N. A. Shirokov, Polynomial D-approximations that exponentially decrease strictly inside a continuum,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 6, 154–184

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 6

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ D-ПРИБЛИЖЕНИЯ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ СТРОГО ВНУТРИ КОНТИНУУМА[1]

Н. А. Широков

Для выпуклых континуумов, отличных от отрезка, и классов Гёльдера аналитических функций на них построено полиномиальное D-приближение, обладающее строго внутри континуума экспоненциальной скоростью убывания остатка; для континуумов с C^2-гладкой границей построено полиномиальное приближение аналитических функций из классов Гёльдера с равномерной, как в теореме Джексона–Бернштейна, оценкой остатка на границе и экспоненциальной строго внутри; для областей, удовлетворяющих условию β-сектора, построено полиномиальное D-приближение с остатком, убывающим строго внутри, как $e^{-cn^{\beta/2}}$.

§0. История вопроса и описание работы

Пусть K-континуум на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(K)$ — класс функций, аналитических во внутренности K и непрерывных на K. Вопрос о приближении функций из $A(K)$ аналитическими полиномами имеет очень давнюю историю, на протяжении которой несколько раз ставились принципиально новые проблемы и поиски их решения приводили к появлению еще одной ветви теории аппроксимации. Если ограничиться в ретроспективе в качестве отправного пункта классической теоремой С. Н. Мергеляна [1], утверждающей, что всякая функция из $A(K)$ для континуума K, не разбивающего плоскости, лежит в замыкании в равномерной метрике аналитических полиномов, то следующий принципиальный шаг был сделан В. К. Дзядыком [2, 3] в конце 50-х — начале 60-х годов, когда выяснилось, что для конструктивного описания таких естественных подклассов $A(K)$, как классы Гёльдера, существенно ввести неравномерную шкалу приближения на границе $\Gamma = \partial K$, причем определился и специфический масштаб этой неравномерности (см. [4], гл. 9, §2; в настоящей работе определения будут даны ниже). В последующем изложении специальное неравномерное, вообще говоря, приближение, ведущее происхождение от В. К. Дзядыка, называем D-приближением.

Ключевые слова: классы Гёльдера аналитических функций, полиномиальное приближение, D-приближение.

[1]Эта работа была поддержана стипендией Джорджа Сороса 1993 г., назначенной автору Международным научным фондом и Академией естественных наук.

Если рассматривать приближение аналитической в области функции полиномом как очень отдаленный, но все же аналог приближения ее отрезком разложения в ряд Тейлора, то, например, если функция задана в круге, строго внутри него, приближение может убывать со скоростью e^{-cn}, где n — длина отрезка ее ряда Тейлора. Для континуумов, отличных от круга, положение далеко не столь наглядно.

Впервые на возможность существенного улучшения скорости D-приближения строго внутри достаточно произвольного континуума обратил внимание автор [5], обнаружив возможность убывания остатка со скоростью cn^{-M}, где M — произвольное, но фиксированное число, n — степень приближающего полинома. Понятно, что такая скорость существенно уступает экспоненциальному убыванию, возможному внутри круга. Далее, Сафф и В. Тотик [6] доказали, что для континуума, ограниченного аналитической кривой, строго внутри возможно экспоненциально быстрое приближение, как и в случае круга, при квазинаилучшем, т.е. отличающемся от наилучшего равномерного не более чем на постоянный множитель, приближения на границе. Сравнение двух приведенных результатов делает естественным вопрос о возможной скорости приближения строго внутри континуума при условии D-приближения или квазинаилучшего равномерного приближения на границе.

Если граница $\Gamma = \partial K$ содержит пару отрезков, образующих внешний по отношению к континууму угол раствора $\pi\beta$, $0 < \beta < 1$, а в остальном достаточно гладкая, то в работе автора и В. Тотика [7] установлено, что остаток приближения строго внутри K не может быть меньше $e^{-cn^{\beta}}$, n — степень приближающего полинома, при квазинаилучшем приближении на $\Gamma = \partial K$. Принципиальным здесь оказывается то обстоятельство, что для невыпуклых областей с углами экспоненциальная скорость приближения внутри невозможна. В работе В. В. Маймескула [8] оценка автора и В. Тотика усилена: при только что сформулированном условии на K невозможно приближение внутри со скоростью $e^{-cn^{\gamma}}$, $\gamma = \frac{\beta}{2-\beta}$.

Далее, в той же работе В. В. Маймескула доказаны и первые утверждения о возможности полиномиального приближения внутри со скоростью $e^{-cn^{\gamma}}$, $0 < \gamma < 1$, при квазинаилучшем равномерном приближении на границе. В частности, для выпуклых континуумов получилась скорость приближения внутри $e^{-cn^{\sigma}}$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$; для континуумов, удовлетворяющих условию β-сектора (как, например, для обсуждавшихся в предыдущем абзаце), — скорость $e^{-cn^{\gamma}}$, $\gamma < \frac{\beta}{2}$ (более подробно об этом см. в замечаниях в конце гл. 1). Для D-приближений не было известно ни одного результата о возможном приближении внутри лучшем, чем cn^{-M}.

В данной работе доказывается, что для выпуклых континуумов K возможно D-приближение на границе и приближение с оценкой e^{-cn} строго внутри. Построение приближающих полиномов потребовало привлечения ряда новых соображений, в частности применения описания модулей гладких вплоть до границы аналитических функций, введенного автором (см. [9], гл. 2). Кроме того, D-приближение, которое является равномерным с определенной оценкой остатка для достаточно гладких границ, оказалось возможным совместить с экспоненциальным убыванием остатка для континуумов с C^2-гладкой границей. Для континуумов, удовлетворяющих условию β-сектора, удаются одновременное D-приближение на границе и приближение со скоростью $e^{-cn^{\beta/2}}$ внутри.

Применяя соображения, излагаемые в настоящей работе, и некоторые многомерные построения [10, 11], можно установить, что для строго выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$ с C^2-гладкой границей возможны равномерное приближение на границе, как в теореме Джексона–Бернштейна, и приближение строго внутри с экспоненциальной оценкой. Доказательство многомерного разделения в данной статье не приводится.

Работа построена следующим образом. В п. 1 содержатся необходимые определения и формулировки, п. 2–7 включают подготовительный материал, содержание каждого пункта отражено в соответствующем заголовке. Доказательства теорем заканчиваются соответственно в п. 8–10.

Через $\mathbb{D}$ обозначаем единичный круг, $\mathbb{D} = \{ z : |z| < 1 \}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$; соотношение $f(\dots) \asymp g(\dots)$ означает для положительных функций f и g выполнение двух неравенств $c_1 f(\dots) \leqslant g(\dots) \leqslant c_2 f(\dots)$, где c_1 и c_2 не зависят от существенных в каждом конкретном случае параметров; $\operatorname{int}\gamma$ означает внутренность жордановой кривой γ. В номере формулы (a.b) a — номер пункта.

§1. Формулировка основных результатов

Пусть K — ограниченный континуум на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не разбивающий плоскость, $\Gamma = \partial K$, $g(\xi)$ — функция Грина области $\mathbb{C}\setminus K$ с логарифмическим полюсом в бесконечности, $\Gamma_h = \{ \xi \in \mathbb{C}\setminus K : g(\xi) = h \}$, $h > 0$, $\rho_h(z) = \operatorname{dist}(z, \Gamma_h)$. Через $\Lambda^\alpha(K)$, α — нецелое, обозначаем класс функций f, аналитических во внутренности $\overset{\circ}{K}$ и удовлетворяющих на K условию Гёльдера порядка α (если $0 < \alpha < 1$, то должно выполняться $|f(z) - f(\xi)| \leqslant c_f |z - \xi|^\alpha$, $z, \xi \in K$; если $r < \alpha < r + 1$, то $f \in \Lambda^\alpha(K) \Leftrightarrow f^{(r)} \in \Lambda^{\alpha - r}(K)$). Для функции $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{C}$, полагаем $E_n(f; K) = \inf \|f - p_n\|_{C(K)}$, где inf берется по полиномам от z степени $\leqslant n$. Далее, будем говорить, что последовательность полиномов p_n, $\deg p_n \leqslant n$, осуществляет для функции $f \in \Lambda^\alpha(K)$ D-приближение на K, если выполняются соотношения

$$|f(z) - p_n(z)| \leqslant c_f \rho_{\frac{1}{n}}^{\alpha}(z), \quad z \in \Gamma, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

Подчеркнем, что если граница Γ континуума K достаточно гладкая (например, C^2-гладкая), то $\rho_{\frac{1}{n}}(z) \asymp \frac{1}{n}$ при $z \in \Gamma$ и D-приближение (1.1) принимает вид

$$|f(z) - p_n(z)| \leqslant c_f \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \quad z \in \Gamma. \tag{1.1$'$}$$

Последовательность полиномов q_n, $\deg q_n \leqslant n$, назовем последовательностью квазинаилучшего приближения функции f на континууме $K \subset \mathbb{C}^n$, если справедливы оценки

$$\|f - q_n\|_{C(K)} \leqslant c_f E_n(f; K), \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — выпуклый ограниченный континуум, не сводящийся к отрезку, S, $S \subset K$ — компакт, лежащий строго внутри K, функция $f \in \Lambda^\alpha(K)$, α — нецелое. Существуют постоянная $c_0 = c_0(K,S)$ и последовательность полиномов $\{p_n\}$, осуществляющая для f D-приближение* (1.1) *на K такие, что*

$$|f(z) - p_n(z)| \leqslant c_f e^{-c_0 n}, \quad z \in S. \tag{1.3}$$

Для C^2-гладких и строго выпуклых областей теорема 1 справедлива и в $\mathbb{C}^n$. Именно, пусть $\rho(z_1,\dots,z_N)$ — C^2-гладкая вещественная функция в $\mathbb{C}^n$, $\Omega = \{(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{C}^N : \rho(z_1,\dots,z_N) < 0\}$, причем $\operatorname{grad}\rho(Z) \neq 0$, $Z \in \partial\Omega$.

Назовем область Ω строго выпуклой, если квадратичная форма

$$H(Z)(W) = \sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2\rho(Z)}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k + \frac{\partial^2\rho(Z)}{\partial \bar z_j \partial \bar z_k} \bar w_j \bar w_k + 2\frac{\partial^2\rho(Z)}{\partial z_j \partial \bar z_k} w_j \bar w_k\right),$$

$Z = (z_1,\dots,z_N)$, $W = (w_1,\dots,w_N)$, положительно определена при $Z \in \bar\Omega$. В этом случае для $f \in \Lambda^\alpha(\Omega)$ имеем $E_n(f;\Omega) \leqslant c_n^{-\alpha}$ (см. [10, 11]).

Теорема 1′. *Пусть Ω — C^2-гладкая строго выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, $N > 1$, $S \subset \mathring{\Omega}$ — компакт, лежащий строго внутри Ω, функция $f \in \Lambda^\alpha(\Omega)$. Существуют постоянная $c_1 = c_1(\Omega, S, N) > 0$ и последовательность полиномов $\{q_n\}$ квазинаилучшего приближения, удовлетворяющих условию*

$$|f(Z) - q_n(Z)| \leqslant c_f e^{-c_1 n} E_n(f;K), \quad Z \in S.$$

Замкнутую жорданову кривую L назовем A-кривой, если для любых точек z_1, $z_2 \in L$ наименьшая из длин дуг между z_1 и z_2 не превосходит $A|z_1 - z_2|$, континуум K назовем A-континуумом, если $\Gamma = \partial K$ является A-кривой. Будем говорить, что континуум K удовлетворяет условию β-сектора, $0 < \beta < 1$, если для любой точки $z_0 \in \partial K$ существует круговой сектор радиуса $h_0 > 0$, не зависящего от z_0, и раствора $\pi\beta$, внутренность которого лежит вне K.

Теорема 2. *Пусть K — A-континуум, удовлетворяющий условию β-сектора, $0 < \beta < 1$, $f \in \Lambda^\alpha(K)$, компакт $S \subset K$ лежит строго внутри K. Существуют постоянная $c_2 = c_2(K,S,\beta) > 0$ и последовательность полиномов $\{p_n\}$ D-приближения* (1.1) *функции f на K, для которых выполнены соотношения*

$$|f(z) - p_n(z)| \leqslant c_f e^{-c_2 n^{\frac{\beta}{2}}}, \quad z \in S. \tag{1.4}$$

Теорема 3. *Пусть K-континуум, ограниченный C^2-гладкой жордановой кривой, S, $S \subset K$ — компакт строго внутри K, функция $f \in \Lambda^\alpha(K)$. Существуют постоянная $c_3 = c_3(K,S) > 0$ и последовательность полиномов p_n D-приближения* (1.1), *для которых выполнено*

$$|f(z) - p_n(z)| \leqslant c_f e^{-c_3 n}, \quad z \in S'. \tag{1.5}$$

Замечания

К теореме 1. В. В. Маймескул [8] для выпуклого континуума K и функций $f \in A(K)$ установил наличие последовательности полиномов квазинаилучшего в смысле (1.2) приближения $\{q_n\}$, для которых выполняется $|f(z) - q_n(z)| \leqslant c(\varepsilon)E_n(f)e^{-cn^{1/2-\varepsilon}}$.

К теореме 1′. Экспоненциальная скорость приближения полиномами голоморфных функций на множествах в $\mathbb{C}^N$ исследовалась в работе Сичака [12]. При этом предполагалось, что функция голоморфна в фиксированной окрестности множества K.

К теореме 2. В работе В. В. Маймескула [8] доказано, что для области K, удовлетворяющей условию β-сектора, $0 < \beta < 1$, и функции $f \in A(K)$, можно найти последовательность полиномов квазинаилучшего приближения, которые строго внутри приближают со скоростью $c(\varepsilon)E_n(f; K)e^{-cn^{\beta/2-\varepsilon}}$.

К теореме 3. В. Тотик и Е. Сафф [6] доказали, что для континуума K, ограниченного аналитической кривой, и функции $f \in A(K)$ можно найти полиномы квазинаилучшего приближения, которые строго внутри приближают со скоростью $c_f E_n(f; K)e^{-cn}$.

Постоянные c, c_j в показателях экспонент в формулировках теорем и замечаниях зависят от положения точки внутри континуума K.

§2. Оценка некоторых полиномов в норме Λ^α

Для доказательства теорем 1–3 очень существенным оказывается такое свойство полиномов, впервые употребленное в работах [13] и [14], как их ограниченность в норме $\Lambda^\alpha(K)$ в случае приближения функций из этого класса. Хотя набросок доказательства имеется в [15], приведем полное рассуждение для замкнутости изложения.

Введем необходимые обозначения. Пусть K — некоторый A-континуум, функция φ отображает $\mathbb{C}\backslash K$ на внешность единичного круга $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$, ψ — обратное отображение. Пусть, далее, $R > 1$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}$,

$$\xi_{R\theta} = \xi_{R,\theta}(\xi) = \psi(Re^{-i\theta}\varphi(\xi)), \quad \xi_R = \xi_R(\xi) = \xi_{R,0}(\xi), \tag{2.1}$$

и пусть

$$J_{m,n}(\theta) = \gamma_{m,n}\left(\frac{\sin[\frac{n}{m}]\theta}{\sin\theta}\right)^m,$$

постоянная $\gamma_{m,n}$ выбрана из соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)d\theta = 1.$$

Наконец, для функции $f \in A(K)$ полагаем $R = 1 + \frac{1}{n}$ и

$$p_n(f; m, k)(z) = \int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^{j-1}}{(\xi_{R,\theta}-z)^j}f(\xi)d\xi\right)d\theta, \quad z \in \mathring{K}.$$

Лемма 1. *Пусть K — A-континуум, $r < \alpha < r+1$, $r \geqslant 0$, $f \in \lambda^\alpha(K)$. Тогда при $k > k_0(A)$, $m > m_0(A)$ справедлива оценка*

$$|p_n^{(r+1)}(f; m, k)(z)| \leqslant c\,\mathrm{dist}^{\alpha-r-1}(z, \Gamma), \quad z \in \mathring{K}, \tag{2.2}$$

постоянная c не зависит от n и z.

Доказательство. Прежде всего учтем [13, 14], что

$$\begin{aligned} f(z) - p_n(f; m, k)(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k}{(\xi_{R,\theta}-z)^k(\xi-z)}f(\xi)d\xi\right)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k}{(\xi_{R,\theta}-z)^k(\xi-z)}\left(f(z)+f'(z)(\xi-z)+\ldots\frac{f^{(r)}(z)}{r!}(\xi-z)^r\right)\right]d\theta \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k}{(\xi_{R,\theta}-z)^k(\xi-z)}\left(\frac{1}{r!}\int_{z}^{\xi}(\xi-\tau)^r f^{r+1}(\tau)d\tau\right)d\xi\right]d\theta \\ &= \mathrm{Term}_1(z) + \mathrm{Term}_2(z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Дальнейшая стратегия доказательств леммы будет состоять в дифференцировании каждого слагаемого в (2.3) и получении соответствующей оценки. При этом нам потребуется вспомогательный результат о расстояниях до линий уровня. Кривая $\Gamma = \partial K$ является A-кривой и, следовательно, квазиконформна [16], поэтому определено квазиконформное отражение области $\mathbb{C}\setminus K$ через кривую Γ (см. [16], гл. 4). Это квазиконформное отражение удовлетворяет условию Липшица [16], гл. 4, в некоторой окрестности кривой Γ.

Сублемма 1.1 (см. [17], лемма 10). *Пусть Γ — замкнутая квазиконформная кривая, ограничивающая континуум K, Γ_h определено в §1, $\tilde{\Gamma}_h$ — квазиконформное отражение Γ_h через кривую Γ, $\tilde{K}_h$ — континуум, ограниченный $\tilde{\Gamma}_h$. Пусть, далее, $\tilde{\rho}_H(z; h)$ определено для континуума $\tilde{K}_h$ в §1, и пусть для точки $z \in \tilde{\Gamma}_h$ точка $z_0 \in \Gamma$ — ближайшая к ней точка на Γ. Тогда с некоторыми постоянными A_1 и A_2, зависящими только от Γ (но не от z или h) выполнено*

$$A_1\rho_h(z_0) \leqslant \tilde{\rho}_h(z; h) \leqslant A_2\rho_h(z_0). \tag{2.4}$$

Теперь

$$f^{(r+1)}(z) - p_n^{(r+1)}(f; m, k)(z) = \mathrm{Term}_1^{(r+1)}(z) + \mathrm{Term}_2^{(r+1)}(z).$$

Оценка $\mathrm{Term}_1^{(r+1)}(z)$. Ясно, что $\mathrm{Term}_1^{(r+1)}(z)$ есть сумма с постоянными коэффициентами выражений вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k}{(\xi_{R,\theta}-z)^k(\xi-z)}\right]_z^{(\lambda)} f^{(l+\mu)}(z)((\xi-z)^l)^{(\nu)}d\xi\right\}d\theta,$$

где $\lambda+\mu+\nu=z+1$, $r\geqslant l\geqslant 0$, т.е. достаточно оценить выражения вида

$$T(z)=\int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k(\xi-z)^{l-\nu}}{(\xi_{R,\theta}-z)^{k+\lambda_1}(\xi-z)^{1+\lambda_2}}f^{(l+\mu)}(z)d\xi\right]d\theta, \tag{2.5}$$

где λ_1, λ_2, μ, l, $\nu\geqslant 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\mu+\nu=r+1$, $l\geqslant\nu$. Далее,

$$\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k(\xi-z)^{l-\nu}}{(\xi_{R,\theta}-z)^{k+\lambda_1}(\xi-z)^{1+\lambda_2}}d\xi=\int_{\Gamma_2}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k(\xi-z)^{l-\nu}}{(\xi_{R,\theta}-z)^{k+\gamma_1}(\xi-z)^{1+\lambda_2}}d\xi.$$

Поскольку при $z\in K$, $\xi\in\Gamma_2$ имеем $|\xi-z|\geqslant c$, $|\xi_{R,\theta}-z|\geqslant c$, $|\xi_{R,\theta}-\xi|\leqslant c(\frac{1}{n}+|\theta|)$, то с учетом вида $J_{m,n}(\theta)$ имеем

$$\int_{\pi}^{-\pi} J_{m,n}(\theta)\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^k(\xi-z)^{l-\nu}}{(\xi_{R,\theta}-z)^{k+\lambda_1}(\xi-z)^{1+\lambda_2}}d\xi\right|d\theta\leqslant c\frac{1}{n^k}. \tag{2.6}$$

Далее,

$$|f^{(l+\mu)}(z)|\leqslant\begin{cases} c, & l+\mu\leqslant r,\\ c\,\mathrm{dist}^{\alpha-l-\mu}(z,\Gamma), & l+\mu\geqslant r+1.\end{cases} \tag{2.7}$$

Учитывая, что для квазиконформных кривых Γ справедливы соотношения $a_1h^{c_1}\leqslant\rho_h(z)\leqslant a_2h^{c_2}$ ([18], гл. 3), c_1 и c_2 зависят от Γ, а также учитывая липшицевскую оценку для квазиконформных отражений ([16], гл. 4), для достаточно больших k, зависящих от Γ, из (2.6) и (2.7) получим

$$|T(z)|\leqslant c\,\mathrm{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma),\quad z\in\tilde{K}_{\frac{1}{n}}, \tag{2.8}$$

где континуум $\tilde{K}_h$ определен в сублемме 1. Складывая оценки (2.8) для различных наборов индексов λ_1, λ_2, μ, ν, l, получим окончательно

$$|\,\mathrm{Term}_1^{(r+1)}(z)|\leqslant c\,\mathrm{dist}_{(z,\Gamma)}^{\alpha-r-1},\quad z\in\tilde{K}_{\frac{1}{n}}. \tag{2.9}$$

Оценка $\mathrm{Term}_2^{(r+1)}(z)$. Для проведения необходимых оценок напомним важный факт, обычно теперь употребляемый в рассуждениях, связанных с полиномами $p_n(m,k;f)(z)$ ([18], гл. 2).

Сублемма 1.2. *Пусть* Γ *— A-кривая, K-континуум, ограниченный* Γ, $z \in K$; *тогда для достаточно большого* m, *зависящего от* Γ, k_j, *справедливо*

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_{m,n}(\theta)\frac{|\xi_{R\theta}-\xi|^{k_1}}{|\xi_{R,\theta}-z|^{k_2}}d\theta \asymp \frac{|\xi_r-\xi|^{k_1}}{|\xi_R-z|^{k_2}}, \tag{2.10'}$$

знак $a \asymp b$ *означает здесь* $c_1 q \leqslant b \leqslant c_2 a$, *постоянные* c_1, c_2 *не зависят от* n, ξ *и* z.

Если продифференцировать $r+1$-раз выражение для $\mathrm{Term}_1(z)$ и применить сублемму 1.2, то окажется, что следует оценивать выражение вида

$$T_{\mu,\nu}(z) = \int_\Gamma \frac{|\xi_R-\xi|^k}{|\xi_R-z|^{k+\mu}|\xi-z|^{j+\nu}}\left|\int_z^\xi (\xi-\tau)^r f^{(r+1)}(\tau)d\tau\right||d\xi|, \quad \mu+\nu=r+1,$$

$$T_{\mu,\nu,1}(z) = \int_\Gamma \frac{|\xi_R-\xi|^k|f^{(r+1)}(z)|}{|\xi_R-z|^{k+\mu}|\xi-z|^{1+\nu-r}}|d\xi|, \quad \mu+\nu=r,$$

$$T_{\mu,\nu,\lambda\varkappa}(z) = \int_\Gamma \frac{|\xi_R-\xi|^k|f^{(r+1+\varkappa)}(z)}{|\xi_R-z|^{k+\mu}|\xi-z|^{j+\nu-r+\lambda}}|d\xi|, \quad \mu+\nu+\lambda+\varkappa=r.$$

Все оценки членов $T_{\mu,\nu}$, $T_{\mu,\nu,1}$, $T_{\mu,\nu,\lambda,\varkappa}$ производим при $z \in \tilde{K}_{\frac{1}{n}}$, т.е. при заведомо выполненном $z_0 \in \Gamma$, $|z-z_0| = \mathrm{dist}(z,\Gamma)$ соотношении $|+z-z_0| \geqslant c\rho_{\frac{1}{n}}(z_0)$ с постоянной c, не зависящей от n и z.

Теперь, если для $z \in \tilde{K}_{\frac{1}{n}}$ и $\xi \in \Gamma$ определить кривую $\gamma(z,\xi)$, соединяющую z и ξ внутри K, так, чтобы $|\gamma(z,\xi)| \asymp |z-\xi|$ и при $\xi \in \gamma(z,\xi)$ имелась $|\mathrm{dist}(\xi,\Gamma) \asymp \min(|\xi-z|,|\xi-\zeta|)$, то найдем, что

$$\begin{aligned}\left|\int_z^\zeta (\zeta-\tau)^r f^{(r+1)}(\tau)d\tau\right| &= \left|\int_{\gamma(z,\zeta)} (\zeta-\tau)^r f^{(r+1)}(\tau)d\tau\right| \\ &\leqslant c|\zeta-z|^r \int_{\gamma(z,\zeta)} |f^{(r+1)}(\tau)||f\tau| \leqslant c|\zeta-z|^r \int_{\gamma(z,\zeta)} \mathrm{dist}^{\alpha-r-1}(\tau,\Gamma)|d\tau| \\ &\leqslant c|z-\zeta|^r \cdot |z-\zeta|^{\alpha-r} = c|z-\zeta|^\alpha,\end{aligned}$$

и для оценки $T_{\mu,\nu}$ остается рассмотреть выражение вида

$$U = \int_\Gamma \frac{|\zeta_R-\zeta|^k}{|\zeta_R-z|^{k+\mu}|\zeta-z|^{1+\mu-\alpha}}|d\zeta|.$$

Выражения такого типа для A-кривых сейчас оцениваются рутинно (см. [4], гл. 9), и получаем

$$U \leqslant c\frac{|z_{0R}-z|^k}{|z_{0R}-z|^{k+\mu}|z_0-z|^{\nu-\alpha}}, \quad z_0 \in \Gamma, \quad |z_0-z| = \operatorname{dist}(z,\Gamma),$$

т.е.

$$T_{\mu,\nu}(z) \leqslant c\frac{|z_0-z|^{\alpha-\nu}}{|z_{0R}-z|^{\mu}} \leqslant c|z_0-z|^{\alpha-\nu-\mu} = c|z_0-z|^{\alpha-r-1} = c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma). \quad (2.10)$$

Обращаясь соответственно к оценке $T_{\mu,\nu,1}$ и $T_{\mu,\nu,\lambda,\varkappa}$, вновь употребляя рутинные оценки, имеем

$$\begin{aligned} T_{\mu,\nu,1}(z,\Gamma) &\leqslant c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma)\frac{|z_{0R}-z_0|^k}{|z_{0R}-z|^{k+\mu}|z_0-z|^{\nu-r}} \\ &\leqslant c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma), \quad z \in \tilde{K}_{\frac{1}{n}}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu,\nu\lambda,\varkappa}(z) &\leqslant c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1-\varkappa}\cdot\frac{|z_{0R}-z_0|^k}{|z_{0R}-z|^{k+\mu}|z_0-z|^{\nu+\lambda-r}} \\ &= c\cdot\operatorname{dist}^{\alpha-r-1-\varkappa}(z,\Gamma)\frac{|z_{0R}-z_0|^k\cdot|z_0-z|^{\mu+\varkappa}}{|z_{0R}-z|^{k+\mu}} \\ &\leqslant c\cdot\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma), \quad z\in\tilde{K}_{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В оценках (2.11), (2.12) $|z_0-z| = \operatorname{dist}(z,\Gamma)$, $z_0 \in \Gamma$.

Перейдем к завершению доказательства леммы 1.

Соотношения (2.9)–(2.12) влекут оценку

$$|f^{(r+1)}(z) - p_n^{(r+1)}(f;m,k)(z)| \leqslant c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma), \quad z\in\tilde{K}_{\frac{1}{n}},$$

т.е. в силу $f\in\Lambda^\alpha(K)$ имеем

$$|p_n^{(r+1)}(f;m,k)(z)| \leqslant c\operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z,\Gamma), \quad z\in\tilde{K}_{\frac{1}{n}}. \quad (2.13)$$

Пусть $Q(z) = p_n^{(r+1)}(f;m,k)(z)$, тогда Q — многочлен степени, не превосходящей $n-r-1$. Для $z\in\tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}}$ в силу свойства Липшица квазиконформного отражения ([16], гл. 4) и определенной регулярности поведения функций $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ для A-континуумов [4], гл. 9, из (2.13) получается оценка

$$|Q(z)| \leqslant c\rho_{\frac{1}{n}}^{\alpha-r-1}(z_0), \quad z\in\tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}}, \quad z_0\in\Gamma, \quad |z-z_0| = \operatorname{dist}(z,\Gamma). \quad (2.14)$$

Теперь если $\tilde{\rho}_h(z)$ — функции, построенные по континууму $\tilde{K}_{\frac{1}{n}}$, то сублемма 1.1 дает $\tilde{\rho}_{\frac{1}{n}}(z) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(z_0)$, и тогда (2.14) влечет

$$|Q(z)| \leqslant c_1 \tilde{\rho}_{\frac{1}{n}}^{\alpha-r-1}(z), \quad z \in \tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}}. \tag{2.15}$$

Еще раз применим сублемму 1.1, получим существование постоянной c_2 такой, что линии уровня $\frac{c_2}{n}$, построенные для континуума $\tilde{K}_{\frac{1}{n}}$, содержат внутри континуум K, поэтому вариант теоремы П. М. Тамразова ([20], гл. 2, теорема 2.1.1) и свойство (2.4) функций $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ влекут соотношение

$$|Q(z_0)| \leqslant (e^{\frac{c_2}{n}})^n (c_1 \tilde{\rho}_{\frac{1}{n}}^{\alpha-r-1}(z)) \leqslant c_3 \operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z, \Gamma), \quad z_0 \in \Gamma, \tag{2.16}$$

причем $z \in \tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}}$, $|z - z_0| = \operatorname{dist}(z_0, \tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}})$. Из (2.15) и (2.16) находим, что для $z_1 \in K \backslash \tilde{K}_{\frac{1}{n}}$ при $z \in \tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}}$ — такой, что $|z - z_1| = \operatorname{dist}(z_1, \tilde{\Gamma}_{\frac{1}{n}})$ — справедлива оценка

$$|Q(z_1)| \leqslant c_4 \operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z, \Gamma) \leqslant c_4 \operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z_1, \Gamma). \tag{2.17}$$

Наконец, сопоставление (2.13) и (2.17) доказывает лемму 1.

§3. Представление для $f - p_n$

Для дальнейшего нам потребуется специальный вариант представления для $f - p_n$ типа представлений Е. М. Дынькина [21].

Лемма 2. *Пусть K — A-континуум, $f \in \Lambda^\alpha(K)$, полиномы $p_n(f; m, k)(z)$ определены перед леммой* 1. *Тогда при m и k, удовлетворяющих ограничениям леммы* 1, *разность $f - p_n$ представляется в виде*

$$f(z) - p_n(f; m, k)(z) = \iint\limits_{\mathbb{C} \backslash K} \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\sigma_\xi, \tag{3.1}$$

где функция h удовлетворяет следующим условиям:

$$|h(\zeta)| \leqslant c \operatorname{dist}^{\alpha-\Gamma}(\xi, \Gamma), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus K; \tag{3.2}$$

$$\operatorname{supp} h \ \ \textit{лежит внутри} \ \ \Gamma_{\frac{c_1}{n}} \ \ \textit{при некотором} \ \ c_1 > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Отметим, что спецификой, отличающей рассматриваемый случай от общего подхода Е. М. Дынькина для класса $\Lambda^\alpha(K)$, является свойство (3.3) носителя h. Пусть $q(z) = f(z) - p_n(f; m, k)(z)$. Тогда лемма 1 и свойство полиномов p_n ([4], гл. 9) показывают, что $q(z)$ удовлетворяют свойствам

$$|q^{(\nu)}(\xi)| \leqslant c \rho_{\frac{1}{n}}^{\alpha-\nu}(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ 0 \leqslant \nu \leqslant r, \quad \text{и} \quad |q^{(r+1)}(z)| \leqslant c \operatorname{dist}^{\alpha-r-1}(z, \Gamma),\ z \in K. \tag{3.4}$$

Будем действовать, буквально повторяя Е. М. Дынькина [21]. Для $\zeta \in \mathbb{C}\backslash K$ положим $\zeta_0 = \zeta_0(\zeta)$ — ближайшая к ζ точка на Γ,

$$P_r[\varphi; \zeta_0, \zeta] = \varphi(\zeta_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(\zeta_0)}{k!}(\zeta - \zeta_0)^k$$

и

$$q_*(\zeta) = \begin{cases} P_r[q; \zeta_0(\zeta), \zeta], & \zeta \in \operatorname{int}\Gamma_{\frac{1}{n}} \setminus K, \\ 0, & \zeta \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{int}\Gamma_{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

Пусть $\delta(\zeta) = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\xi, \Gamma)$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K$, $B(\zeta, \delta) = \{\xi : |\xi - \zeta| \leqslant \delta\}$, и окончательно положим

$$q_0(\zeta) = \frac{1}{\pi\delta^2(\zeta)} \iint\limits_{B(\zeta,\delta(\zeta))} q_*(\xi)d\sigma_\xi, \qquad h(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial q_0(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}. \tag{3.5}$$

Необходимые для применения формулы Грина условия в данном случае соблюдены, как хорошо известно [21], поэтому при $z \in K$

$$q(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}\backslash K} \frac{\partial q_0(\zeta)}{\partial \bar{z}eta} \frac{d\sigma_\xi}{\zeta - z} = \iint\limits_{\mathbb{C}\backslash K} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta.$$

Соотношение (3.3) следует из того свойства функций $\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)$ ([4], гл. 9), что если $B(\zeta, \delta(\zeta)) \cap (\operatorname{int}\Gamma_{\frac{1}{n}} \setminus K) \neq \varnothing$, то существует $c_1 > 0$, $c_1 = c_1(K)$, такая, что $B(\zeta, \delta(\zeta) \subset \operatorname{int}\Gamma_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$. Проверим (3.2). Если $B(\zeta, \delta(\zeta)) \subset \operatorname{int}\Gamma_{\frac{1}{n}} \setminus K$, то тогда (3.2) — следствие исследований Е. М. Дынькина [21]. Если же $B(\zeta, \delta(\zeta)) \not\subset \operatorname{int}\Gamma_{\frac{1}{n}} \setminus K$, то это означает, что $\operatorname{dist}(\zeta, \Gamma) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta_0)$, $\zeta_0 = \zeta_0(\zeta)$. Тогда в силу определения q имеем

$$\left|\frac{\partial q_0(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right| \leqslant |\operatorname{grad} q_0(\zeta)| \leqslant c\frac{\sup_{\zeta \in B(\zeta,\delta(\zeta))} |q_*(\xi)|}{\delta(\zeta)} \leqslant c\frac{\operatorname{dist}^\alpha(\zeta, \Gamma)}{\operatorname{dist}(\zeta, \Gamma)} = c\operatorname{dist}^{\alpha-1}(\zeta, \Gamma),$$

поскольку при $\xi \in B(\zeta, \delta(\zeta))$ и $\xi_0 = \zeta_0(\xi)$ справедливо $|\xi - \zeta_0| \asymp |\zeta_0 - \zeta| \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta_0)$, $\zeta_0 = \zeta_0(\zeta)$, и тогда из (3.4) заключаем, что

$$|q_*(\xi)| \leqslant c\left(|q(\xi_0)| + \sum_{\nu=1}^{z} |q^{(\nu)}(\xi_0)||\xi - \zeta_0|^\nu\right) \leqslant c\rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(\xi_0) \leqslant c\operatorname{dist}^\alpha(\zeta, \Gamma).$$

Лемма 2 доказана. •

В дальнейшем будем использовать представление, получаемое из леммы 2 и приводящее к необходимости получить оценку, устанавливаемую в нижеследующей лемме.

Лемма 3. *Пусть K — A-континуум, $\Gamma = \partial K$, функция $h_0(\zeta) = \operatorname{dist}^{\alpha-1}(\zeta, \Gamma)$, если $\zeta \in \Gamma_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$, и $h_0(\zeta) = 0$, если $\zeta \notin \operatorname{int}\Gamma_{\frac{c}{n}}$, $H(\zeta) = \frac{h_0(\zeta)}{\rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(\zeta_0)}$, где $\zeta_0 \in \Gamma$ — ближайшая к ζ точка Γ. Тогда при $l > l_0(K)$ и $z \in \Gamma$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus K} \frac{H(\zeta)}{|\zeta - z|}\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta_n)}\right)^l d\sigma_\zeta \leqslant c(K). \tag{3.6}$$

Доказательство. Отобразим внешность $\mathbb{C}\setminus K$ на внешность единичного круга $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ конформно функцией φ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, и пусть $\varphi(z) = t_0$. Рассмотрим правильный n-угольник на окружности $\partial\mathbb{D}$, одной из вершин которого является точка t_0, и занумеруем его вершины в соответствии с расстоянием до t_0 и тем, в какой из двух полуокружностей, граничащих по t_0, они оказываются: $t_{\pm1}, t_{\pm2}, \dots$; пусть $z_0 = z$, $z_{\pm k}$ — прообразы $t_{\pm k}$. Пусть, далее, $D_{\pm k}$ — области, ограниченные окружностями $\partial\mathbb{D}$, $\left(1 + \frac{c}{n}\right)\partial\mathbb{D}$ и лучами соответственно, $\{\arg\zeta = \arg t_k\}$, $\{\arg\zeta = \arg t_{k-1}\}$ и $\{\arg\zeta = \arg t_{-k}\}$, $\{\arg\zeta = \arg t_{k+1}\}$, $S_{\pm k}$ — прообразы $D_{\pm k}$ при отображении φ. Тогда, как следует из свойств функций $\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)$ ([4], гл. 9), при $\zeta \in S_{\pm1}$ имеем $\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) + |\zeta - z| \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(z)$, и при $\zeta \in S_{\pm k}$, $k > 1$, $|\zeta - z| \geqslant c\rho_{\frac{1}{n}}(z)k^\theta$ при некоторых $c > 0$, $\theta > 0$. Выберем l так, чтобы $l\theta > 1$. Теперь учтем, что с помощью оценок интегралов, встречающихся в [21], можно заключить, что

$$\int\limits_{S_{\pm1}} \frac{H(\zeta)}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta \leqslant c\frac{1}{\rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(z)} \int\limits_{S_{\pm1}} \frac{\operatorname{dist} t^{\alpha-1}(\zeta, \Gamma)}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta \leqslant c, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{S_{\pm k}} \frac{H(\zeta)}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta \leqslant c\frac{1}{|z_{\pm k} - z_0|} \int\limits_{S_{\pm k}} H(\zeta) d\sigma_\zeta \leqslant c\frac{1}{|z_{\pm k} - z_0|\rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(z_{\pm k})} \int\limits_{S_{\pm k}} \operatorname{dist}^{\alpha-1}(\zeta, \Gamma) d\zeta$$

$$\leqslant c\frac{1}{|z_{\pm k} - z_0|} \cdot \frac{\rho^{\alpha+1}_{\frac{1}{n}}(z_{\pm k})}{\rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(z_{\pm k})} = c\frac{\rho_{1n}(z_{\pm k})}{|z_{\pm k} - z_0|} \leqslant c\frac{1}{k^\theta}, \tag{3.8}$$

и потому, комбинируя (3.7) и (3.8), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus K} \frac{H(\zeta)}{|\zeta - z|}\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}\right)^l d\sigma_\zeta = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int\limits_{S_k} \frac{H(\zeta)}{|\zeta - z|}\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}\right)^l d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\theta + l\theta}} < \infty.$$

Лемма 3 доказана. •

§4. Внешние функции из $\Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$

Пусть K — A-континуум, $z_0 \in \overset{\circ}{K}$, функция $\Psi(t)$ отображает $\mathbb{D}$ на K конформно, $\Psi(0) = z_0$. K является областью Смирнова [24], Ψ' — внешняя в $\mathbb{D}$ функция в смысле факторизации Неванлинны. Пусть, далее, $\Lambda^{\beta}(K)$, $0 < \beta < 1$, — класс Гёльдера аналитических в K функций, $\Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$ класс, получаемый конформной пересадкой класса $\Lambda^{\beta}(K)$ в $\mathbb{D}$ с помощью функции Ψ, т.е. $g(t) \in \Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D}) \Leftrightarrow g(t) = f(\Psi(t))$, $f \in \Lambda^{\beta}(K)$. Опишем класс $\Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$, который нам придется использовать, более подробно. Введем несколько технических обозначений. Если z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, то через $\gamma(z_1, z_2)$ обозначим окружность, проходящую через z_1, z_2, в которой $[z_1, z_2]$ — диаметр, $D(z_1, z_2)$ — круг $\operatorname{int}\gamma(z_1, z_2)$. Если $t_1, t_2 \in \bar{\mathbb{D}}$, то t_1, t_2 — точка $\gamma(t_1, t_2) \cap \mathbb{D}$, наиболее удаленная от $\partial\mathbb{D}$. Сформулируем важные свойства функции Ψ ([18], гл. 3).

Утверждение А. Пусть $t_1, t_2 \in \bar{\mathbb{D}}$, тогда

$$|\Psi(t_2) - \Psi(t_1)| \asymp |\Psi'(t_1, t_2)||t_2 - t_1|; \tag{4.1}$$

если t_2, t_1, t_0 лежат на одном луче, $0 < |t_2| < |t_1| < |t_0| = 1$, то с некоторыми $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ выполнено

$$c_1\left(\frac{1 - |t_1|}{1 - |t_2|}\right)^{\varkappa} \leqslant \frac{|\Psi'(t_2)|}{|\Psi'(t_1)|} \leqslant c_2\left(\frac{1 - |t_2|}{1 - |t_1|}\right)^{\varkappa}; \tag{4.2}$$

если $t_1, t_2 \in \mathbb{D}$, $\operatorname{dist}(\gamma(t_1, t_2), \partial\mathbb{D}) \geqslant c|t_2 - t_1|$, то

$$|\Psi'(t_*)| \asymp |\Psi'(t^*)|, t_*, \quad t^* \in D(t_1, t_2). \tag{4.3}$$

Свойства (4.1)–(4.3) рутинные, часто используемые свойства функции Ψ для A-континуумов, поэтому далее применяем их без особых пояснений.

Теперь учтем, что для A-континуума K и аналитической в $\overset{\circ}{K}$ функции f, $f \in C(K)$, выполнено $f \in \Lambda^{\beta}(K)$, $0 < \beta < 1$, если выполнено соотношение

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant c_f|\zeta_1 - \zeta_2|^{\beta}, \quad \zeta_1\zeta_2 \in \partial K \tag{4.4}$$

(см. [20], гл. 2), либо

$$|f'(z)| \leqslant c_f \operatorname{dist}^{\beta-1}(z, \partial K), \quad z \in \overset{\circ}{K}, \tag{4.5}$$

что для A-континуумов устанавливается буквально как для круга ([22], гл. 7). Соединяем (4.4) и (4.5) с соотношениями (4.1) и (4.3), получаем следующее описание класса $\Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$.

Утверждение B. Пусть аналитическая в $\mathbb{D}$ функция g непрерывна в $\bar{\mathbb{D}}$. Тогда $g \in \Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух условий:

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leqslant c_g |\Psi'(t_1, t_2)|^{\beta} |t_1 - t_2|^{\beta}, \quad t_1, t_2 \in \partial\mathbb{D}; \tag{4.6}$$

$$|g'(t)| \leqslant c_g |\Psi'(t)|^{\beta} (1 - |t|)^{\beta - 1}, \quad t \in \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

Для получения необходимых для последующего вспомогательных результатов нам понадобится описание модулей внешних функций из $\Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$ на единичной окружности, подобное описанию в [9], гл. 2. Через $\Lambda^{\beta}_{K}(\partial\mathbb{D})$ обозначим класс комплекснозначных функций на $\partial\mathbb{D}$, удовлетворяющих соотношению $|g(t_1) - g(t_2) \leqslant c_g |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|^{\beta}$, $t_j \in \partial\mathbb{D}$. Особую роль будут играть неотрицательные g с суммируемым на окружности логарифмом.

Утверждение C. Пусть g — комплекснозначная функция на $\partial\mathbb{D}$, $g \in \Lambda^{\beta}_{K}(\partial\mathbb{D})$, $|g(t_1) - g(t_2)| \leqslant |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|^{\beta}$, t_1, $t_2 \in \partial\mathbb{D}$, h — внешняя (в смысле Неванлинны) функция, причем $|h(t)| = |g(t)|$, $t \in \partial\mathbb{D}$, $\beta < \frac{1}{1+\varkappa}$, где $\varkappa$ — параметр из (4.2). Предположим далее, что существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что для всякой точки t, $\frac{1}{2} \leqslant |t| < 1$, для которой справедливо неравенство

$$|g(t_0)| \geqslant |\Psi'(t)|^{\beta} (1 - |t|)^{\beta}, \tag{4.8}$$

где $t_0 = \frac{t}{|t|}$, имеется оценка

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \left| \log \left| \frac{g(\tau)}{g(t_0)} \right| \right| \frac{1 - |t|^2}{|\tau - t|^2} |d\tau| \leqslant c_0. \tag{4.9}$$

Тогда $h \in \Lambda^{\beta}_{K}(\mathbb{D})$.

Доказательство. Будем проверять критерий (4.7). Пусть $t \in \mathbb{D}$, $\frac{1}{2} \leqslant |t| < 1$, $t_0 = \frac{t}{|t|}$. Рассмотрим два случая.

1.
$$|h(t_0)| = |g(t_0)| \leqslant |\Psi'(t)|^{\beta} (1 - |t|)^{\beta} \stackrel{def}{=} A. \tag{4.10}$$

Пусть γ — окружность $\{\tau : |\tau - t| = \frac{1}{2}(1 - |t|)\}$, $M = \max_{\tau \in \gamma} |h(\tau)|$. Тогда формула Коши дает

$$h'(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{h(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau,$$

$$|h'(\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi} M \cdot \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}(1 - |t|)}{(\frac{1}{2}(1 - |t|))^2} \leqslant \frac{2M}{1 - |t|}, \tag{4.11}$$

и учтем теперь (4.1)–(4.3) следующим образом при $\tau \in \gamma$:

$$
\begin{aligned}
\log|h(\tau)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log|g(s)|\frac{1-|\tau|^2}{|s-\tau|^2}|ds| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log(|g(t_0)|+|g(s)-g(t_0)|)\frac{1-|\tau|^2}{|s-\tau|^2}|ds| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log(A+c_1|\Psi'(s,t_0)|^\beta|s-t_0|^\beta)\frac{1-|\tau|^2}{\beta-\tau|^2}|ds| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log(A+c_2|\Psi'((1-|s-t_0|)t_0)|^\beta|s-t_0|^\beta)\frac{1-|\tau|^2}{|s-\tau|^2}|ds| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log\left[A+c|\Psi'(t)|^\beta\left(\left(\frac{1-|t|}{|s-t_0|}\right)^{\varkappa}+\left(\frac{|s-t_0|}{1-|t|}\right)^{\varkappa}\right)|s-t_0|^\beta\right]\frac{1-|\tau|^2}{|s-\tau|^2}|ds| \\
&\leqslant \log A+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log\left[1+\frac{c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta}{A}\right. \\
&\qquad\times\left(\left(\frac{1-|t|}{|s-t_0|}\right)^{\varkappa}+\left(\frac{|s-t_0|}{1-|t|}\right)^{\varkappa}\right) \\
&\qquad\times\left.\left(\left(\frac{1-|t|}{|s-t_0|}\right)^{\beta}+\left(\frac{|s-t_0|}{1-|t|}\right)^{\beta}\right)\right]\frac{1-|\tau|^2}{|s-t_0|^2}|ds| \\
&\leqslant \log A+\tilde{c}_1,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

так что (2.11) и (2.12) влекут в случае 1:

$$
|h'(t)| \leqslant c_2'\frac{1}{1-|t|}A = c_2'|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1}. \tag{4.13}
$$

Перейдем ко второй возможности.

2.

$$
|h(t_0)| = |g(t_0)| \overset{\text{def}}{=} M > |\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta \overset{\text{def}}{=} A. \tag{4.14}
$$

Выберем $\rho \leqslant |t|$ из двух соотношений:

$$
c_3|\Psi'(\rho t_0)|^\beta(1-\rho)^\beta = \frac{M}{2}, \tag{4.15}
$$

$$
c_3|\Psi'(\tilde{\rho} t_0)|^\beta(1-\tilde{\rho})^\beta \leqslant \frac{M}{2} \quad \text{при} \quad \rho<\tilde{\rho}<1, \tag{4.15$'$}
$$

где $c_3 = \max(1,\tilde{c}_3)$, $\tilde{c}_3$ взято из неравенства

$$
|\Psi(t_1)-\Psi(t_2)|^\beta \leqslant \tilde{c}_3|\Psi'((1-|t_1-t_2|)t_1)|^\beta|t_1-t_2|^\beta, \quad t_1,t_2\in\partial\mathbb{D},
$$

полученного комбинацией (4.1)–(4.3). Если $\rho \leqslant |t|$ с таким свойством нет, последующие рассуждения упростятся. Положим $\rho t_0 = t_*$. Теперь всегда можно написать:

$$h(\tau) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log|g(s)|\frac{s|\tau}{s-\tau}|ds|\right) = M\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|g(s)|}{M}\frac{s+\tau}{s-\tau}|ds|\right),$$

$$h'(t) = M\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|g(s)|}{M}\cdot\frac{s+t}{s-t}|ds|\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|g(s)|}{M}\frac{s|ds|}{(s-t)^2}\right),$$

$$|h'(t)| = M\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|g(s)|}{M}\cdot\frac{1-|t|^2}{|s-t|^2}|ds|\right)\cdot\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|g(s)|}{M}\frac{s|ds|}{(s-t)^2}\right|.$$

В рассматриваемом случае 2 можно применить (4.9), и тогда получится

$$|h'(t)| \leqslant M\cdot e^{c_0}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\left|\log\frac{|g(s)|}{M}\right|\frac{|ds|}{|s-t|^2} \leqslant cM\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\left|\log\frac{|g(s)|}{M}\right|\frac{|ds|}{|s-t|^2}. \tag{4.16}$$

Предположим сначала, что интересующего нас значения ρ не нашлось, причем не выполнено (4.15). Тогда с некоторой постоянной $c_4 = c_4(K)$ выполняется

$$M \leqslant c_4|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta,$$

поскольку противоположное неравенство при достаточно большой постоянной c_4 вместе с неравенством (4.2) гарантировали бы существование $\tilde\rho < |t|$, для которого бы выполнялось

$$c_3|\Psi'(\tilde\rho t_0)|^\beta(1-\tilde\rho)^\beta < \frac{M}{2},$$

что с учетом $c_3 \geqslant 1$ давало бы существование $\rho < |t|$ со свойством (4.15). Таким образом, при отсутствии числа $\rho < |t|$ со свойством (4.15) имеем

$$|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta < M < c_4|\Psi'(t)|^\beta(1-(t))^\beta \tag{4.17}$$

и, применяя к (4.16) условие (4.9), получаем с учетом (4.17):

$$\begin{aligned}|h'(t)| &\leqslant c\frac{M}{1-|t|^2}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\left|\log\left|\frac{g(s)}{g(t_0)}\right|\left|\frac{1-|t|^2}{|s-t|^2}\right|ds\right|\\ &\leqslant cc_4\frac{|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta}{1-|t|^2}\cdot c_0 \leqslant \tilde c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Если выполнено (4.15), но не выполнено (4.15′), опять нетрудно установить оценку (4.17) и далее получить (4.18).

Таким образом, рассмотрим подслучай, при котором существует $\rho < |t|$ со свойством (4.15) и (4.15′). Пусть $J = \{\tau \in \partial\mathbb{D} : |\tau - t_0| \leqslant 1-\rho\}$. Тогда при $\tau \in J$ имеем

$$\left|\frac{g(\tau)}{g(t_0)}\right| = \left|1 + \frac{g(\tau)-g(t_0)}{g(t_0)}\right| \begin{cases} \leqslant 1 + \frac{|g(\tau)-g(t_0)|}{|g(t_0)|} \\ \geqslant 1 - \frac{|g(\tau)-g(t_0)|}{|g(t_0)|} \end{cases},$$

$$\begin{aligned}\frac{|g(\tau)-g(t_0)|}{|g(t_0)|} &\leqslant \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(t_0)|^\beta}{M} \leqslant \frac{c_3|\Psi'((1-|\tau-t_0|)t_0)|^\beta|\tau-t_0|^\beta}{M} \\ &\leqslant \frac{\frac{M}{2}}{M} = \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{4.19}$$

и тогда из (4.19) заключаем, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{g(\tau)}{g(t_0)}\right| \leqslant \frac{3}{2}, \quad \tau \in J,$$

и, значит,

$$\left|\log\left|\frac{g(\tau)}{g(t_0)}\right|\right| \leqslant c\frac{|g(\tau)-g(t_0)|}{|g(t_0)|},$$

поэтому

$$\begin{aligned} M\int_J \left|\log\frac{|g(\tau)|}{M}\right|\frac{|d\tau|}{|\tau-t|^2} &\leqslant cM\int_J \frac{|g(\tau)-g(t_0)|}{M}\frac{|d\tau|}{|\tau-t|^2} \leqslant c\int_J \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(t_0)|^\beta}{|\tau-t|^2}|d\tau| \\ &\leqslant c\max_{|\tau-t_0|\leqslant 1-|t|}|\Psi(\tau)-\Psi(t_0)|^\beta \cdot \int\limits_{|\tau-t_0|\leqslant 1-|t|}\frac{|d\tau|}{|\tau-t|^2} \\ &\quad + c\int\limits_{J\setminus\{|\tau-t_0|\leqslant 1-|t|\}} \frac{|\Psi'((1-|\tau-t_0|)t_0)|^\beta|\tau-t_0|^\beta}{|\tau-t|^2}|d\tau| \\ &\leqslant c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^\beta\cdot\frac{1}{1-|t|} + c\int\limits_{1-|t|<|\tau-t_0|<1-\rho}\frac{|\Psi'(t)|^\beta\left[\left(\frac{|\tau-t_0|}{1-|t|}\right)^\varkappa\right]^\beta}{|\tau-t|^{2-\beta}}|d\tau| \\ &\leqslant c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1} + c|\Psi'(t)|^\beta\frac{1}{(1-|t|)^{\beta\varkappa}}\cdot\int\limits_{1-|t|<|\tau-t_0|<1-\rho}\frac{|d\tau|}{|\tau-t|^{2-\beta(1+\varkappa)}} \\ &\leqslant c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

в силу условия $\beta(1+\varkappa) < 1$.

Далее, в силу (4.15)

$$|g(t_0)| = M = 2c_3|\Psi'(\rho t_0)|^\beta(1-\rho)^\beta > |\Psi'(\rho t_0)|^\beta(1-\rho)^\beta;$$

поэтому, применяя (4.9) и $t_* = \rho t_0$ и учитывая (4.15), получим

$$
\begin{aligned}
M \int\limits_{\partial\mathbb{D}\setminus I} \log\frac{|g(\tau)|}{M}\frac{|d\tau|}{|\tau - t|^2} &\leqslant cM \int\limits_{\partial\mathbb{D}\setminus I} \left|\log\frac{|g(\tau)|}{M}\right| \frac{|d\tau|}{|\tau - t_*|^2} \\
&\leqslant c\frac{M}{1-|t_*|^2} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \left|\log\frac{|g(\tau)|}{M}\right| \frac{1-|t_*|^2}{|\tau - t_*|^2}|d\tau| \\
&\leqslant cc_0\frac{M}{1-|t_*|^2} \leqslant c_*|\Psi'(\rho t_0)|^\beta(1-\rho)^\beta\frac{1}{1-\rho} \\
&\leqslant c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1}\cdot\left(\frac{1-\rho}{1-|t|}\right)^{\beta\varkappa}\cdot\frac{(1-|t|)^{1-\beta}}{(1-\rho)^{1-\beta}} \\
&= c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1}\cdot\frac{(1-|t|)^{1-\beta(1+\varkappa)}}{(1-\rho)^{1-\beta(1+\varkappa)}} \\
&\leqslant c|\Psi'(t)|^\beta(1-|t|)^{\beta-1},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

где в последнем неравенстве в (4.21) мы опять использовали соотношения $\beta(1+\varkappa) < 1$ и $\rho < |t|$. Собирая вместе оценки (4.13)–(4.21), получаем доказательство утверждения C. •

§5. Вспомогательная внешняя функция из $\Lambda^\beta(K)$

Пусть K — A-континуум, $z_0 \in K$, функция Ψ отображает конформно $\mathbb{D}$ на K, $\Psi(0) = z_0$, число $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, взято из (4.2), $0 < \beta < \frac{1}{1+\varkappa}$, $\rho_h(\zeta)$ — расстояние до линий уровня в $\mathbb{C}\setminus K$, определенное в §1. Элементарные геометрические рассмотрения дают неравенства

$$\rho_h(\zeta_1) \leqslant \rho_h(\zeta_2) + |\zeta_1 - \zeta_2|, \quad \rho_h(\zeta_2) \leqslant \rho_h(\zeta_1) + |\zeta_1 - \zeta_2|, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \partial K,$$

а тогда

$$\rho_h^\beta(\zeta_1) \leqslant \rho_h^\beta(\zeta_1) + |\zeta_1 - \zeta_2|^\beta, \quad \rho_h^\beta(\zeta_2) \leqslant \rho_h^\beta(\zeta_1) + |\zeta_1 - \zeta_2|^\beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

и, значит,

$$|\rho_h^\beta(\zeta_1) - \rho_h^\beta(\zeta_2)| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_2|^\beta, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \partial K, \quad 0 < \beta < 1. \tag{5.1}$$

Таким образом, $\rho_h^\beta(\zeta) \in \Lambda^\beta(\partial K)$. Определим теперь внешнюю в K функцию $g_{h,\beta}$ равенством

$$|g_{h,\beta}(\zeta)| = \rho_h^\beta(\zeta), \quad \zeta \in \partial K. \tag{5.2}$$

Лемма 4. *Для внешней в K функции $g_{h,\beta}$, определенной в* (5.2), *при $\beta < \frac{1}{1+\varkappa}$ справедливо соотношение $g_{h,\beta} \in \Lambda^\beta(K)$, причем $\|g_{h,\beta}\|_{\Lambda^\beta(K)}$ ограничены вне зависимости от величины h.*

Доказательство. Пусть $f_{h,\beta}(t) = g_{h,\beta}(\Psi(t))$, $t \in \mathbb{D}$. Тогда, согласно утверждению В из §4, достаточно проверить, что $f_{h,\beta} \in \Lambda_K^\beta(\mathbb{D})$, причем постоянные из (4.6) и (4.7) для соответствующих $f_{h,\beta}$ ограничены вне зависимости от h. Утверждение C из §4 показывает, что для этого достаточно установить оценку (4.9) с постоянной c_0, не зависящей от h, при условии (4.8), и в таком случае лемма 4 будет доказана. Итак, предполагаем, что

$$|f_{h,\beta}(t_0)| \geqslant |\Psi'(t)|^\beta (1-|t|)^\beta, \quad t_0 = \frac{1}{|t|}. \tag{5.3}$$

Определим внешнюю в K функцию g_n равенством $|g_h(\zeta)| = \rho_h(\zeta)$, $\zeta \in \partial K$. Тогда (5.2) влечет соотношение $g_{h,\beta}(z) = (g_h(z))^\beta$. Соответственно если определить в $\mathbb{D}$ функцию $f_h(t)$ из равенства $f_h(t) = g_h(\Psi(t))$, то тогда $f_{h,\beta}(t) = f_h^\beta(t)$, поэтому (5.3) запишется в виде

$$|f_h(t_0)|^\beta \geqslant |\Psi'(t)|^\beta (1-|t|)^\beta,$$

или

$$|f_h(t_0)| \geqslant |\Psi'(t)|(1-|t|), \quad t_0 = \frac{t}{|t|}. \tag{5.4}$$

Неравенство (4.9), которое нужно установить для функции $f_{h,\beta}$ в конкретной ситуации, записывается так:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left|\log\left|\frac{f_h^\beta(\tau)}{f_h^\beta(t_0)}\right|\right| \frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}|d\tau| \leqslant c_0,$$

или

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left|\log\left|\frac{f_h(\tau)}{f_h(t_0)}\right|\right| \frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}|d\tau| \leqslant \frac{c_0}{\beta}. \tag{5.5}$$

Левая часть в (5.5) не зависит от β, поэтому, установив неравенство (5.5) с постоянной c_0, не зависящей от h, при условии (5.4), мы проверим условие, сформулированное в утверждении С п. 4, при всех β, $0 < \beta \leqslant 1$.

Приступим к проверке наличия оценки (5.5). Пусть $\zeta_0 = \Psi(t_0)$, J — дуга $\{\tau \in \partial\mathbb{D} : |\tau - t_0| \leqslant 1 - |t|\}$, $\sigma = \Psi(J)$ — образ J на границе ∂K при отображении функцией Ψ. В силу предложения А имеем

$$|\sigma| \asymp |\Psi'(t)|(1-|t|), \tag{5.6}$$

по определению функций f_h и g_h будет выполнено

$$|f_h(t_0)| = |g_h(\Psi(t_0))| = |g_h(\zeta_0)| = \rho_h(\zeta_0),$$

поэтому (5.4) и (5.6) влекут с некоторой постоянной $c_5 = c_5(K)$:

$$\rho_h(\zeta_0) \geqslant c_5\sigma. \tag{5.7}$$

Из соотношения (5.7), свойств функций ρ_h для A-континуумов [4], гл. 9, и того, что $\zeta_0 \in \sigma$, находим, что

$$\rho_h(\zeta) \asymp \rho_h(\zeta_0), \quad \zeta \in \sigma, \tag{5.8$'$}$$

т.е., возвращаясь к дуге J и функции f_h, находим, что

$$|f_h(\tau)| \asymp |f_h(t_0)|, \quad \tau \in J,$$

откуда

$$\left|\log\left|\frac{f_h(\tau)}{f_h(t_0)}\right|\right| \leqslant c_6(K), \quad \tau \in J. \tag{5.8}$$

Определим теперь дугу J_0 следующим образом. Если $\rho_h(\zeta_0) \leqslant |\sigma|$, полагаем $J_0 = J$. Если же $\rho_h(\zeta_0) > |\sigma|$, то пусть $J_0 \supset J$ — дуга $\partial\mathbb{D}$ с серединой в t_0, для образа которой $\sigma_0 = \Psi(J_0)$ выполнено $|\sigma_0| = \rho_h(\zeta_0)$; пусть t_1, t_2 — концы J_0, $\lambda = |t_0 - t_1|$, $t_* = t_0(1-\lambda)$. Опять, как в (5.8$'$), имеем

$$\rho_h(\zeta) \asymp \rho_h(\zeta_0), \quad \zeta \in \sigma_0, \tag{5.9}$$

и для $\zeta \in \partial K \setminus \sigma_0$ в силу свойств ρ_h ([18], гл. 3) с некоторыми $c_7 > 0$ и $\varkappa_0$, $0 < \varkappa_0 < 1$ имеем

$$\rho_h(\zeta) \leqslant c_7\rho_h^{1-\varkappa_0}(\zeta_0)|\zeta-\zeta_0|^{\varkappa_0}, \qquad \rho_h(\zeta_0) \leqslant c_7\rho_h^{1-\varkappa_0}(\zeta)|\zeta-\zeta_0|^{\varkappa_0},$$

или

$$\frac{\rho_h(\zeta)}{\rho_h(\zeta_0)} \leqslant c_7\left(\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho_h(\zeta_0)}\right)^{\varkappa_0}, \tag{5.10$'$}$$

$$\frac{\rho_h^{1-\varkappa_0}(\zeta)}{\rho_h^{1-\varkappa_0}(\zeta_0)} \geqslant \frac{1}{c_7}\left(\frac{\rho_h(\zeta_0)}{|\zeta-\zeta_0|}\right)^{\varkappa_0}, \quad \frac{\rho_h(\zeta)}{\rho_h(\zeta_0)} \geqslant \frac{1}{c_7^{\frac{1}{\varkappa_0}}}\left(\frac{\rho_h(\zeta_0)}{|\zeta-\zeta_0|}\right)^{\frac{\varkappa_0}{1-\varkappa_0}}. \tag{5.10$''$}$$

Пусть $\tau \in \partial\mathbb{D} \setminus J_0$, $\zeta = \Psi(\tau)$. Тогда по утверждению А

$$|\zeta-\zeta_0| = |\Psi(\tau)-\Psi(t_0)| \asymp |\Psi'((1-|\tau-t_0|)t_0)||\tau-t_0|,$$
$$\rho_h(\zeta_0) = |\sigma_0| \asymp |\Psi(t_1)-\Psi(t_0)| \asymp |\Psi'((1-\lambda)t_0)|\lambda,$$

поэтому при $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \sigma_0$, $\zeta = \Psi(\tau)$ имеем

$$\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho_h(\zeta_0)} \asymp \frac{|\Psi'((1-|\tau-t_0|)t_0)||\tau-t_0|}{|\Psi'((1-\lambda)t_0)|\lambda}$$

и, с учетом утверждения В, имеем

$$c_9\left(\frac{\lambda}{|\tau-t_0|}\right)^{\varkappa}\leqslant\frac{|\Psi'((1-|\tau-t_0|)t_0)|}{|\Psi'((1-\lambda)t_0)|}\leqslant c_8\left(\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}\right)^{\varkappa},\tag{5.11}$$

тогда (5.10′), (5.10″) и (5.11) влекут

$$\frac{\rho_h(\zeta)}{\rho_h(\zeta_0)}\leqslant c_{10}\left(\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}\right)^{\varkappa_0}\left[\left(\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}\right)^{\varkappa}\right]^{\varkappa_0}\leqslant c_{11}\left(\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}\right)^{k_1};\tag{5.12}$$

$$\frac{\rho_h(\zeta)}{\rho_h(\zeta_0)}\geqslant c_{12}\left(\frac{\lambda}{|\tau-t_0|}\right)^{\frac{\varkappa_0}{1-\varkappa_0}}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{|\tau-t_0|}\right)^{\varkappa}\right]^{\frac{\varkappa_0}{1-\varkappa_0}}\geqslant c_{12}\left(\frac{\lambda}{|\tau-t_0|}\right)^{k_2}.\tag{5.13}$$

В итоге из (5.12) и (5.13) при $\zeta=\Psi(\tau)$, $\tau\in\partial\mathbb{D}\setminus J_0$, имеем соотношение

$$\left|\log\left|\frac{f_h(\tau)}{f_h(t_0)}\right|\right|=\left|\log\frac{\rho_h(\zeta)}{\rho_h(\zeta_0)}\right|\leqslant k\log\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}+c_{13},\quad k=\max(k_1,k_2).\tag{5.14}$$

Собирая вместе (5.8), (5.9) и (5.14), учитывая, что $\lambda\geqslant 1-|t|$, получаем

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\left|\log\left|\frac{f_h(\tau)}{f_h(t_0)}\right|\right|\frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}|d\tau|=\int\limits_{J_0}+\int\limits_{\partial\mathbb{D}\setminus J_0}$$
$$\leqslant c\int\limits_{J_0}\frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}|d\tau|+\int\limits_{\partial\mathbb{D}\setminus J_0}\left(k\log\frac{|\tau-t_0|}{\lambda}+c\right)\frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}|d\tau|\leqslant c_0,$$

что и требуется для доказательства леммы 4. •

§6. Вспомогательные полиномы $Q_n(z)$

Выведем из леммы 4 очень важное для дальнейшего следствие. Через K_h обозначим внутренность линий уровня Γ_h, определенных в п. 1.

Лемма 5. *Пусть K — A-континуум, постоянная c_1 взята из* (3.3)*, $\alpha>0$, функции $\rho_h(\zeta)$ определены в п.* 1. *Существует постоянная $c_2=c_2(K,\alpha)$ и полиномы $Q_n(z)$, $\deg Q_n\leqslant c_2 n$, со следующими свойствами:*

$$\textit{полиномы}\quad Q_n(z)\neq 0\quad\textit{при}\quad z\in K_{\frac{c_1}{n}};\tag{6.1}$$

при $\zeta\in K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K$ выполнено

$$c_3(\alpha)\rho^{\alpha}_{\frac{c_2+1}{n}}(\zeta)\leqslant|Q_n(\zeta)|\leqslant c_4(\alpha)\rho^{\alpha}_{\frac{c_2+1}{n}}(\zeta).\tag{6.2}$$

Доказательство. Пусть число $\varkappa < 1$ выбрано для континуума K в (4.2); возьмем натуральное m так, чтобы $\beta = \frac{\alpha}{m} < \frac{1}{1+\varkappa}$. Предположим, что найдены полиномы q_n, $\deg q_n \leqslant c_5 n$ такие, что $q_n(z) \neq 0$ при $z \in K_{\frac{c_1}{n}}$ и справедливы соотношения

$$\tilde{c}_3 \rho^{\beta}_{\frac{c_2+1}{n}}(\zeta) \leqslant |q_n(\zeta)| \leqslant \tilde{c}_4 \rho^{\beta}_{\frac{c_2+1}{n}}(\zeta), \quad \zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K. \tag{6.3}$$

В таком случае полиномы $Q_n = q^m$ удовлетворяют условиям (6.1) и (6.2) с $c_3(\alpha) = \tilde{c}_3^m$, $c_4(\alpha) = \tilde{c}_4^m$, $c_2 = c_5 m$. Поэтому докажем существование полиномов q_n со свойствами (6.1) и (6.3). Положим $\tilde{K} = K_{\frac{c_1}{n}}$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\frac{c_1}{n}}$. Континуум $\tilde{K}$ — A-континуум, поэтому величина $\varkappa$ из (4.2) для него может быть определена не зависящей от n, при этом для линий уровня $\tilde{\Gamma}_h$ выполняется $\tilde{\Gamma}_h = \Gamma_{\frac{c_1}{n}+h}$. Пусть $\tilde{\rho}_h(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \tilde{\Gamma}_h)$. По лемме 4 для внешней функции $g_n(\zeta)$, определенной соотношением

$$|g_n(\zeta)| = \tilde{\rho}^{\beta}_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad \zeta \in \tilde{\Gamma}, \tag{6.4}$$

имеем $g_n \in \Lambda^{\beta}(\tilde{K})$ причем

$$|g_n(\zeta_1) - g_n(\zeta_2)| \leqslant c|\zeta_1 - \zeta_2|^{\beta}, \quad \zeta_1 \zeta_2 \in \tilde{K}, \tag{6.5}$$

где постоянная c не зависит от n.

Соотношения (6.4) и (6.5) вместе с прямыми теоремами приближения для A-континуумов ([4], гл. 9) дают полином q_n, $\deg q_n \leqslant c_5 n$, для которого

$$|g_n(\zeta) - q_n(\zeta)| \leqslant \frac{1}{3} \tilde{\rho}^{\beta}_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad \zeta \in \tilde{\Gamma}. \tag{6.6}$$

Из (6.6) имеем

$$|q_n(\zeta)| \leqslant |g_n(\zeta)| + |g_n(\zeta) - q_n(\zeta)| \leqslant \frac{4}{3} \tilde{\rho}^{\beta}_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad \zeta \in \tilde{\Gamma}, \tag{6.7}$$

$$|q_n(\zeta)| \geqslant |g_n(\zeta)| - |g_n(\zeta) - q_n(\zeta)| \geqslant \frac{2}{3} \tilde{\rho}^{\beta}_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad \zeta \in \tilde{\Gamma}. \tag{6.8}$$

Сравнивая (6.6) и (6.8), видим, что $|g_n(\zeta) - q_n(\zeta)| < |q_n(\zeta)|$ при $\zeta \in \tilde{\Gamma}$, тогда по теореме Руше количество нулей внутри $\tilde{\Gamma}$ у функций q_n и $g_n = q_n + (g_n - q_n)$ одинаково, и так как g_n — внешняя в $\tilde{K}$ функция, то $q_n(z) \neq 0$ при $z \in \tilde{K}$, что доказывает (6.1). Соотношение (6.3) теперь будет следовать из (6.7), (6.8) и того, что $\log|q_n(\Psi(t))|$ представляется в круге $\mathbb{D}$ интегралом Пуассона с помощью тех же выкладок, как в п. 5 при проверке условия (5.5). Лемма доказана. •

§7. Полиномы $R_n(z)$ на квадрате

В этом параграфе мы укажем некоторые вспомогательные полиномы R_n и оценим их на квадратах. Несмотря на чисто технический характер данного параграфа, его результаты имеют особое значение для получения в последующем экспоненциального убывания приближения внутри области. Исходя из значимости параграфа, подробно приведем арифметические выкладки, с помощью которых проверяются требуемые условия.

Лемма 6. *Пусть S_l — квадрат $\{ z = x + iy : -2l \leqslant x \leqslant 0,\ |y| \leqslant l \}$. Существует полином $R_n(z)$ степени $3n$ вида $R_n(z) = 1 + zp(z)$ со следующими свойствами:*

$$|R_n(z)| \leqslant 1, \quad z \in S_l; \tag{7.1}$$

существует положительная функция $c(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, такая, что если $z \in S_l$, $\operatorname{dist}(z, \partial S_l) \geqslant \varepsilon l$, то

$$|R_n(z)| \leqslant \exp(-c(\varepsilon)n). \tag{7.2}$$

Доказательство. Полагая $z = l\zeta$, получаем, что достаточно рассмотреть случай квадрата $S = S_1 = \{ z = x+iy : -2 \leqslant x \leqslant 0,\ |y| \leqslant 1 \}$ и для него построить полином R_n со свойствами (7.1) и (7.2). Пусть

$$r(z) = \left(1 + \frac{1}{3}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z^2\right) = 1 + \frac{1}{3}z\left(1 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z^2\right),$$
$$R_n(z) = (r(z))^n = 1 + \frac{n}{3}z(1 + \dots).$$

Таким образом, R_n — полином степени $3n$ нужного вида, и потому понятно, что (7.1) и (7.2) будут установлены, если докажем, что

$$|r(z)| \leqslant 1, \quad z \in \partial S_1, \tag{7.3}$$
$$|r(z)| \leqslant \exp(-c(\varepsilon)), \quad z \in S_1, \quad \operatorname{dist}(z, \partial S_1) \geqslant \varepsilon. \tag{7.4}$$

В силу того что $r(z) \not\equiv \mathrm{const}$, соотношение (7.4) будет следовать из (7.3) и принципа максимума. Итак, для завершения доказательства леммы 6 достаточно проверить (7.3). Пусть $\lambda = \frac{1}{3}z$; тогда при $z \in S_1$ имеем $\lambda \in S_{\frac{1}{3}} = \{ \lambda = u + iv : -\frac{2}{3} \leqslant u \leqslant 0,\ |v| \leqslant \frac{1}{3} \}$. Следовательно, осталось установить такой чисто технический факт.

Сублемма 6А. *Пусть $P(\lambda) = (1 + \lambda)(1 + \lambda^2)$. Тогда $|P(\lambda)| \leqslant 1$ при $\lambda \in S_{\frac{1}{3}}$.*

Доказательство сублеммы 6А. Проверим требуемое неравенство на границе $\partial S_{\frac{1}{3}}$.

1) $\lambda = iv$, $|v| \leqslant \frac{1}{3}$. Тогда $\lambda^2 = -v^2$, $|1 + \lambda|^2 = 1 + v^2$,

$$|P(\lambda)|^2 = (1 + v^2)(1 - v^2)^2 = (1 - v^4)(1 - v^2) \leqslant 1.$$

2) $\lambda = -\frac{2}{3} + iv$, $|v| \leqslant \frac{1}{3}$. В таком случае, используя соотношение

$$|P(\lambda)| = \sqrt{(3|1+\lambda|^2)\Big(\frac{1}{3}|1+\lambda^2|^2\Big)} \leqslant \frac{1}{2}\Big[3|1+\lambda|^2 + \frac{1}{3}|1+\lambda^2|^2\Big],$$

легко получим оценку

$$|P(\lambda)| \leqslant \frac{161}{243} < 1.$$

3а) $\lambda = -u \pm \frac{i}{3}$, $0 \leqslant u \leqslant \frac{5}{9}$. Проделав необходимые вычисления, найдем, что

$$|P(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}(|1+\lambda|^2 + |1+\lambda^2|^2) \leqslant \frac{77}{81} < 1.$$

3б) $\lambda = -u \pm \frac{i}{3}$, $\frac{5}{9} \leqslant u \leqslant \frac{2}{3}$. Действуем, как в 2:

$$|P(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\Big[3|1+\lambda|^2 + \frac{1}{3}|1+\lambda^2|^2\Big] \leqslant \frac{385}{486} < 1.$$

Сублемма 6А, а с нею и лемма 6 доказаны.

§8. Окончание доказательства теоремы 1

Пусть K — выпуклый континуум, отличный от отрезка, $\alpha > 0$ — нецелое. Пусть, далее, $f \in \Lambda^\alpha(K)$. Построим требуемое приближение. Прежде всего приблизим функцию f с помощью полиномов из леммы 2 в п. 3 и получим следующее выражение для остатка $f - p_n$:

$$f(z) - p_n(f;m,k)(z) = \iint\limits_{\mathbb{C}\setminus K} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\sigma_\zeta,$$

где функция h удовлетворяет условиям (3.2) и (3.3).

Возьмем постоянную c_1 из (3.3) и применим полиномы Q_n из леммы 5 п. 6. В силу того что $Q_n(z) \neq 0$ при $z \in K_{\frac{c_1}{n}}$, можем написать

$$\frac{f(z) - p_n(f;m,k)(z)}{Q_n(z)} = \iint\limits_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K} \frac{h(\zeta)}{Q_n(\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z} = \iint\limits_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z}\,d\sigma_\zeta.$$

Здесь мы положим $\frac{h(\zeta)}{Q_n(\zeta)} = H(\zeta)$.

Пусть

$$F_n(z) = \frac{f(z) - p_n(f;m,k)(z)}{Q_n(z)}.$$

Напомним, что по построению $p_n(f;m,k)(z)$ и $Q_n(z)$ справедлива оценка $|F_n(z)| \leqslant c$, $z \in \Gamma$. Выберем теперь число l так, чтобы континууму K можно было применять оценку (3.1) леммы 3. По хорошо известным свойствам приближения функции $\frac{1}{\zeta-z}$ [4], гл. 9, для A-континуума K существует полином $r_n(\zeta;z)$ от z, $\deg r_n \leqslant n$ такой, что справедливы соотношения

$$|r_n(\zeta;z)| \leqslant \frac{c}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}, \quad |z-\zeta| \leqslant \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad z \in K, \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus K; \tag{8.1}$$

$$\left|\frac{1}{\zeta-z} - r_n(\zeta;z)\right| \leqslant \frac{c}{|\zeta-z|}\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta-z|}\right)^l, \quad |z-\zeta| > \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad z \in K, \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus K. \tag{8.2}$$

Поэтому для функции $v_n(\zeta;z) = 1-(\zeta-z)r_n(\zeta;z)$ имеем соотношения

$$|v_n(\zeta;z)| \leqslant c, \quad |z-\zeta| \leqslant \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad z \in K, \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus K; \tag{8.3}$$

$$|v_n(\zeta;z) \leqslant c\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta-z|}\right)^l, \quad |z-\zeta| > \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \quad z \in K, \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus K. \tag{8.4}$$

Пусть теперь S_ζ, $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$ — квадрат со стороной $2\operatorname{diam} K_{\frac{c_1}{n}}$, построенный следующим образом: берем точку $\zeta_0 \in \Gamma$, ближайшую к ζ, проводим прямую t, перпендикулярную отрезку $[\zeta_0,\zeta]$ и проходящую через точку ζ. Выпуклое множество K лежит в одной из двух полуплоскостей, ограниченных прямой t. Квадрат S_ζ имеет точку ζ серединой одной из сторон длины $2\operatorname{diam} K_{\frac{c_1}{n}}$ и лежит в полуплоскости, содержащей K. Ясно, что $K \subset S_\zeta$ при любом $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$. Пусть $\theta(\zeta)$ — угол, который составляет вектор $\overline{\zeta_0,\zeta}$ с положительным направлением вещественной оси, $R_n(\zeta)$ — полином из леммы 6, построенный для квадрата со стороной $2\operatorname{diam} K_{\frac{c_1}{n}}$. Положим

$$R_n(\zeta;z) = R_n(e^{-i\theta(\zeta)}(z-\zeta)).$$

Тогда $R_n(\zeta;z)$ — полином от z степени $3n$ — удовлетворяет соотношениям

$$R_n(\zeta,z) = 1+(\zeta-z)V_n(\zeta;z),$$

V_n — полином от z;

$$|R_n(\zeta;z)| \leqslant 1, \quad z \in S_\zeta; \tag{8.5}$$

$$|R_n(\zeta,z)| \leqslant \exp(-c(\varepsilon)n), \quad z \in S_\zeta, \quad \operatorname{dist}(z,\partial S_\zeta) \geqslant \varepsilon \operatorname{diam} K_{\frac{1}{n}}. \tag{8.6}$$

Пусть, далее,

$$R_n(\zeta;z)v_n(\zeta;z) = [1+(\zeta-z)V_n(\zeta;z)][1-(\zeta-z)r_n(\zeta;z)] \stackrel{\text{def}}{=} 1-(\zeta-z)U_n(\zeta;z) \tag{8.7}$$

В силу (8.7) функция $U_n(\zeta;z)$ — полином от z степени $\leqslant 4n-1$. Определим полином $q_n(z)$ следующим образом:

$$q_n(z)=\iint\limits_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K} H(\zeta)U_n(\zeta;z)d\sigma_\zeta.$$

Ясно, что q_n — полином от z степени $\leqslant 4n-1$. Теперь имеем при $z\in K$:

$$\begin{aligned}F_n(z)-q_n(z)&=\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}\frac{H(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta-\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}H(\zeta)U_n(\zeta;z)d\sigma_\zeta\\&=\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}H(\zeta)\frac{1-(\zeta-z)U_n(\zeta;z)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta\\&=\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}H(\zeta)R_n(\zeta;z)v_n(\zeta;z)\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}.\end{aligned}$$

Если $z\in\Gamma$, то (8.5), (6.2), (3.2), (3.6) — выбор l влекут

$$\begin{aligned}|F_n(z)-q_n(z)|&\leqslant\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}|H(\zeta)||R_n(\zeta;z)||v_n(\zeta;z)|\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|}\\&\leqslant c\iint_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}\frac{\operatorname{dist}^{\alpha-1}(\zeta,\Gamma)}{\rho^{\alpha}_{\frac{1}{n}}(\zeta)}\left(\frac{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{|\zeta-z|+\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}\right)^l\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|}\\&\leqslant c.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Если же z строго внутри K, то из (8.6), (6.2), (3.2) и (3.6) получаем

$$|F_n(z)-q_n(z)|\leqslant e^{-\tilde{c}n}\iint\limits_{K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K}|H(\zeta)||v_n(\zeta,z)|\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|}\leqslant ce^{-\tilde{c}n}.\tag{8.9}$$

Положим теперь для окончательного приближения функции f полином π_n, $\deg\pi_n\leqslant cn$, равным

$$\pi_n(z)=p_n(f;m,k)(z)+Q_n(z)q_n(z).$$

Тогда при $z\in\Gamma$ с учетом (8.8) и того, что $|F_n(z)|\leqslant c$, $|Q_n(z)|\asymp\rho^{\alpha}_{\frac{1}{n}}(z)$, имеем

$$\begin{aligned}|f(z)-\pi_n(z)|&=|f(z)-p_n(f;m,k)(z)-Q_n(z)q_n(z)|\\&=|F_n(z)Q_n(z)-q_n(z)Q_n(z)|=|F_n(z)-q_n(z)||Q_n(z)|\\&\leqslant c\rho^{\alpha}_{\frac{1}{n}}(z).\end{aligned}\tag{8.10}$$

Если же z строго внутри, то (8.9) влечет

$$|f(z)-\pi_n(z)|=|F_n(z)-q_n(z)||Q_n(z)|\leqslant ce^{-\tilde{c}n},\tag{8.11}$$

где $\tilde{c}$ зависит от отношения $\frac{\operatorname{dist}(z,\Gamma)}{\operatorname{diam}K}$. Соотношения (8.10) и (8.11) доказывают теорему 1.

§9. Доказательство теоремы 3

Если проанализировать доказательство теоремы 1, то окажется, что единственное обстоятельство, при котором существенно использовалась выпуклость континуума K — это возможность для каждого $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$ найти квадрат S_ζ, содержащий K, причем $\zeta \in S_\zeta$ и полином $R_n(\zeta, z) = 1 + (\zeta - z)V_n(\zeta; z)$ степени cn, ограниченной единицей в S_ζ. Для невыпуклых континуумов K найти требуемые квадраты S_ζ невозможно. Однако если вместо квадратов рассматривать более общие области S_ζ, содержащие K, на границе которых находится ζ, так, чтобы можно было найти полином K того же вида, ограниченный единицей в S_ζ, то все остальное доказательство проходит и для области с C^2-гладкой границей.

Видоизменим области S_ζ и полином $R_n(\zeta; z)$ для данного случая. В силу C^2-гладкости $\Gamma = \partial K$, из геометрических соображений понятно, что для каждой точки $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$ существует область S_ζ со следующими свойствами:

$$K \subset S_\zeta \quad \text{для любого} \quad \zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K; \tag{9.1}$$

∂S_ζ — C^2-гладкая, причем C^2-гладкость равномерна по

$$\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K; \tag{9.2}$$

$$\text{длина} \quad |\partial S_\zeta| \quad \text{ограничена равномерно по} \quad \zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K; \tag{9.3}$$

S_ζ — A-континуум с одной и той же постоянной A для любого

$$\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K; \tag{9.4}$$

имеется полуокружность γ_ζ фиксированного радиуса ρ_0, не зависящего от ζ, такая, что

$$\gamma_\zeta \subset \partial S_\zeta \text{ и } \zeta \text{ — середина } \gamma_\zeta. \tag{9.5}$$

Отметим, что C^2-гладкость границы ∂K нужна для обеспечения свойств (9.2) и (9.5). Пусть функция $f(\zeta; z)$ отображает конформно S_ζ на круг $D_0 = \{\, w : |w + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \,\}$, причем $f(\zeta; \xi) = 0$ и $f(\zeta; z_0) = -\frac{1}{2}$, где $z_0 \in K$ — фиксированная точка. Пользуясь теоремами о сходимости последовательностей областей к ядру ([23], гл. 2) и свойствами (9.1)–(9.5), областей S_ζ, с помощью рутинных соображений, связанных с принципом Монтеля, получим следующее утверждение.

Лемма 7. *Для функций $f(\zeta; z)$ справедливо соотношение*

$$f(\zeta; z) = a_\zeta(z - \zeta) + b_\zeta(z - \zeta)^3 + (z - \zeta)^3\varphi(\zeta; z), \tag{9.6}$$

где

$$0 < a_1 \leqslant |a_\zeta| \leqslant a_2, \quad |b_\zeta| \leqslant b, \tag{9.7}$$

a_1, a_2, b не зависят от ζ; функция $\varphi(\zeta;z)C^2$-гладкая в S_ζ, причем ее C^2-гладкость равномерна по

$$\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K \quad \textit{и} \quad |\varphi(\zeta;z)| \leqslant \hat{c}. \tag{9.8}$$

Теперь, пользуясь (9.8) и свойствами (9.1)-(9.5) области S_ζ, для распространенного теперь способа приближения функций ([4], гл. 9) на континуумах комплексной плоскости получим следующую равномерную по ζ аппроксимацию.

Лемма 8. *Существует постоянная c_*, не зависящая от $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$, такая, что при $m > m(K)$, $k > k(K)$ для полиномов $p_{N,\zeta}(\cdot;m,k)(z)$, построенных для области S_ζ, справедлива оценка*

$$|\varphi(\zeta;z) - p_{N,\zeta}(\varphi(\zeta;\cdot);m,k)(z)| \leqslant \frac{c_7}{N^2}, \quad z \in S_\zeta. \tag{9.9}$$

Выберем теперь $\lambda_0 > 0$ удовлетворяющим неравенствам

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\pi}{2}\rho_0; \quad b\lambda_0 + \hat{c}\lambda_0^2 \leqslant \frac{a_1}{2}, \tag{9.10}$$

и пусть σ_ζ — дуга γ_ζ с серединой в ζ длины $2\lambda_0$. Тогда образ $f(\zeta;\sigma_\zeta)$ содержит дугу t с серединой в точке 0 и длины не менее $a_1\lambda_0$, что следует из (9.6)-(9.8) и (9.10), поскольку при $\xi \in \sigma_\zeta$ имеем

$$\begin{aligned}|f(\zeta;\xi) - f(\zeta;\zeta)| &= |a_\zeta(\xi-\zeta) + b_\zeta(\xi-\zeta)^2 + (\xi-\zeta)^3\varphi(\zeta;\xi)|\\ &\geqslant |\xi-\zeta|(|a_\zeta| - |b_\zeta||\xi-\zeta| - \hat{c}|\xi-\zeta|^2) \geqslant |\xi-\zeta|\cdot\frac{1}{2}a_1.\end{aligned}$$

Пусть S — квадрат $\{z = x+iy : -2 \leqslant x \leqslant 0,\ |y| \leqslant 1\}$. Определим число δ_0 удовлетворяющим неравенствам

$$\delta_0(1 + \operatorname{diam} S_\xi)^3 \leqslant \operatorname{dist}(\partial D_0 \setminus t, \partial S), \tag{9.11}$$

$$\delta_0\lambda_0 \leqslant \left(\frac{a_1}{2}\right)^2. \tag{9.12}$$

Из соотношения (9.12) следует, что при $|\xi-\zeta| \leqslant \lambda_0$ справедливо

$$\delta_0|\xi-\zeta|^3 \leqslant \left(\frac{a_1}{2}|\xi-\zeta|\right)^2. \tag{9.13}$$

Из (9.11)-(9.13) находим, что при $\xi \in \partial S_\zeta$ круг с центром в точке $f(\zeta;\xi)$ и радиуса $\delta_0|\xi-\zeta|^3$ лежит внутри квадрата S. Выберем теперь N_0 так, чтобы $\frac{c_*}{N_0^2} \leqslant \delta_0$, c_* взято из (9.9). Тогда (9.9) дает

$$\begin{aligned}&|f(\zeta;z) - a_\zeta(z-\zeta) - b_\zeta(z-\zeta)^2 - (z-\zeta)^3 p_{N_0,\zeta}(\varphi(\zeta;\cdot);m,k)(z)|\\ &\quad = |z-\zeta|^3|\varphi(\zeta;z) - p_{N_0\zeta}(\varphi(\zeta;\cdot);m,k)(z)| \leqslant \delta_0|z-\zeta|^3.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Значит, если положить

$$M(\zeta;z)=a_\zeta(z-\zeta)+b_\zeta(z-\zeta)^2+(z-\zeta)^3p_{N_0,\zeta}(\varphi(\zeta;\cdot),m,k)(z),$$

то (9.14) и выбор δ_0 влекут, что значения полинома от z $M(\zeta;z)$ степени $\leqslant N_0+3$ при $z\in S_\zeta$ лежат в квадрате S, причем $M(\zeta;\zeta)=0$. Положим

$$R_n(\zeta;z)=\left[\left(1+\frac{1}{3}M(\zeta;z)\right)\left(1+\frac{1}{9}M^2(\zeta;z)\right)\right]^n.$$

В соответствии с результатами 4.8 полином $R_n(\zeta;z)$ — требуемый, $\deg R_n\leqslant(N_0+3)n$. Применяя полином $R_n(\zeta;z)$ буквально как в п. 8, получаем доказательство теоремы 3.

§10. Окончание доказательства теоремы 2

Так же, как и в п. 8 и 9, с учетом вспомогательных результатов 2–7, для завершения доказательства теоремы 2 достаточно указать области $S_\zeta\supset K$, $\zeta\in K_{\frac{c_1}{n}}\setminus K$, и полиномы $R_n(\zeta;z)$, $\deg R_n\leqslant c_n$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$|R_n(\zeta;z)|\leqslant c_1,\quad z\in S_\zeta \tag{10.1}$$

$$|R_n(\zeta;z)|\leqslant\exp(-c_2(\varepsilon_0)n^{\frac{\beta}{2}}),\quad z\in S_\zeta,\quad \operatorname{dist}(z,\partial S_\zeta)\geqslant\varepsilon_0\operatorname{diam}S_\zeta, \tag{10.2}$$

$$R_n(\zeta,z)=1+(\zeta-z)V_n(\zeta;z). \tag{10.3}$$

Укажем требуемый полином от z $R_n(\zeta;z)$. Пусть $n=MN$, где M и N определим ниже, и положим

$$R_n(\zeta;z)=(r_M(\zeta;z))^N,$$

где $r_M(\zeta;z)=1+(\zeta-z)v(\zeta;z)$ — некоторый полином от z, $\deg r_M\leqslant M$. Тогда $R_n(\zeta;z)$ — полином от z, $\deg R_n\leqslant n$. Для построения r_M нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть S' — A-континуум, диаметр которого равен B, содержащий на своей границе отрезки $[A_0,A_1]$ и $[A_0,A_2]$, $|A_1-A_0|=|A_2-A_0|=\delta_0$, причем внешний по отношению к S угол между $[A_0,A_1]$ и $[A_0,A_2]$ равен $\pi\beta$, $0<\beta<1$. Точка $z_0\in S$ лежит на биссектрисе $\angle A_1A_0A_2$, $|A_0-z_0|=\frac{\delta_0}{4A}$. Предположим далее, что, кроме точки A_0, граница ∂S C^2-гладкая, и если дугу $\partial S\setminus([A_0,A_1]\cup[A_0,A_2])$ параметризовать ее длиной, $\zeta=\zeta(\sigma)$, то $|\zeta''(\sigma)|\leqslant L$. Тогда существует постоянная c, зависящая только от A,B,δ_0,β,L (и не зависящая от конкретного вида континуума S), такая, что для функции $f(z)$, конформно отображающей S на круг $\{t:|t+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$ с нормировкой $f(A_0)=0$, $f(z_0)=-\frac{1}{2}$, найдутся полиномы p_M, $M=1,2,\dots$, $\deg p_M\leqslant M$ такие, что*

$$|f(z)-p_M(z)|\leqslant\frac{c}{M^{\beta\gamma}},\quad \gamma=\frac{1}{2-\beta},$$

и $p_M(A_0) = 0$.

Доказательство леммы 9 получается, если в оценках погрешности для приближающих полиномов $p_M(f; m, k)(z)$, применяемых ранее в п. 2, учесть формулы для расстояний до линий уровня для A-континуумов, приведенные в [18], гл. 1, и в указанных там построениях для имеющейся в лемме 8 геометрической ситуации проследить за зависимостью соотношения формулы (1.3.11) из [18] исключительно от перечисленных в лемме 9 параметров, что и даст требуемое утверждение. •

Перейдем теперь непосредственно к завершению доказательства теоремы 3. Пользуясь условием β-сектора для континуума K, для каждой точки $\zeta \in K_{\frac{c_1}{n}} \setminus K$, где постоянная c_1 взята из (3.3), построим область S_ζ, которая бы в точке ζ имела внешний по отношению к K угол $\pi\beta$, $S_\zeta \supset K$ и S_ζ имела свойства области S из леммы 9, где $A_0 = \zeta$, причем параметры A, B, δ_0, L не зависели бы от ζ. Элементарные геометрические рассмотрения показывают, что это возможно. Пусть функция $f(\zeta; z)$ конформно отображает S_ζ на круг $\{\, t : |t+\frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \,\}$, $f(\zeta;\zeta) = 0$, $f(\zeta; z_0(\zeta)) = -\frac{1}{2}$, где точка $z_0(\zeta)$ построена для области S_ζ так же, как точка z_0 строилась для области S. Применяя лемму 9, найдем полином от z $p_M(\zeta; z)$, $p_M(\zeta;\zeta) = 0$, $\deg p_M(\zeta; z) \leqslant M$, для которого справедлива оценка

$$|f(\zeta; z) - p_M(\zeta; z)| \leqslant \frac{c_1}{M^{\beta\gamma}}, \quad z \in S_\zeta, \quad \gamma = \frac{1}{2-\beta}, \tag{10.4}$$

причем постоянная c_1 не зависит от ζ и M. Положим

$$r_M(\zeta; z) = 1 + p_M(\zeta; z).$$

Тогда по свойствам полинома $p_M(\zeta; z)$ можно написать $r_M(\zeta; z) = 1 + (\zeta - z)v(\zeta; z)$ и в силу (10.4) при $z \in S_\zeta$ заключаем, что

$$\begin{aligned} |r_M(\zeta; z)| &= |1 + p_M(\zeta; z)| = |1 + f(\zeta; z) + (p_M(\zeta; z) - f(\zeta; z))| \\ &\leqslant |1 + f(\zeta; z)| + \frac{c_1}{M^{\beta\gamma}} \leqslant 1 + \frac{c_1}{M^{\beta\gamma}}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Пусть теперь $N = [M^{\beta\gamma}]$, тогда для $R_n \overset{\text{def}}{=} (r_M)^N$ с учетом (10.5) имеем

$$|R_n(\zeta; z)| \leqslant \left(1 + \frac{c_1}{M^{\beta\gamma}}\right)^N \leqslant \left(1 + \frac{c_1}{M^{\beta\gamma}}\right)^{M^{\beta\gamma}} \leqslant e^{c_1},$$

что и представляет собой требуемое соотношение (10.1). Для проверки (10.2) учтем, что $R_n = r_M^N$ и $n = MN \asymp M^{1+\beta\gamma}$, т.е. $M \asymp n^{\frac{1}{1+\beta\gamma}}$, $M^{\beta\gamma} \asymp n^{\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}}$, а

$$\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma} = \frac{\frac{\beta}{2-\beta}}{1 + \frac{\beta}{2-\beta}} = \frac{\beta}{2}. \tag{10.6}$$

Поскольку ясно, что для $z \in S_\zeta$, $\operatorname{dist}(z, \partial S_\zeta) \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{diam} S_\zeta$ имеется $q = q(\varepsilon_0) < 1$ такое, что $|f(\zeta; z)| \leqslant q$, то (10.2) будет следовать из (10.4), выбора N и (10.6).

Теперь, если полиномы $R_n(\zeta; z)$ и области S_ζ подставить в рассуждения п. 8 вместе с полученными оценками (10.1) и (10.2), то буквально те же, что и в п. 8, выкладки дадут требуемые для теоремы 2 оценки, завершающие ее доказательство. •

Список литературы

[1] Мергелян С. Н., *Некоторые вопросы конструктивной теории функций*, Тр. МИАН СССР **37** (1951), 1–92.

[2] Дзядык В. К., *О проблеме С. М. Никольского в комплексной области*, Изв. АН СССР, Сер. мат. **23** (1959), № 5, 697–736.

[3] Дзядык В. К., *Обратные теоремы теории приближения функций в комплексных областях*, Укр. мат. журн. **15** (1963), № 4, 365–375.

[4] Дзядык В. К., *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.

[5] Широков Н. А., *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах с ненулевыми внешними углами*, Изв. АН АрмССР **II** (1974), № 1, 62–80.

[6] Saff E. B., Totik V., *Behavior of polynomiala of best uniform approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **316** (1989), no. 2, 567–593.

[7] Shirokov N. A., Totik V., *Polynomial approximation on the boundary and strictly inside*, to appear in Constructive Approximation.

[8] Maimeskul V. V., *Degree of approximation of analytic functions by hear best polynomial approximants*, to appear in Constructive Appriximation.

[9] Shirokov N. A., *Analytic functions smooth up to the boundary*, Lect. Notes in Math., vol. 1312, 1983.

[10] Shirokov N. A., *Jackson-Bernstein theorem in strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$*, Const. Appr. **5** (1989), 455–461.

[11] Широков Н. А., *Прямая теорема в строго выпуклой области в $\mathbb{C}^n$*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 206, 1993.

[12] Siciak J., *Extremal points in the space C^n*, Coll. Math. **11** (1964), no. 2, 157–163.

[13] Лебедев Н. А., Широков Н. А., *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число условных точек с ненулевыми внешними углами*, Изв. АН АрмССР **6** (1971), № 4, 311–341.

[14] Дзядык В. К., *О применении обобщенных многочленов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов A^Γ в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей*, Укр. мат. журн. **24** (1973), № 1, 3–19.

[15] Широков Н. А., *Аппроксимация на предельном континууме вырожденной клейновой группы*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 206, 1993.

[16] Альфорс Л., *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[17] Широков Н. А., *Конструктивное описание классов Гёльдера на замкнутых жордановых кривых*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 141, 1985, с. 72–99.

[18] Белый В. И., *Метод конформных инвариантов в теории приближения функций комплексного переменного*, Докт. дисс., Донецк, 1978.

[19] Широков Н. А., *Приближение непрерывных аналитических функций в областях с ограниченным граничным вращением*, ДАН СССР **228** (1976), № 4, 800–812.

[20] Тамразов П. М., *Гладкости и полиномиальные приближения*, Наук. думка, Киев, 1975.

[21] Дынькин Е. М., *Гладкости интегралов типа Коши*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, с. 115–133.

[22] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.

[23] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[24] Shapiro H. S., *Remarks concernug domains of Smirnov type*, Michigan Math. J. **13** (1966), 314–348.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет

Поступило 26 августа 1993 г.