Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. На новом сайте «Разговоры.ru» зарегистрировались 2000 человек. Каждый из них пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

А.Эвнин

7. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты – не равны?

Н.Авилов

8. Двести гирек массой 1 г, 2 г, ..., 200 г разложили на две чаши весов так, что любые две гири с разницей масс 100 г попали на разные чаши и любые две гири с суммой масс 201 г тоже попали на разные чаши. При этом весы оказались в равновесии. Затем с каждой чаши убрали все гири четной массы. Докажите, что весы снова будут в равновесии.

В.Произволов

9. Найдутся ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}$?

М.Мурашкин

10. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

Каждый год в конце июня увлеченные математикой школьники собираются в красивом месте Костромской области, чтобы соревноваться в решении задач. Турнир носит имя Анатолия Павловича Савина, основателя конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант». Благодаря конкурсу в 1993 году и возник этот турнир математических боев. Организаторы турнира – журнал «Квант» и образовательная программа «Большая перемена» (руководитель Г.В. Кондаков).

Этим летом команды съехались на 7 дней (с 26 июня по 2 июля 2009 года) под город Судиславль на живописную базу отдыха «Берендеевы Поляны». Многие ребята приехали сюда гораздо раньше – они учились в летней математической школе, которая началась 11 июня, после которой решили остаться на турнир.

В нынешнем году друг с другом играли команды 6–8 классов: 8 команд 6 классов, 12 команд 7 классов и 8 команд 8 классов. Школьники приехали из Москвы, Санкт-Петербурга, Иванова, Костромы, Тамбова и Черноголовки. Команда Тамбова была приглашена на турнир как победитель конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант».

В день заезда (25 июня) сразу была проведена оживленная математическая игра «Магический квадрат». Победителями стали команды «Фрактал» (6 класс, Санкт-Петербург), «Интеллектуал» (7 класс, Москва) и «218-Б» (8 класс, Москва).

На следующий день прошла устная командная олимпиада, по результатам которой команды были разделены на лиги по классам, при этом 7 класс был разбит на две лиги. Далее в каждой лиге проходили математические бои. Последний день турнира – финальные бои, которые определили победителей в каждой лиге.

В лиге 8 классов первое место заняла команда «Москва-Юг». Ее собрала Т.П. Зорина в июньской летней математической школе 2008 года. За год с небольшим ребята выиграли разные турниры, включая этот турнир в прошлом году. В высшей лиге 7 классов лучшей стала команда кружка МЦНМО под руководством А.В. Спивака. Лучшие шестиклассники – ребята из кружка «Фрактал» Санкт-Петербурга, их преимущество оказалось ощутимым и во время боев, и во время командной олимпиады. Лучшей во второй лиге 7 классов стала команда школы 82 из Черноголовки Московской области. Ниже в таблице приведен список всех команд-призеров турнира.

В один из дней турнира участники отдохнули от боев – прошла личная олимпиада. В каждой параллели проводилось свое состязание со своими задачами.

В 6 классе за решение всех задач «гран-при» получил *Андрей Волгин* (команда МЦНМО), а диплом I степени выиграл костромич *Иван Петренко.* Лучшим семиклассником стал *Никита Сопенко* (команда Тамбова), лучшим восьмиклассником – *Михаил Артемьев* (гимназия 1543, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: *Семен Верченко* (8 класс, гимназия 1543), *Мария Сандрикова* (8 класс, ЦО 218),

Лига	*Диплом*	*Команда*	*Капитан*	*Руководитель*
Высшая 8	*I степени*	*Москва-Юг*	*Ф.Лященко*	*Т.П.Зорина*
Высшая 8	*II степени*	*Гимназия 1514, Москва*	*А.Понфиленко*	*О.Р.Горская*
Высшая 8	*II степени*	*Лицей 14, Тамбов*	*Н.Сопенко*	*А.В.Бурмистрова*
Высшая 8	*III степени*	*ЦО 218, Москва*	*М.Сандрикова*	*А.Д.Блинков*
Высшая 8	*III степени*	*Гимназия 1543, Москва*	*М.Артемьев*	*А.В.Хачатурян*
Высшая 7	*I степени*	*МЦНМО, Москва*	*Т.Левинсон*	*А.В.Спивак*
Высшая 7	*II степени*	*Сборная Костромы*	*Р.Цветников*	*Д.А.Калинин*
Высшая 7	*II степени*	*Интеллектуал, Москва*	*Ю.Гребенникова*	*Н.М.Нетрусова*
Высшая 7	*III степени*	*Гимназия 1543, Москва*	*Ю.Котельникова*	*И.В.Раскина*
Высшая 7	*III степени*	*Гимназия 1514, Москва*	*Т.Степанов*	*Т.В.Житникова*
Высшая 6	*I степени*	*Фрактал, Санкт-Петербург*	*Е.Цейтина*	*А.П.Погода*
Высшая 6	*II степени*	*Воробьевы Горы, Москва*	*И.Гущенко-Чеверда*	*Т.П.Зорина*
Высшая 6	*II степени*	*ЦО 218, Москва*	*А.Зерцалов*	*Ю.А.Блинков*
Высшая 6	*III степени*	*Квантик, Москва*	*В.Волков*	*И.А.Николаева*
Высшая 6	*III степени*	*Горные Воробьи, Москва*	*А.Мельник*	*Т.П.Зорина*
Первая 7	*I степени*	*Школа 82, Черноголовка*	*А.Потапов*	*Л.Н.Головко*
Первая 7	*II степени*	*Школа 179, Москва*	*И.Пантелеева*	*А.Ю.Юрков*

Юлия Гребенникова (7 класс, «Интеллектуал»), *Максим Хабаров* (7 класс, школа 30, Санкт-Петербург), *Алексей Быстров* (6 класс, Кострома), *Степан Каргальцев* (6 класс, ЦО 218), *Никита Уваров* (6 класс, гимназия 1543) и *Михаил Ягудин* (6 класс, команда МММФ).

Дипломами III степени награждены *Алексей Виноградов* (8 класс, гимназия 1514), *Анна Добровольская* (8 класс, гимназия 1514), *Лев Синяков* (8 класс, «Москва-Юг»), *Петр Мельниченко* (7 класс, ЦО 218), *Богдан Славов* (7 класс, школа 179), *Марина Хачатурян* (7 класс, гимназия 1543), *Иван Буренев* (6 класс, «Фрактал»), *Андрей Зерцалов* (6 класс, ЦО 218), *Дарья Лебедева* (6 класс, «Фрактал»), *Сергей Полевой* (6 класс, «Москва-Юг») *и Павел Шевчук* (6 класс, «Горные Воробьи»).

Помимо этого, многие ребята были поощрены дипломами за успешное участие и похвальными грамотами.

В часы, свободные от основных соревнований, участники олимпиады слушали лекции по математике, которые читали А.В.Спивак, С.И.Токарев, А.Б.Скопенков, А.В.Шаповалов, А.А.Заславский, С.Г.Волченков. Но развлечения были не только математические. Никогда не пустовали футбольное поле и волейбольная площадка. По вечерам проходили интеллектуальные игры, которые проводили Н.М.Нетрусова и А.В.Хачатурян. Очень интересные путешествия-экскурсии организовывала Т.П.Зорина, которая давно увлекается историей Судиславля и окрестных земель и теперь стала, наверное, самым лучшим экскурсоводом по этому древнему городу.

Более подробную информацию о результатах турнира и фотографии можно посмотреть на сайте

http://kostroma-open.info/20090626.html

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия под руководством Александра Васильевича Шаповалова. В нее вошли А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, Н.Т.Гребеник, Е.С.Горская, С.А.Дориченко, А.А.Заславский, Д.А.Калинин, Т.В.Караваева, П.В.Мартынов, К.А.Матвеев, Д.В.Прокопенко, И.В.Раскина, А.Б.Скопенков, К.А.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов. Существенный вклад в работу комиссии внесли руководители команд. Книги и другие призы для победителей предоставили журнал «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения (директор С.И.Комаров).

По традиции, идущей еще от первых турниров, в турнире было заявлено много новых авторских задач. Из них мы постарались выбрать такие, где из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость. После номера каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит.

Избранные задачи турнира

1 (7–8). У трех братьев Антона, Бори и Васи дни рождения совпадают. Оказалось, что когда Антону исполнится 12 лет, сумма возрастов двух других братьев разделится на 12 без остатка. То же самое случится, когда 12 лет исполнится Боре. Докажите, что так же будет, когда 12 лет исполнится Васе.

А.Шаповалов

2 (7). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно BD, пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $BK = 2CD$.

Фольклор

3 (7–8). Три сталкера дошли до Каменной Аномалии. Оттуда к кладу ведет тропа длиной 100 м. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и что такая же участь ждет и второго. Оба оживут в тот момент, когда третий будет идти по тропе и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 м. Могут ли сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

А.Блинков, И.Раскина

4 (8). Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A, B и C. Известно, что центр одной окружности лежит на прямой AP, а центр другой – на прямой BP. Докажите, что центр третьей окружности лежит на прямой CP.

Б.Френкин

5 (8). Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 2009 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе?

А.Шаповалов

6 (8). На клетчатой бумаге нарисован 222-угольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток может состоять этот многоугольник?

А.Шаповалов

7 (6–8). По кругу стоят лжецы и рыцари, всего 100 человек. В первый раз каждого спросили «Верно ли, что твой сосед справа – лжец?» Двое ответили «да», остальные – «нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева через одного – лжец?» И снова двое ответили «да», остальные – «нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя – лжец?» Сколько человек на этот раз ответят «да»?

А.Шаповалов

8 (7–8). Найдите наименьшее натуральное число, записываемое одинаковыми цифрами и делящееся на 2009.

С.Токарев

9 (8). Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а все стороны четырехугольника различны.

А.Заславский

10 (7–8). Можно ли разбить квадрат 20×20 на доминошки 1×2 так, чтобы каждая граничила по отрезку с нечетным числом других доминошек?

А.Шаповалов

11 (7–8). На доску выписаны через запятую числа 1, 2, 3, ..., 2009. Двое играющих по очереди заменяют какую-нибудь запятую на + или $\times$ (умножить). Если после замены всех запятых результат будет четным, выигрывает первый, если нечетным – второй. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

12 (7–8). Десять ребят на лужайке играют в пейнтбол. Сначала каждый выстрелил краской в ближайшего к себе. (Если игроков, расположенных ближе всего к стреляющему, несколько, то он стреляет в любого из них.) Затем каждый выстрелил в наиболее удаленного от себя (если таковых несколько – то в любого из них). Какое наибольшее число порций краски могло в итоге попасть в одного игрока?

С.Токарев

13 (7–8). В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите $\angle ABC$, если $\angle BAC = 30°$, а $\angle BMC = 45°$.

С.Токарев

14 (7–8). Можно ли все натуральные числа от 1 до 200 выписать по кругу так, чтобы для любых двух соседних чисел хотя бы одно отличалось от другого на целое число процентов?

И.Акулич

15 (7–8). Назовем *разносторонностью* треугольника отношение его наибольшей стороны к наименьшей, а *разноугольностью* – отношение его наибольшего угла к наименьшему. Петя уверен, что чем больше разносторонность треугольника, тем больше его разноугольность. Прав ли он?

И.Акулич

16 (7–8). На доске нарисован неравнобедренный треугольник. Имеется угольник той же формы, выпиленный из фанеры. Угольник можно прикладывать к доске (в том числе к уже начерченным прямым и точкам) и чертить линии по его краю. Всегда ли можно построить какую-нибудь из высот нарисованного треугольника?

А.Блинков, Ю.Блинков

17 (8). На столе лежат 10 кусков сыра. Петя съедает самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из оставшихся на столе кусков на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия – разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока не съест 9 кусков. Докажите, что Петя съест не более половины сыра (по весу).

А.Шаповалов

18 (8). Измерив длины сторон и высот некоторого треугольника, Таня получила 6 различных чисел и записала их на 6 карточках. Перетасовав карточки, она выслала их Боре. Всегда ли сможет Боря выбрать из них три карточки, на которых выписаны длины сторон?

Б.Френкин

19 (6–8). Есть 63 одинаковые с виду монеты, одна из них – фальшивая, она легче настоящей. Есть чашечные весы без гирь, у которых правая чаша вымазана краской. Как за 5 взвешиваний выявить фальшивую монету, если монеты, побывавшие на правой чаше, нельзя после этого класть на левую?

А.Шаповалов

20 (8). В классе 32 человека. Каждый из них назвал два числа: количество его одноклассников с таким же ростом, но другим весом, и количество его одноклассников с таким же весом, но другим ростом. Среди названных чисел встретились все числа от 0 до 10. Докажите, что в этом классе можно выбрать двух человек с одинаковым ростом и одинаковым весом.

К.Матвеев, А.Шаповалов

21 (8). Решите систему

$$\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z, \\ y^5 + z^3 = 2x, \\ z^5 + x^3 = 2y. \end{cases}$$

В.Сендеров

22 (8). На доске написаны два выражения: $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$. Играют двое, они по очереди заменяют x, y и z в выражениях натуральными числами (вначале первый игрок заменяет x, затем второй – y, и наконец первый – z). Первый игрок хочет, чтобы в итоге оба выражения делились на 101, а второй пытается помешать этому. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его противник?

В.Сендеров, И.Богданов

Публикацию подготовили
Д.Калинин, А.Шаповалов