

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Тураев, Трехмерные гомологические сферы и зацепления с многочленом Александра I,  
*Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1982, том 122, 128–134

<https://www.mathnet.ru/zns14091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

22 мая 2025 г., 03:58:21



ТРЕХМЕРНЫЕ ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СФЕРЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ С  
МНОГОЧЛЕНОМ АЛЕКСАНДЕРА I

Одна из ключевых проблем топологии трехмерных многообразий состоит в вычислении группы  $\mathbb{Z}$  - гомотопически кобордантных трехмерных  $\mathbb{Z}$ -гомотопических сфер (с точностью до канонического изоморфизма эта группа не зависит от выбора категории  $\text{TOP}$ ,  $\text{PL}$  или  $\text{DIFF}$ ; статья написана в терминах кусочно-линейной категории). Уже давно построен эпиморфизм указанной группы на  $\mathbb{Z}/2$  - гомоморфизм Рохлина (см. [1]), но о структуре его ядра до сих пор ничего не известно - см. напр., [3, проблема 4.2]. Возможно, в частности, что это ядро тривиально, т.е. что всякая трехмерная  $\mathbb{Z}$ -гомотопическая сфера с нулевым инвариантом Рохлина ограничивает компактное ациклическое четырехмерное многообразие ( $\mathbb{Z}$  - гомотопический шар). Сходные проблемы стоят в теории ( $\text{PL}$ ) узлов и зацеплений (см. [4, стр. 310, проблема I7]): если  $V$  - четырехмерный  $\mathbb{Z}$ -гомотопический шар, то всякий ли узел в  $\partial V$  с многочленом Александера I ограничивает локально-плоский диск в  $V$ ? Всякое ли зацепление в  $\partial V$ , на компоненты которого натягиваются непересекающиеся поверхности Зейферта в  $\partial V$  и многочлен Александера которого равен I, является краем набора непересекающихся локально-плоских дисков в  $V$ ? В настоящей статье показывается, что если ядро гомоморфизма Рохлина нетривиально, то ответ на эти вопросы отрицателен. Отсюда видно, что препятствия к срезанности узлов и зацеплений могут лежать в ядре гомоморфизма Рохлина. С другой стороны, результаты статьи могут рассматриваться как шаги в направлении доказательства тривиальности этого ядра.

В дальнейшем под гомотопиями понимаются гомотопии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Если ядро гомоморфизма Рохлина нетривиально, то в крае некоторого четырехмерного гомотопического шара  $V$  существует узел рода I с многочленом Александера I, не ограничивающий локально-плоский диск ни в каком гомотопическом шаре с краем  $\partial V$  (и, в частности, в  $V$ ).

**ТЕОРЕМА 2.** Если ядро гомоморфизма Рохлина нетривиально, то для некоторого  $n \geq 1$  существует такое  $n$ -компонентное зацепление в сфере  $S^3$  с многочленом Александера I, что на его компоненты натягиваются попарно непересекающиеся поверхности Зейферта

рода I и что это зацепление не ограничивает набор из  $n$  попарно непересекающихся локально-плоских дисков ни в каком гомологическом шаре с краем  $S^3$ .

Остающаяся часть статьи посвящена доказательству теорем I и 2.

**ЛЕММА I.** Любая трехмерная гомологическая сфера с нулевым инвариантом Ролина получается из  $S^3$  перестройкой по такому  $2n$ -компонентному зацеплению с нулевым оснащением, что для некоторых поверхностей Зейферта  $F_1, \dots, F_{2n}$  его компонент выполняются следующие условия (а) и (б).

(а).  $F_i$  и  $F_j$  не пересекаются, если  $i \neq j$  и  $|i-j| \neq n$ ; если  $1 \leq i, j \leq 2n$  и  $|i-j| = n$ , то  $F_i$  и  $F_j$  пересекаются трансверсально по дуге, один конец которой лежит в  $\partial F_i \cap \text{Int } F_j$ , а другой - в  $\partial F_j \cap \text{Int } F_i$ .

(б).  $F_1, \dots, F_{2n}$  - поверхности рода I.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построение требуемого зацепления осуществляется в три этапа.

**ЭТАП I.** Хорошо известно, что трехмерная гомологическая сфера с нулевым инвариантом Ролина представляется как результат перестройки  $S^3$  по такому оснащеному зацеплению, что его матрица коэффициентов зацепления, на диагонали которой стоят числа, задающие оснащение, определяет четную гиперболическую (унимодулярную) квадратичную форму. Поскольку такая форма изоморфна прямой сумме гиперболических плоскостей, из этого зацепления с помощью операций Кирби [2] легко получается зацепление  $K_1, \dots, K_{2n}$ , удовлетворяющее следующим условиям (с) и (d).

(с). Коэффициент зацепления  $K_i$  с  $K_j$  равен 0, если  $|i-j| \neq n$ , и равен 1, если  $|i-j| = n$ .

(d). Результат перестройки  $S^3$  по  $K_1, \dots, K_{2n}$  с нулевым оснащением гомеоморфен данной гомологической сфере.

**ЭТАП 2.** Пусть  $K_1, \dots, K_{2n}$  - зацепление в  $S^3$ , удовлетворяющее условиям (с) и (d), и пусть  $F_1, \dots, F_{2n}$  - такие поверхности Зейферта соответственно узлов  $K_1, \dots, K_{2n}$  с  $\nu < 2n$ , что выполняется следующее условие ( $a_\nu$ ).

( $a_\nu$ ).  $F_i$  и  $F_j$  не пересекаются, если  $i \neq j$  и  $|i-j| \neq n$ ; если  $1 \leq i, j \leq \nu$  и  $|i-j| = n$ , то  $F_i$  и  $F_j$  пересекаются трансверсально по дуге, один конец которой лежит в  $K_i$ , а другой - в  $K_j$ ; если  $1 \leq i \leq \nu < j \leq 2n$ , то пересечение  $F_i$  с  $K_j$  состоит из одной точки в случае, когда  $j = i + n$ , и пусто в остальных случаях.

Докажем существование зацепления  $K_1, \dots, K_{2n}$  и поверхностей Зейферта узлов  $K_1, \dots, K_{\nu+1}$ , удовлетворяющих условиям (с), (d) и ( $a_{\nu+1}$ ). Так как условие ( $a_0$ ) пусто и ( $a_{2n}$ ) сов-

падает с (а), отсюда будет следовать существование зацепления и поверхностей, удовлетворяющих условиям (а) и (д). Последнее зацепление является конечным результатом этапа 2.

Пусть сперва  $\nu < n$ . Поскольку  $F_1, \dots, F_\nu$  не пересекаются с  $K_{\nu+1}$ , существует поверхность Зейфerta  $F$  узла  $K_{\nu+1}$ , пересекающаяся с  $F_i$  по нескольким дугам с концами в  $K_i$  при  $i=1, \dots, \nu$  (в действительности, любая поверхность Зейфerta узла  $K_{\nu+1}$  изотопна такой поверхности  $F$ ). Так как коэффициенты зацепления  $K_{\nu+1}$  с узлами  $\{K_j \mid j > \nu+1, j \neq \nu+1+n\}$  равны 0, можем считать, перестраивая при необходимости  $F$ , что  $F$  не пересекается с этими узлами. Аналогичным образом, можно считать, что  $F$  пересекается с  $K_{\nu+1+n}$  в одной точке. Перестроим теперь  $F_i$  при  $i=1, \dots, \nu$ : заменим регулярные окрестности в  $F_i$  компонент пересечения  $F_i$  с  $F$  лентами, параллельными  $K_{\nu+1+n}$  (см. рис. I).

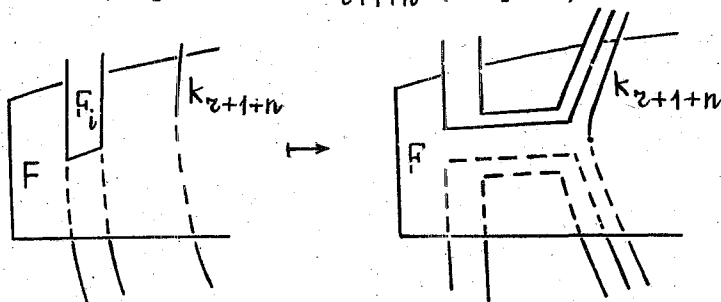


Рис. I

Эффект этой операции на  $K_i = \partial F_i$  состоит в слиянии  $K_i$  с несколькими параллелями узла  $K_{\nu+1+n}$ . Поэтому, произведя указанные перестройки так, чтобы не возникало новых пересечений, получим поверхности и зацепление, удовлетворяющие условиям (С), (д) и (а $_{\nu+1}$ ).

В случае  $\nu \geq n$  рассуждение проводится аналогичным образом со следующими изменениями: поверхность  $F$  с самого начала выбирается так, чтобы пересечение  $F$  с  $F_{\nu+1-n}$  являлось дугой с концами в  $K_{\nu+1}$  и  $K_{\nu+1-n}$ ; роль узла  $K_{\nu+1+n}$  в ходе рассуждения играет узел  $K_{\nu+1-n}$ .

ЭТАП 3. Пусть  $K_1, \dots, K_{2n}$  - зацепление в  $S^3$  и  $F_1, \dots, F_{2n}$  - поверхности Зейфerta его компонент, удовлетворяющие условиям (а) и (д). Можно считать, что роды этих поверхностей отличны от нуля: если, скажем,  $F_1$  - поверхность рода 0, т.е. диск, то зацепления  $K_1, \dots, K_{2n}$  и  $K_2, \dots, K_n, K_{n+2}, \dots, K_{2n}$  (с нулевыми оснащениями) получаются друг из друга операциями Кири (см. [2]) и, значит, последнее зацепление и поверхности  $\{F_i \mid i \neq 1, n+1\}$

удовлетворяют условиям (а) и (d). Допустим, что род  $F_i$  больше единицы. Вводя при необходимости новую нумерацию компонент зацепления, можем считать, что  $i=1$ . Пусть  $F$  — поверхность в  $S^3$  получающаяся из  $F_{n+1}$  таким малым сдвигом по нормали, что  $F$  не пересекается с  $F_i$  при  $i \neq 1$  и  $F$  пересекается с  $F_1$  трансверсально по дуге с концами в  $\partial F$  и в  $K_1$ . Пусть  $G$  и  $H$  — такие непересекающиеся компактные подмногообразия многообразия  $F_1$ , что:  $F_1$  есть ленточная сумма  $G$  и  $H$  (т.е. разность  $F_1(G \cup H)$  гомеоморфна квадрату без пары противоположных сторон); род  $G$  равен  $I$ ;  $F_1 \cap F_{n+1} \subset G$  и  $F_1 \cap F \subset H$ . Тогда края многообразий  $G$  и  $H$  связны и, как легко проверить, зацепления (с нулевыми оснащениями)  $K_1, \dots, K_{2n}$  и  $\partial G, \partial H, K_2, \dots, K_{n+1}, \partial F, K_{n+2}, \dots, K_{2n}$  получаются друг из друга операциями Кириби. Компоненты последнего зацепления ограничивают соответственно поверхности  $G, H, F_2, \dots, F_{n+1}, F, F_{n+2}, \dots, F_{2n}$ , любые две из которых пересекаются трансверсально по дуге, если их номера в этой последовательности отличаются на  $n+1$ , и не пересекаются в противном случае. Повторив описанную операцию некоторое (конечное) число раз, получим зацепление и поверхности, удовлетворяющие условиям леммы.

**ЛЕММА 2.** Любая трехмерная гомологическая сфера с нулевым инвариантом Ролина получается из  $S^3$  перестройкой по такому оснащеному зацеплению  $K_1, \dots, K_{2n}$  с нулевым оснащением компонент  $K_1, \dots, K_n$ , что для некоторых ориентированных поверхностей Зейферта  $G_1, \dots, G_n$  рода  $I$  соответственно узлов  $K_1, \dots, K_n$  выполняются следующие условия:  $G_i, \dots, G_n$  попарно не пересекаются;  $G_i$  не пересекается с  $K_j$ , если  $j \neq i, n+i$ ; для любого  $i=1, \dots, n$  пересечение ядра гомоморфизма включения  $H_1(G_i) \rightarrow H_1(S^3 \setminus \bigcup_{j \neq i, n+i} K_j)$  с правым аннулятором формы Зейферта поверхности  $G_i$  отлично от 0.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы I трехмерная гомологическая сфера с нулевым инвариантом Ролина получается из  $S^3$  перестройкой по  $2n$ -компонентному зацеплению с нулевым оснащением, на компоненты которого натягиваются поверхности Зейферта  $F_1, \dots, F_{2n}$  рода  $I$ , удовлетворяющие условию (а) леммы I. При каждом  $i=1, \dots, n$  рассмотрим простую замкнутую кривую  $\iota$  в  $F_{i+n}$ , обладающую следующими свойствами:  $\iota$  проходит через единственную точку пересечения  $F_{i+n} \cap \partial F_i$  и не пересекается с  $\text{Int } F_i$ ; коэффициент зацепления узла  $\partial F_i$  с кривой, получающейся из  $\iota$  сдвигом в  $F_{i+n} \setminus F_i$ , равен 0 (существование  $\iota$  следует из равенства  $H_1(F_{i+n} \setminus F_i) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ). Обозначим через  $K_i$  результат слияния узла  $\partial F_i$  с его собственной параллелью, пересекающей  $\iota$ , вдоль ленточки, осью которой является  $\iota$  и которая трансверсаль-

на к  $F_{i+n}$  (см. рис.2). Обозначим через  $k_{i+n}$  произвольную простую замкнутую кривую в  $F_{i+n} \setminus F_i$ , пересекающуюся с  $\iota$  трансверсально в одной точке.

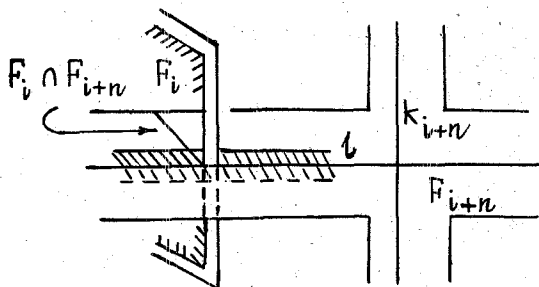


Рис.2

Снабдим  $k_i$  нулевым оснащением и снабдим  $k_{i+n}$  оснащением, определяемым нормальным расслоением  $k_{i+n}$  в  $F_{i+n}$ . Докажем, что возникающее таким образом оснащенное зацепление  $k_1, \dots, k_{2n}$  удовлетворяет условиям леммы.

Ясно, что  $k_1, \dots, k_n$  ограничивают поверхности, удовлетворяющие условиям леммы: в качестве  $G_i$  можно взять объединение упомянутой выше ленточки и цилиндра, ограничиваемого узлом  $\partial F_i$  и его параллелью; при этом пересечение, о котором идет речь в последнем условии леммы, содержит гомологический класс кривой  $\partial F_i$ . Докажем, что результаты перестроек сферы по  $k_1, \dots, k_{2n}$  и  $\partial F_1, \dots, \partial F_{2n}$  (второе зацепление с нулевым оснащением) гомеоморфны. Пусть для простоты  $n=1$  (в общем случае доказательство аналогично). Добавим к зацеплению  $k_1, k_2$  две компоненты  $m_1$  и  $m_2$ , где  $m_1$  — параллель узла  $\partial F_1$ ,  $m_2$  — ее меридиан и их оснащения нулевые. К  $k_1$  можно дважды прибавить (в смысле Кири)  $m_1$  так, чтобы результат, скажем,  $k_1$  был изотопен в  $S^3 \setminus k_2$  меридиану узла  $k_2$ , и чтобы зацепление  $k_1, k_2, m_1, m_2$  можно было получить из  $\partial F_1, \partial F_2$  аналогичной операцией — добавлением узла  $k_2$  с оснащением, указанным выше, и его меридиана с нулевым оснащением и последующим двукратным прибавлением  $k_2$  к  $\partial F_2$ . Требуемое утверждение следует из того, что при этих операциях результат перестройки сферы не изменяется с точностью до гомеоморфизма (см. [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Пусть  $M$  — трехмерная гомологическая сфера с нулевым инвариантом Рохлина, не ограничивающая гомологический шар. В силу леммы 2,  $M$  получается из сферы перестройкой по оснащеному зацеплению  $k_1, \dots, k_{2n}$ , удовлетворяющему условиям этой леммы. При  $i=0, 1, \dots, n$  обозначим через  $M_i$  результат

перестройки  $S^3$  по оснащеному зацеплению  $K_1, \dots, K_i, K_{i+1}, \dots, K_{n+i}$  (в частности,  $M_0 = S^3$  и  $M_n = M$ ). Легко проверить, что  $M_i$  является гомологической сферой. Поскольку  $M_0$  ограничивает гомологический шар, а  $M_n$  не обладает этим свойством, найдется такое  $i = 1, \dots, n$ , что  $M_{i-1}$  ограничивает гомологический шар, а  $M_i$  - не ограничивает. Тогда узел  $K_i$  в  $M_{i-1}$  удовлетворяет условиям теоремы 1: если  $G_1, \dots, G_n$  - поверхности Зейферта узлов  $K_1, \dots, K_n$  в  $S^3$ , удовлетворяющие условиям леммы 2, то, во-первых, можно считать, что  $G_i \subset M_{i-1}$  и, значит,  $K_i$  - узел рода 1 в  $M_{i-1}$  и, во-вторых, форма Зейферта поверхности  $G_i$  в  $M_{i-1}$  имеет нетривиальный правый аннулятор, и потому многочлен Александра узла  $K_i$  в  $M_{i-1}$  равен 1. Если  $K_i$  ограничивает локально плоский диск в гомологическом шаре с краем  $M_{i-1}$ , то многообразие, получающееся из этого шара вырезанием открытой регулярной окрестности этого диска и пристройкой индекса 2 по  $K_{i+n}$  является гомологическим шаром с краем  $M_i$ , что противоречит выбору  $i$ .

Аналогичным образом доказывается, что зацепление  $K_1, \dots, K_n$  удовлетворяет условиям теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Когда эта работа была уже закончена, автор получил препринт А.Кассона и М.Фридмана "Atomic Surgery Problems", существенно перекрывающий результаты данной работы. Они доказали, что основные проблемы хирургии четырехмерных многообразий, такие, как проблема точности последовательности Сулливана, проблема нетривиальности ядра гомоморфизма Рохлина и др., могут быть сведены к вопросу о срезанности некоторых явно строящихся зацеплений в  $S^3$  с многочленом Александра 1. В отличие от настоящей работы, опирающейся на исчисление зацеплений Кирби, Кассон и Фридман используют существенно более сложный метод глубоких ручек Кассона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H i r z e b r u c h F., N e u m a n n W.D., K o h S.S. Differentiable manifolds and quadratic forms. - Lect. notes in pure and applied math. 1971, v.4.
2. K i r b y R. A calculus for framed links in  $S^3$ . - Invent. Math. 1978, 45, N 1, 35-56.
3. K i r b y R. Problems in low dimensional manifold theory. - Proc.Symp.Pure Math. 1978, v.32, part.2, 273-312.
4. Knot Theory, Lect.Notes in Math.685, 1978.

Turaev V.G. 3-dimensional homology spheres and links with Alexander polynomial 1.

The paper establishes a relationship between two key problems of 3-dimensional topology: (a) the sliceness problem for knots and links with Alexander polynomial  $\Delta=1$  and (b) the triviality problem for the kernel of the Rochlin homomorphism  $R$  from the group of  $\mathbb{Z}$ -homologically cobordant  $\mathbb{Z}$ -homology

3-spheres onto  $\mathbb{Z}/2$ . The following statements are proved: If  $\text{Ker } R \neq 0$  then there exist a homology 4-ball  $V$  and a knot  $K$  of genus 1 in  $\partial V$  with  $\Delta=1$  such that  $K$  does not bound a locally flat disc in any homology 4-ball  $V'$  with  $\partial V' = \partial V$ . If  $\text{Ker } R = 0$  then there exists a boundary link in  $S^3$  with  $\Delta=1$  which does not bound a set of nonintersected locally flat discs in any homology ball bordered by  $S^3$ . These results suggest that obstructions to sliceness of knots and links may lie in  $\text{Ker } R$ . On the other hand it is possible that  $\text{Ker } R = 0$  and the present results might be used in a proof of this equality.