega))^* dt$. Далее нетрудно проверить, что $Z_0(0, t, \omega) = X_0(0, t, \omega) \otimes X_0^*(t, 0, \omega)$, поэтому $Z_0(0, t, \omega) G(f^t \omega) = (\text{vec } \hat{A}_1(t, \omega), \dots, \text{vec } \hat{A}_r(t, \omega))$. Следовательно, $W(\vartheta, \omega) = \int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r \text{vec } \hat{A}_l(t, \omega) \cdot (\text{vec } \hat{A}_l(t, \omega))^* dt$. Таким образом, $\Gamma(\vartheta, \omega) = W(\vartheta, \omega)$. \square

5. Согласованность стационарного уравнения

Рассмотрим уравнение (3) с постоянной матрицей $\mathbb{A}(\omega) \equiv \mathbb{A}$ и соответствующее ему уравнение $(F, G, \omega) \equiv (F, G)$. Для каждого $\nu = 1, \dots, r$ введем матрицы $L_0^\nu = A_\nu$, $L_k^\nu = A_0 L_{k-1}^\nu - L_{k-1}^\nu A_0$, $k = 1, \dots, n^2 - 1$.

Теорема 7. Уравнение \mathbb{A} согласованно в том и только том случае, если среди матриц L_k^ν , $k = 0, \dots, n^2 - 1$, $\nu = 1, \dots, r$, существуют n^2 линейно независимых.

Доказательство. Уравнение \mathbb{A} согласованно тогда и только тогда, когда уравнение (F, G) вполне управляемо, а это эквивалентно равенству $\text{rank}[G, FG, \dots, F^{n^2-1}G] = n^2$. Применив к векторам-столбцам матрицы G отображение vec^{-1} , получим r матриц L_0^1, \dots, L_0^r . Проведем ту же процедуру с матрицами $F^k G$, $k = 1, \dots, n^2 - 1$. Тогда на каждом шаге получим r матриц L_k^1, \dots, L_k^r . Поэтому равенство $\text{rank}[G, FG, \dots, F^{n^2-1}G] = n^2$ имеет место только в том случае, если линейная оболочка матриц L_k^ν , $k = 0, \dots, n^2 - 1$, $\nu = 1, \dots, r$, совпадает с M_n . \square

Следствие 2. Пусть A_0 коммутирует с матрицами A_1, \dots, A_r . Тогда уравнение \mathbb{A} согласованно в том и только том случае, если линейная оболочка матриц A_1, \dots, A_r совпадает с M_n .

Следствие 3. Пусть матрицы A_0, \dots, A_r квазитреугольные, т. е. $A_\nu = \{B_{ij}^\nu\}_{i,j=1}^s$, $B_{ii}^\nu \in M_{n_i}$, $\sum_{i=1}^s n_i = n$, $B_{ij}^\nu = 0$ при $i > j$. Тогда уравнение $\mathbb{A} = (A_0, \dots, A_r)$ не является согласованным.

Доказательство. Для всех $\nu = 1, \dots, r$, $k = 0, \dots, n^2 - 1$ матрицы L_k^ν имеют такой же вид, как и матрицы A_ν , поэтому их линейная оболочка не совпадает с M_n . \square

Пример 2. Покажем, что уравнение $\mathbb{A} = (A_0, A_1)$ не является согласованным. Достаточно построить матрицу $W_0 \in M_n$, удовлетворяющую равенствам $(\text{vec } W_0)^* F^k b = 0$ для всех $k = 0, \dots, n^2 - 1$, где $F = A_0 \otimes I - I \otimes A_0^*$, $b = \text{vec } A_1$. Нетрудно проверить, что $(\text{vec } W_0)^* F^k b = b^*(\text{vec } W_k)$, $k = 0, \dots, n^2 - 1$, где $W_k = A_0^* W_{k-1} - W_{k-1} A_0^*$. Если $\text{Sp } A_1 = 0$, то при $W_0 = I$ выполнено $W_k = 0$, $k = 1, \dots, n^2 - 1$ и $b^*(\text{vec } W_0) = 0$. Если $\text{Sp } A_1 \neq 0$ и $A_0 \neq \mu I$, то положим $W_0 = A_0^* - \frac{\text{Sp}(A_1 A_0)}{\text{Sp } A_1} I$. В этом случае также выполнены равенства $b^*(\text{vec } W_k) = 0$ для всех $k = 0, \dots, n^2 - 1$. Если $A_0 = \mu I$, то $F = 0$ и согласованности нет.

Следствие 4. Если $\text{Sp } A_\nu = 0$ для всех $\nu = 1, \dots, r$, то уравнение \mathbb{A} не является согласованным.

Доказательство. Положим $W_0 = I$, тогда $(\text{vec } W_0)^*[G, FG, \dots, F^{n^2-1}G] = 0$.

Пример 3. Пусть степень минимального многочлена матрицы A_0 равна m ($m \geq 2$). Тогда уравнение $\mathbb{A} \equiv (A_0, \dots, A_r)$, где $r \leq m-1$, не является согласованным. Для доказательства этого достаточно построить матрицу $W_0 \in M_n$, удовлетворяющую равенствам $b_\nu^*(\text{vec } W_k) = 0$ при всех $\nu = 1, \dots, r$, $k = 0, \dots, n^2 - 1$, где $b_\nu = \text{vec } A_\nu$, $W_k = A_0^* W_{k-1} - W_{k-1} A_0^*$. Будем искать W_0 в виде $W_0 = \sum_{s=0}^{m-1} \lambda_s (A_0^*)^s$ (матрицы $(A_0^*)^s$, $s = 0, \dots, m-1$, линейно независимы). Тогда $W_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, n^2 - 1$. Далее, равенства $b_\nu^*(\text{vec } W_0) = 0$ эквивалентны равенствам $\sum_{s=0}^{m-1} \lambda_s \text{Sp}(A_\nu A_0^s) = 0$, $\nu = 1, \dots, r$, образующим систему из r уравнений с m неизвестными $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$. Так как $r < m$, то существует нетривиальное решение системы, что и доказывает отсутствие согласованности.

Следствие 5. Если все собственные значения матрицы A_0 различны, то уравнение $\mathbb{A} \equiv (A_0, \dots, A_r)$, где $r \leq n-1$, не является согласованным.

Таким образом, если минимальный многочлен матрицы A_0 совпадает с характеристическим, то r управляющих параметров, где $r < n$, недостаточно для согласованности. Покажем, что n параметров управления достаточно, т. е. найдутся такие матрицы A_1, \dots, A_n , что уравнение $\mathbb{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ согласованно. Пусть $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ — характеристический многочлен матрицы A_0 . Тогда матрица A_0 в некотором базисе имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицы $A_1 = e_n e_1^*, \dots, A_n = e_n e_n^*$ и по уравнению \mathbb{A} — уравнение (F, G) . Тогда

$$F = \begin{pmatrix} -A_0^* & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A_0^* & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -\alpha_n I & -\alpha_{n-1} I & -\alpha_{n-2} I & \dots & -\alpha_1 I - A_0^* \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n^2$, поэтому уравнение \mathbb{A} согласованно.

Литература

1. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. — М.: Наука, 1985. — 335 с.
2. Миллионщиков В.М. *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем* // Сиб. матем. журн. — 1969. — Т. 10. — № 1. — С. 99–104.
3. Миллионщиков В.М. *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5. — № 10. — С. 1775–1784.
4. Изобов Н.А. *Линейные системы дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Матем. анализ. — 1974. — Т. 12. — С. 71–146.
5. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *Управление показателями Ляпунова согласованных систем*. I // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 10. — С. 1687–1696.
6. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *К вопросу о равномерной согласованности линейных систем* // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 4. — С. 723–724.
7. Тонков Е.Л. *Задачи управления показателями Ляпунова* // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 10. — С. 1682–1686.

8. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *Согласованные системы и управление показателями Ляпунова* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 226–235.
9. Еругин Н.П. *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
10. Тонков Е.Л. *Управляемость нелинейной системы по линейному приближению* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – № 4. – С. 599–606.
11. Тонков Е.Л. *Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 908–910.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
13. Ланкастер П. *Теория матриц*. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
14. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
15. Тонков Е.Л. *О равномерной локальной управляемости линейного уравнения* // Матем. физика. Респ. межвед. сб. – Киев, 1983. – Вып. 33. – С. 44–53.

*Удмуртский государственный
университет*

*Поступила
03.03.1998*