АВГУСТ 1993 г., ТОМ 29, № 8

УДК 517.95

А. В. ЩЕПЕТИЛОВ

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ САРДА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

В работе [1, с. 152] поставлена краевая задача, описывающая процесс фазового аустенитно-перлитного превращения в стали, и доказано существование ее решения. При этом тепловой источник задан неявно нелинейным интегральным уравнением таким образом, что для него оказывается проблематичным выполнение условия Липшица по отношению к зависимости от решения задачи. С другой стороны, нелокальная зависимость источника от решения препятствует применению метода монотонности в том виде, в котором он описан, например, в [2, с. 173]. В настоящей работе для задачи, являющейся частным случаем задачи, рассмотренной в [1], предлагается некоторая модификация метода монотонности, применение которой для краевой задачи в области $\Omega\subset R^n$ при $n>1$ основано на геометрической теореме Сарда.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\triangle u(x,t)+\frac{\partial F(x,t)}{\partial t},\quad (x,t)\in Q_T:=\Omega\times(0,T), \tag{1}$$

где $F(x,t)=-\exp\left(-\int\limits_0^t b(u(x,\tau))d\tau\right)$;

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=u_0(x,t)-u(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

где $\nu(x)$ — внешняя к $\partial\Omega$ нормаль;

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

где $u_0(x,t)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции на $\partial\Omega\times(0,T)$ и Ω соответственно.

Наша цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть Ω удовлетворяет условиям сформулированной ниже леммы 1. Пусть $b(\cdot)$ — неотрицательная непрерывная и невозрастающая функция на R^1. Тогда не существует более одного решения $u(x,t)$ задачи (1)—(3) среди функций $C^{(2),(1)}_{x,t}(Q_T)\cap C^{(1),(0)}_{x,t}(\bar{Q}_T)$.*

Лемма 1. *Пусть Ω — связная ограниченная область в R^n, имеющая гладкую класса C^∞ вложенную в R^n границу $\partial\Omega$. Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ множество $\{x-\varepsilon\nu(x),\ x\in\partial\Omega\}$ также образует вложенную в R^n поверхность $\partial\Omega_\varepsilon$, ограничивающую область $\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$, причем направления нормалей к $\partial\Omega_\varepsilon$ и $\partial\Omega$ в соответствующих точках совпадают. Задавшись любым $\delta>0$ и выбрав достаточно малое ε, получим $0<\mu_n(\Omega)-\mu_n(\Omega_\varepsilon)\leqslant\delta$, где $\mu_n(\cdot)$ — лебегова мера в R^n, и $|S(\partial\Omega)-S(\partial\Omega_\varepsilon)|\leqslant\delta$, где $S(\cdot)$ — площадь поверхности.*

Лемма доказывается с использованием свойств вложенности и компактности $\partial\Omega$ перенесением параметризации с $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_\varepsilon$.

Доказательство теоремы ведется от противного. Пусть задача (1)—(3) имеет два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Рассмотрим эти решения в некоторой области $\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)$. Без ограничения общности можно считать, что эти решения не совпадают в $\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)$. Значит, $\exists t_0\in(\varepsilon, T-\varepsilon)$ такое, что

$$I(t_0):=\int_{\Omega_\varepsilon}|u_1(x, t_0)-u_2(x, t_0)|dx=I_0>0.$$

В некоторой окрестности области $\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)$ функции $u_1, u_2\in C_{x,t}^{(2),(1)}$, а значит, по модифицированной теореме Вейерштрасса [3, с. 682] ее можно сколь угодно точно полиномиально аппроксимировать вместе с соответствующими ее гладкости производными равномерно в $\bar\Omega_\varepsilon\times[\varepsilon, T-\varepsilon]$. Выбирая достаточно точные полиномиальные (зависящие от ε) аппроксимации $\tilde u_1(x, t)$ и $\tilde u_2(x, t)$ для $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ соответственно, получим

$$\tilde I(t_0):=\int_{\Omega_\varepsilon}|\tilde u_1(x, t_0)-\tilde u_2(x, t_0)|dx=I_0+\psi(\varepsilon)>0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\tilde u_i}{\partial t}=\Delta\tilde u_i+\frac{\partial\tilde F_i}{\partial t}+\varphi_i^{(1)}(\varepsilon, x, t),\quad (x, t)\in\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon), \tag{5}$$

где $\tilde F_i(\varepsilon, x, t)=-\exp\left(-\int_\varepsilon^t b(\tilde u_i(x, \tau))d\tau\right)$,

$$\frac{\partial\tilde u_i}{\partial\nu_\varepsilon}=u_0(x+\varepsilon\nu_\varepsilon(x), t)-\tilde u_i(x, t)+\varphi_i^{(2)}(\varepsilon, x, t), \tag{6}$$

$$x\in\partial\Omega_\varepsilon,\ t\in(\varepsilon, T-\varepsilon),$$

$$\tilde u_i(x, \varepsilon)=\varphi(x)+\varphi_i^{(3)}(\varepsilon, x),\quad x\in\Omega_\varepsilon, \tag{7}$$

где $\eta(\varepsilon):=\max\{\sup\limits_{\Omega_\varepsilon}|\varphi_i^{(3)}(\varepsilon, x)|,\ \sup\limits_{\partial\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)}|\varphi_i^{(2)}(\varepsilon, x, t)|,\ \sup\limits_{\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)}|\varphi_i^{(1)}(\varepsilon, x, t)|, \psi(\varepsilon)\}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Рассмотрим

$$\tilde I_{\varepsilon_1}(t)=\int_{\Omega_\varepsilon}|\tilde u_1(x, t)-\tilde u_2(x, t)+\varepsilon_1|dx.$$

При достаточно малых ε_1 $\tilde I_{\varepsilon_1}(t_0)$ сколь угодно близко к $I_0+\psi(\varepsilon)$. По теореме Сарда [4, с. 243] для почти всех ε_1 множество

$$M_{\varepsilon_1}:=\{x, t\,|\,\tilde u_1(x, t)-\tilde u_2(x, t)+\varepsilon_1=0,\ (x, t)\in\Omega_\varepsilon\times(\varepsilon, T-\varepsilon)\}$$

либо пусто, либо является гладкой n-мерной поверхностью, вложенной в R^{n+1}. Кроме того, множество

$$P_{\varepsilon_1}:=\{x, t\,|\,\tilde u_1(x, t)-\tilde u_2(x, t)+\varepsilon_1=0,\ x\in\partial\Omega_\varepsilon,\ t\in(\varepsilon, T-\varepsilon)\}$$

также для почти всех ε_1 либо пусто, либо является гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью. Наконец, по той же причине срезы множеств $P_{\varepsilon_1}(t)$ и $M_{\varepsilon_1}(t)$ (т. е. множества, получающиеся из P_ε и M_{ε_1} фиксацией t) при почти всех t либо пусты, либо являются гладкими поверхностями размерности $n-2$ и $n-1$ соответственно. В дальнейшем ε_1 выбирается именно таким.

Проверка выполнения условия абсолютной непрерывности приводит к лемме.

Лемма 2. *Если $f(x, t)\in C_{x,t}^{(0),(1)}(\bar D\times[a, b])$, то $\varphi(t):=\int_D|f(x, t)|dx$ абсолютно непрерывна на (a, b) и $\mu_1\left(\left\{t:\mu_n\left(\left\{x:\nexists\ \frac{\partial}{\partial t}|f(x, t)|\right\}\right)>0\right\}\right)=0$, где $D\subset R^n$ — ограниченная область.*

Утверждение леммы позволяет восстановить $\varphi(t)$ по $\frac{\partial f}{\partial t}$ по формуле

$$\varphi(t)=\int\limits_a^t\left(\int\limits_{D^+(\xi)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\,dx-\int\limits_{D^-(\xi)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\,dx\right)d\xi+\varphi(a),$$

где $D^+(\xi):=\{x\in D\mid f(x,\xi)>0\}$, $D^-(\xi):=\{x\in D\mid f(x,\xi)<0\}$.

Применим эту лемму к функции $\tilde I_{\varepsilon_1}(t)$:

$$\tilde I_{\varepsilon_1}(t_0)=\int\limits_\varepsilon^{t_0}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+(\xi)}\left(\frac{\partial\tilde u_1}{\partial t}-\frac{\partial\tilde u_2}{\partial t}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-(\xi)}\left(\frac{\partial\tilde u_2}{\partial t}-\frac{\partial\tilde u_1}{\partial t}\right)dx\right)d\xi+\tilde I_{\varepsilon_1}(\varepsilon),$$

где

$$\Omega_\varepsilon^+(\xi):=\{x\in\Omega_\varepsilon,\ \tilde u_1(x,\xi)-\tilde u_2(x,\xi)+\varepsilon_1>0\},$$

$$\Omega_\varepsilon^-(\xi):=\{x\in\Omega_\varepsilon,\ \tilde u_1(x,\xi)-\tilde u_2(x,\xi)+\varepsilon_1<0\}.$$

Учитывая (5), получим

$$\tilde I_{\varepsilon_1}(t_0)=J_{\varepsilon_1}(t_0)+K_{\varepsilon_1}(t_0)+\tilde I_{\varepsilon_1}(\varepsilon),$$

где

$$J_{\varepsilon_1}(t_0):=\int\limits_\varepsilon^{t_0}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+(\xi)}(\Delta\tilde u_1-\Delta\tilde u_2)\,dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-(\xi)}(\Delta\tilde u_2-\Delta\tilde u_1)\,dx\right)d\xi,$$

$$K_{\varepsilon_1}(t_0):=\int\limits_\varepsilon^{t_0}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+(\xi)}\left(\frac{\partial\tilde F_1}{\partial t}-\frac{\partial\tilde F_2}{\partial t}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-(\xi)}\left(\frac{\partial\tilde F_2}{\partial t}-\frac{\partial\tilde F_1}{\partial t}\right)dx\right)d\xi.$$

Ясно, что ввиду (7) $\tilde I_{\varepsilon_1}(\varepsilon)$ может быть сделано сколь угодно малым при выборе достаточно малых ε_1 и ε. Для почти всех ξ $\mu_n(\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)\setminus\Omega_\varepsilon^+(\xi))=0$, а $\partial\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ может отличаться от $\partial\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ лишь отсутствием некоторых гладких связных и замкнутых кусков, целиком вместе с некоторыми своими окрестностями находящимися в $\Omega_\varepsilon^+(\xi)$. $\partial\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ состоит из некоторых гладких кусков из $\partial\Omega_\varepsilon$ и некоторых гладких кусков из $M_{\varepsilon_1}(\xi)$ *), причем негладкой $\partial\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ может быть лишь в точках $(n-2)$-мерной гладкой поверхности $P_{\varepsilon_1}(\xi)$, имеющей нулевую $\mu_{n-1}(\cdot)$. Куски $\partial\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ из $\partial\Omega_\varepsilon$, входящие в $\partial\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)$, очевидно, ориентируемы, а куски $M_{\varepsilon_1}^+(\xi)$ из $M_{\varepsilon_1}(\xi)$, входящие в $\partial\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)$, ориентируемы, так как разделяют области $\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ и $\Omega_\varepsilon^-(\xi)$. То же самое относится и к $\bar\Omega_\varepsilon^-(\xi)$. Поэтому

$$J_{\varepsilon_1}(t_0)=\int\limits_\varepsilon^{t_0}\left(\int\limits_{\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)}(\Delta\tilde u_1-\Delta\tilde u_2)\,dx+\int\limits_{\bar\Omega_\varepsilon^-(\xi)}(\Delta\tilde u_2-\Delta\tilde u_1)\,dx\right)d\xi,\tag{8}$$

и к внутреннему интегралу в (8) для почти всех ξ можно применить многомерную теорему Стокса [5, с. 225]

$$\int\limits_{\bar\Omega_\varepsilon^+(\xi)}(\Delta\tilde u_1-\Delta\tilde u_2)\,dx=\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon^+}\frac{\partial(\tilde u_1-\tilde u_2)}{\partial\nu_\varepsilon}\,ds+\int\limits_{M_{\varepsilon_1}^+(\xi)}\frac{\partial(\tilde u_1-\tilde u_2)}{\partial\nu^+}\,ds,$$

где $\nu^+(x)$ — поле внешних к $M_{\varepsilon_1}^+(\xi)$ нормалей. Но в точках $M_{\varepsilon_1}^+(\xi)$

*) Случай пустого $\Omega_\varepsilon^+(\xi)$ или пустого $\Omega_\varepsilon^-(\xi)$ полностью вписывается в дальнейшие рассуждения.

$\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial\nu^+}\leqslant 0$. Поэтому, учитывая (6), получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+(\xi)}(\triangle\tilde{u}_1-\triangle\tilde{u}_2)\,dx\leqslant S(\partial\Omega_\varepsilon)\eta(\varepsilon).$$

Таким образом, за счет выбора достаточно малого ε значение $J_{\varepsilon_1}(t_0)$ может быть сделано меньше любого положительного числа. Но тогда $K_{\varepsilon_1}(t_0)$ при достаточно малых ε и ε_1 должно быть сколь угодно близко к $I_0>0$. Покажем, что это не так. Обозначим

$$\widehat{F}_1(\varepsilon_1,\varepsilon,x,t):=-\exp\Big(-\int\limits_\varepsilon^t b(\tilde{u}_1(x,\tau)+\varepsilon_1)\,d\tau\Big).$$

Ввиду непрерывности $b(\tilde{u}_1(x,\tau)+\varepsilon_1)$ на $\bar{\Omega}_\varepsilon\times[\varepsilon,T-\varepsilon]$ разность $\widehat{F}_1(\varepsilon_1,\varepsilon,x,t)-\tilde{F}_1(\varepsilon,x,t)\to 0$ при $\varepsilon_1\to 0$ равномерно в $\bar{\Omega}_\varepsilon\times[\varepsilon,T-\varepsilon]$. Поэтому

$$\widehat{K}_{\varepsilon_1}(t_0):=\int\limits_\varepsilon^{t_0}\Big(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+(\xi)}\Big(\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-(\xi)}\Big(\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}-\frac{\partial F_1}{\partial t}\Big)dx\Big)d\xi$$

должно быть сколь угодно близко к I_0 при достаточно малых ε и ε_1. По теореме Фубини повторный интеграл можно записать в другом порядке:

$$\widehat{K}_{\varepsilon_1}(t_0)=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Big(\int\limits_{\Lambda_\varepsilon^+(x)}\Big(\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}\Big)dt+$$
$$+\int\limits_{\Lambda_\varepsilon^-(x)}\Big(\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}-\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial t}\Big)dt\Big)dx,$$

где $\Lambda_\varepsilon^+(x):=\{t\in(\varepsilon,t_0),\ \tilde{u}_1(x,t)-\tilde{u}_2(x,t)+\varepsilon_1>0\}$, $\Lambda_\varepsilon^-(x):=\{t\in(\varepsilon,t_0),\ \tilde{u}_1(x,t)-\tilde{u}_2(x,t)+\varepsilon_1<0\}$. Поскольку при достаточно малых ε и ε_1 значение $\widehat{K}_{\varepsilon_1}(t_0)$ должно быть сколь угодно близко к I_0, то $\exists x_0\in\Omega_\varepsilon$ такое, что

$$\mathscr{I}:=\int\limits_{\Lambda_\varepsilon^+(x_0)}\Big(\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}\Big)dt+\int\limits_{\Lambda_\varepsilon^-(x_0)}\Big(\frac{\partial\tilde{F}_2}{\partial t}-\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial t}\Big)dt>0.$$

Если мы покажем, что существование такого x_0 ведет к противоречию, то теорема будет доказана. Поскольку $\tilde{u}_1(x_0,t)-\tilde{u}_2(x_0,t)+\varepsilon_1$ — полином, то он имеет конечное число корней (случай $\tilde{u}_1(x_0,t)-\tilde{u}_2(x_0,t)+\varepsilon_1\equiv 0$ исключен ввиду $\mathscr{I}>0$).

Пусть $\{t_i\}$, $i=\overline{2,N-1}$, — множество корней этого полинома на интервале (ε,t_0), в котором он меняет знак, $t_1=\varepsilon$, $t_N=t_0$. Обозначим

$$A_i:=\exp\Big(-\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}b(\tilde{u}_1(x_0,\tau)+\varepsilon_1)\,d\tau\Big),\ i=\overline{2,N},$$

$$B_i:=\exp\Big(-\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}b(\tilde{u}_2(x_0,\tau))\,d\tau\Big),\ i=\overline{2,N}.$$

Для обозначения знака $\tilde{u}_1(x_0,\tau)-\tilde{u}_2(x_0,\tau)+\varepsilon_1$ на (t_{i-1},t_i) будем употреблять символ

$$\operatorname*{sign}_{(t_{i-1},t_i)}:=\begin{cases}1, & \tilde{u}_1(x_0,\tau)-\tilde{u}_2(x_0,\tau)+\varepsilon_1>0,\ t_{i-1}<\tau<t_i,\\ -1, & \tilde{u}_1(x_0,\tau)-\tilde{u}_2(x_0,\tau)+\varepsilon_1<0,\ t_{i-1}<\tau<t_i.\end{cases}$$

Если $\operatorname*{sign}\limits_{(t_{i-1},t_i)}=1$ (соответственно -1), то ввиду невозрастания $b(\cdot)$

$A_i \geqslant B_i$ (соответственно $A_i \leqslant B_i$). Таким образом,

$$\mathcal{I} = \sum_{i=2}^{N} \operatorname{sign}_{(t_{i-1},\, t_i)} [\widehat{F}_1(x_0, t_i) - \tilde{F}_2(x_0, t_i) - (\widehat{F}_1(x_0, t_{i-1}) - \tilde{F}_2(x_0, t_{i-1}))] =$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \operatorname{sign}_{(t_{i-1},\, t_i)} [[\prod_{2 \leqslant j \leqslant i} A_j](1 - A_i) - [\prod_{2 \leqslant j < i} B_j](1 - B_i)], \qquad (9)$$

где при $i=2$ считаем $\prod\limits_{2 \leqslant j < 2} = 1$.

При помощи математической индукции доказывается

Лемма 3. *Пусть выполнены условия:*

α) $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $i = \overline{1, N}$, a_i, $b_i \in R^1$, *таковы, что* $0 < a_i$, $b_i \leqslant 1$;

β) *при* i *четном* $a_i \geqslant b_i$, *при* i *нечетном* $a_i \leqslant b_i$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i \leqslant 0$, *где*

$$f_i := (-1)^i \{[\prod_{1 \leqslant j < i} a_j](1 - a_i) - [\prod_{1 \leqslant j < i} b_j](1 - b_i)\}.$$

Утверждение теоремы сразу следует из леммы 3, так как сумма (9) есть с точностью до обозначений сумма из леммы 3 и, значит, $\mathcal{I} \leqslant 0$.

Автор выражает благодарность В. Б. Гласко за полезные обсуждения.

Литература

1. Visintin A. // IMA J. Appl. Math. 1987. Vol. 39. P. 143—157.
2. Лионс Ж.-П. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
3. Шварц Л. Анализ. М., 1972. Т. 1.
4. Постников М. М. Гладкие многообразия. М., 1987.
5. Шварц Л. Анализ. М., 1972. Т. 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17 июля 1991 г.