

ОДНА ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ  
КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

В данной заметке приведено новое доказательство одного (по существу известного) результата о представлении вещественных алгебр с нормой. В несколько менее общей форме этот результат следует из предложения 2.3 [1], доказательство которого, однако, использует порядковые свойства алгебр [2]. Предложенное здесь доказательство использует лишь теорему Гельфанда-Наймарка для коммутативных  $C^*$ -алгебр.

**Т е о р е м а.** Вещественная коммутативная алгебра  $A$  с нормой, относительно которой  $A$  является банаховым пространством, изометрически изоморфна  $C_0^R(T)$  - вещественной алгебре всех непрерывных вещественных функций на некотором локально компактном пространстве  $T$ , обращающихся в нуль на бесконечности, - тогда и только тогда, когда норма в  $A$  удовлетворяет условиям:

$$(i) \|a^2\| = \|a\|^2 \quad (a \in A),$$

$$(ii) \|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \quad (a, b \in A).$$

Если, в частности,  $A$  обладает единицей, то  $T$  - компактное пространство.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Нужно доказать лишь необходимость. Для этого следует лишь убедиться, что  $A$  изометрически изоморфна эрмитовой части некоторой  $C^*$ -алгебры.

Пусть  $a, b \in A$ ,  $\|a\|, \|b\| \leq 1$ . Из оценки

$$\begin{aligned} \|ab\| &= \|a^2 b^2\|^{1/2} \leq \|a^2 b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2\|^{1/2} = \\ &= \left\| \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \right\|^{1/2} = \left\| \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \right\| \leq 1 \end{aligned}$$

следует, что  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  для любых  $a, b \in A$ , т.е.  $A$  - банахова алгебра. Положим  $B = A + iA$ . Очевидно,  $B$  - коммутативная  $*$ -алгебра над  $C$  относительно естественных векторных операций, умножения, а также инволюции  $(a + ib)^* =$

$= a - i\beta$  ( $a, \beta \in \mathcal{A}$ ). Положим

$$\|x\|_1 \equiv \|x^*x\|^{1/2} \quad (x \in \mathcal{B}). \quad (1)$$

Заметим, что для элемента  $x = a + i\beta$  ( $a, \beta \in \mathcal{A}$ ):  $\|x\|_1 = \|a^2 + \beta^2\|^{1/2}$ .  
 Далее, для любых  $x, y \in \mathcal{B}$  имеем

$$\begin{aligned} \|xy\|_1 &= \|y^*x^*xy\|^{1/2} = \|y^*y x^*x\|^{1/2} \leq \\ &\leq \|y^*y\|^{1/2} \|x^*x\|^{1/2} = \\ &= \|x\|_1 \|y\|_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем, что (1) определяет в  $\mathcal{B}$  структуру коммутативной  $C^*$ -алгебры. Прежде всего  $\|\cdot\|_1$  - норма в  $\mathcal{B}$ . Действительно, пусть  $x = a + i\beta$ . Тогда  $\|x\|_1 = 0$  влечет (см. (i), (ii))

$$\|a\| = \|a^2\|^{1/2} \leq \|a^2 + \beta^2\|^{1/2} = \|x\|_1 = 0,$$

т.е.  $a = 0$ . Аналогично  $\beta = 0$  и, следовательно,  $x = 0$ .  
 Убедимся, что  $\|\cdot\|_1$  - выпуклая функция. Пусть  $x = a + i\beta$ ,  
 $y = c + id$  ( $a, \beta, c, d \in \mathcal{A}$ ). Тогда с учетом (2)

$$\begin{aligned} \|ac + \beta d\| &= \|(ac + \beta d)^2\|^{1/2} \leq \|(ac + \beta d)^2 + \\ &+ (ad - \beta c)^2\|^{1/2} = \|(ac - \beta d)^2 + (ad + \beta c)^2\|^{1/2} = \\ &= \|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1, \end{aligned} \quad (3)$$

и значит (см. (3))

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1^2 &= \|(x^*+y^*)(x+y)\| = \|x^*x + y^*y + x^*y + y^*x\| \leq \\ &\leq \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + \|x^*y + y^*x\| = \\ &= \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\|ac + \beta d\| \leq \\ &\leq \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\|x\|_1 \|y\|_1, \end{aligned}$$

так что  $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ . Алгебра  $\mathcal{B}$  с нормой  $\|\cdot\|_1$  является  $C^*$ -алгеброй, так как

$$\|x^*x\|_1 = \|(x^*x)^2\|^{1/2} = \|x^*x\| = \|x\|_1^2.$$

Наконец, для любого  $x \in \mathcal{A}$   $\|x\|_1 = \|x^2\|^{1/2} = \|x\|$ . Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если  $\mathcal{A}$  —  $\mathcal{J}\mathcal{B}$  — алгебра и  $\mathcal{M}$  — замкнутая ассоциативная подалгебра, содержащая  $1$ , то  $\mathcal{M}$  изометрически изоморфна алгебре  $C^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$  для некоторого компактного отделимого пространства  $\mathcal{T}$ .

Отметим также, что доказанная выше теорема позволяет также упростить доказательство теоремы 2.1 работы [1].

### Л и т е р а т у р а

1. Alfsen E., Schultz F., Stormer E. A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras. — *Advances in Math.*, 1978, т. 28, № 1, p. 11–56.

2. Kadison R. A representation theory for commutative topological algebra. — *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1951, т. 7.