УДК 517.594

Ю.К. СИРЕНКО, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

1. В теории периодических структур трудности в математической постановке и решении спектральных задач заставили отойти от классической схемы, апробированной на большом числе самосопряженных краевых задач. Согласно этой схеме решению задач возбуждения, как прямых, так и обратных, должен предшествовать анализ задач спектральных, однородных. Нарушение традиционной последовательности можно было и не отмечать, если бы оно не отзывалось неизбежным появлением "белых" пятен в картинах, создаваемых только по результатам анализа задач возбуждения. Таких "белых" пятен в теории периодических структур осталось еще немало, особенно в так называемой резонансной области частот [1]. Заполнить их, дать эффективный выход на решение нелинейных, нестационарных, обратных задач – вот далеко не полный перечень проблем, решение которых не может быть получено без создания соответствующей спектральной теории. Фундаментом всех таких теорий являются теоремы единственности. В данной работе получен ряд условий, ограничивающих возможность существования нетривиальных решений спектральной краевой задачи для одномерно-периодических решеток. Эти условия по существу являются локальными (по отношению к области изменения спектрального параметра) теоремами единственности.

2. Изучается возможность существования нетривиальных решений краевой задачи

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\kappa^2\epsilon(y,z)\right]U(y,z)=0, \tag{1}$$

$$0\leqslant y\leqslant 2\pi,\quad |z|<\infty,\quad \{y,z\}\notin \operatorname{int} S_1;$$

$$U(2\pi,z)=U(0,z)e^{i2\pi\Phi},\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=2\pi}=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}e^{i2\pi\Phi}; \tag{2}$$

$$E_{\mathrm{tg}}=0|_{S_1}, \tag{3}$$

E_{tg} и H_{tg} непрерывны на линиях разрыва $\epsilon(y,z)$, удовлетворяющих условию "излучения"

$$U(y,z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\Phi_n y}e^{i\Gamma_n(z-2\pi\delta)}, & z\geqslant 2\pi\delta,\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\Phi_n y}e^{-i\Gamma_n(z+2\pi\delta)}, & z\leqslant -2\pi\delta.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь $U=E_x$ в случае E-поляризации; $U=H_x$ – в H-случае; $E_x, H_x, E_{\mathrm{tg}}, H_{\mathrm{tg}}$ – компоненты векторов напряженности электромагнитного поля **E** и **H**; Φ и δ – действительные числа; $\Phi_n=n+\Phi$; $\Gamma_n=(\kappa^2-\Phi_n^2)^{1/2}$; S_1 – контур поперечного сечения металлических образующих решетки. Комплекснозначная, кусочно-постоянная функция $\epsilon=\mathrm{Re}\,\epsilon+i\,\mathrm{Im}\,\epsilon$, $\mathrm{Re}\,\epsilon>0$, $\mathrm{Im}\,\epsilon\geqslant 0$, $\epsilon(2\pi,z)=\epsilon(0,z)$, равная единице в области $|z|>2\pi\delta$, характеризует относительную диэлектрическую проницаемость слоя, в который погружена решетка. Один из возможных вариантов геометрии задачи представлен на рис. 1. В том случае, когда контур S_1 имеет "ребра", где E_{tg} не

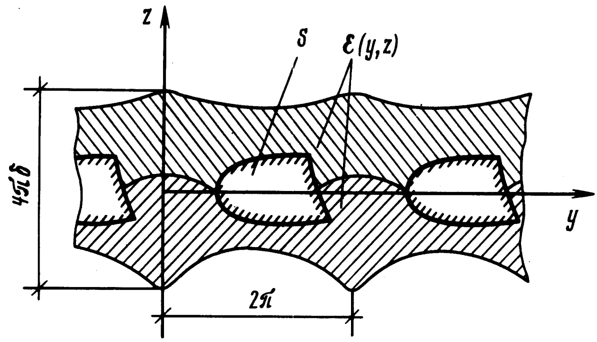

Рис. 1. Геометрия задачи

определена, условия задачи (1) – (4) дополняются требованием конечности энергии поля в любом ограниченном объеме. Спектральный параметр $\kappa = \omega(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ (зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$, ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума) меняется в области K, естественные границы которой определяются возможностью аналитического продолжения с оси $\mathrm{Im}\,\kappa = 0$, где $\mathrm{Re}\,\Gamma_n \geqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \geqslant 0$, канонической функции Грина

$$G(y, z, y_0, z_0, \kappa, \Phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{i[\Phi_n(y-y_0) + \Gamma_n |z - z_0|\}\Gamma_n^{-1}.$$

Область K – многолистная поверхность Римана. Первый лист полностью определяется разрезами $d_n = (\mathrm{Re}\,\kappa)^2 - (\mathrm{Im}\,\kappa)^2 - \Phi_n^2$, $\mathrm{Re}\,\kappa\,\mathrm{Im}\,\kappa \leqslant 0$. Последующие листы отличаются от первого тем, что для конечного числа индексов n знак функции $\Gamma_n(\kappa)$ изменен на противоположный.

3. Запишем исходное "энергетическое" соотношение

$$(5)\qquad \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)d\mathbf{s} = i\int_V [\omega\mu_0 |\mathbf{H}|^2 - \omega^*\epsilon^*\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2]dv,$$

которое получается из уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -i\omega\epsilon\epsilon_0\mathbf{E},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$$

с помощью теоремы Гаусса – Остроградского и известно в электродинамике реальных частот как теорема о комплексной мощности. Здесь V – объем, ограниченный поверхностью S_1 и сторонами параллелепипеда $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, $|z| \leqslant 2\pi\delta$, $|x| \leqslant 0{,}5$; $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль. Раскрывая (5) для двух возможных случаев поляризации поля, получаем ($\omega \neq 0$) теорему 1.

Т е о р е м а 1. *Не существует нетривиальных решений задачи* (1) – (4) *таких, что в случае E-поляризации*

$$(6)\qquad \frac{2\pi}{\mu_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\,\mathrm{Re}\,\Gamma_n \neq -\epsilon_0\{\mathrm{Im}\,\epsilon[(\mathrm{Re}\,\omega)^2 - (\mathrm{Im}\,\omega)^2] +$$
$$+ 2\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\omega\,\mathrm{Re}\,\epsilon\}\int_V |\mathbf{E}|^2 dv$$

и (*или*)

$$(7)\qquad \frac{2\pi}{\mu_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\,\mathrm{Im}\,\Gamma_n \neq \int_V \{-|\omega|^2\mu_0|\mathbf{H}|^2 +$$
$$+ [\mathrm{Re}\,\epsilon[(\mathrm{Re}\,\omega)^2 - (\mathrm{Im}\,\omega)^2] - 2\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\epsilon]\epsilon_0|\mathbf{E}|^2\}dv;$$

в случае H-поляризации

(8) $$\frac{2\pi}{\epsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\,\mathrm{Re}\,\Gamma_n \neq -\int_V [2\mu_0\,\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\omega\,|\mathbf{H}|^2 + |\omega|^2\,\mathrm{Im}\,\epsilon\epsilon_0\,|\mathbf{E}|^2]dv$$

и (или)

(9) $$\frac{2\pi}{\epsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\,\mathrm{Im}\,\Gamma_n \neq \int_V \{-|\omega|^2\,\mathrm{Re}\,\epsilon\epsilon_0\,|\mathbf{E}|^2 + [(\mathrm{Re}\,\omega)^2-(\mathrm{Im}\,\omega)^2]\mu_0\,|\mathbf{H}|^2\}dv.$$

4. Назовем решение задачи (1)–(4) уходящим, приходящим, неприходящим, неуходящим, если для всех $n = 0, \pm 1, \ldots$ соответственно $\mathrm{Re}\,\Gamma_n\,\mathrm{Re}\,\omega > 0$, $\mathrm{Re}\,\Gamma_n\,\mathrm{Re}\,\omega < 0$, $\mathrm{Re}\,\Gamma_n\,\mathrm{Re}\,\omega \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,\Gamma_n\,\mathrm{Re}\,\omega \leqslant 0$.

Такое определение выглядит естественным, если вспомнить принятую зависимость от времени и проследить в связи с этим направления распространения составляющих (4). Сравнивая знаки правых и левых частей в (6) и (7) при $\mathrm{Im}\,\epsilon = 0$ (E-поляризация, идеальное диэлектрическое заполнение), сформулируем следующие результаты.

Следствие 1. *При* $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ *не существует нетривиальных решений задачи* (1)–(4) *таких, что*

$$\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\,\mathrm{Re}\,\Gamma_n > 0.$$

В частности, не существует уходящих решений при $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ *и приходящих при* $\mathrm{Im}\,\omega < 0$.

Следствие 2. *При* $\mathrm{Im}\,\omega = 0$, $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$ *не существует нетривиальных решений задачи* (1)–(4) *таких, что*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\,\mathrm{Re}\,\Gamma_n \neq 0.$$

В частности, в отличных от нуля неуходящих и неприходящих решениях $|a_n|^2 + |b_n|^2 = 0$ *для всех n, при которых* $\mathrm{Re}\,\Gamma_n \neq 0$.

Следствие 3. *При* $\mathrm{Re}\,\omega = 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ *не существует нетривиальных решений задачи* (1)–(4) *таких, что для всех n* $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \geqslant 0$.

Следствие 4. *При* $|\mathrm{Im}\,\omega| \geqslant |\mathrm{Re}\,\omega|$ *не существует нетривиальных решений задачи* (1)–(4) *таких, что для всех n* $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \geqslant 0$.

В случае H-поляризации предметом анализа становятся условия (8), (9). Они показывают, что следствия 1–4 сохраняют силу и в H-случае. Оценим теперь, как сказывается на результатах наличие поглощения в слое, содержащем решетку ($\mathrm{Im}\,\epsilon > 0$).

В случае E-поляризации справедливы

Следствие 5. *При* $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ *не существует нетривиальных решений задачи* (1)–(4) *таких, что для всех n*

$$\mathrm{Re}\,\Gamma_n\,\{\mathrm{Im}\,\epsilon[(\mathrm{Re}\,\omega)^2-(\mathrm{Im}\,\omega)^2] + 2\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,\omega\,\mathrm{Re}\,\epsilon\} > 0.$$

В частности, при $|\mathrm{Re}\,\omega| \geqslant |\mathrm{Im}\,\omega|$ *не существует приходящих решений в областях с* $\mathrm{Re}\,\omega < 0$ *и* $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ *и уходящих в областях с* $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ *и* $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. *При* $|\mathrm{Re}\,\omega| \leqslant |\mathrm{Im}\,\omega|$ *не существует приходящих решений в областях с* $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ *и* $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ *и уходящих в областях с* $\mathrm{Re}\,\omega < 0$ *и* $\mathrm{Im}\,\omega > 0$.

С л е д с т в и е 6. *При* $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ *не существует нетривиальных неприходящих решений для* $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ *и неуходящих для* $\mathrm{Re}\,\omega < 0$. *В случае* $\mathrm{Re}\,\omega = 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ *нетривиальных решений задачи не существует.*

Шестое следствие сохраняет силу и в H-случае, для которого справедливо также

С л е д с т в и е 7. *При* $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ *не существует нетривиальных уходящих в области* $\mathrm{Re}\,\omega > 0$, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ *и приходящих в области* $\mathrm{Re}\,\omega < 0$, $\mathrm{Im}\,\omega \lessgtr 0$ *решений задачи* (1) – (4).

5. На основе формул (6) – (9) возможен анализ спектральных свойств решеток в слое диэлектрика ($\mathrm{Im}\,\epsilon < 0$). В случае E-поляризации все сделанные выводы справедливы и для краевой задачи (1) – (4) с кусочно-непрерывной функцией $\epsilon(y, z)$. Нетрудно проследить связь такой задачи с голографическими решетками. Полученные результаты автоматически переносятся и на краевые задачи, связанные с отражательными решетками. Для этого достаточно везде в этой работе положить $b_n = 0$ для всех $n = 0, \pm 1, \ldots$

В заключение обратимся к одному частному случаю задачи (1) – (4), а именно, к задаче, связанной с плоскими дифракционными решетками, для которых $V = 0$. Для задач с такой геометрией правая часть в (5) обращается в ноль и справедливы

С л е д с т в и е 8. *В случае плоской решетки не существует нетривиальных решений задачи* (1) – (4) *таких, что*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)\,\mathrm{Re}\,\Gamma_n \neq 0 \quad \text{и (или)} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)\,\mathrm{Im}\,\Gamma_n \neq 0.$$

С л е д с т в и е 9. *Множество "квазисобственных" частот плоской решетки (точки к, где задача* (1) – (4) *имеет нетривиальное решение) на первом листе поверхности* К *может состоять только из тех точек к, в которых* $\Gamma_n(\kappa) = 0$.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
30 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1973, 287 с.