М. А. Осипова, Теорема мультипликативности для взаимодействующих систем обслуживания, *Дальневост. матем. журн.*, 2002, том 3, номер 1, 61–63

УДК 519.2
MSC 2000 60K25,60K30

© М.А. Осипова*

Теорема мультипликативности для взаимодействующих систем обслуживания

В настоящей работе рассматриваются две взаимодействующие системы массового обслуживания, находящиеся в режиме адаптации. Показано, что стационарное распределение этих систем не зависит от их взаимодействия.

Ключевые слова и фразы: *сети массового обслуживания, теорема мультиликативности, режим адаптации.*

L-Марковские процессы используются для описания функционирования различных систем и сетей массового обслуживания (МО). Особый интерес вызывают сети МО со случайно меняющейся интенсивностью входного потока. Предположив, что интенсивность входного потока пропорциональна интенсивности обслуживания (введя тем самым гипотезу адаптации), в [1] была доказана теорема мультипликативности, с помощью которой можно эффективно рассчитывать стационарное распределение двумерного марковского процесса, описывающего функционирование таких систем.

Далее при совместной работе с Д. Баумом в [2] удалось распространить эту теорему на случай многомерного марковского процесса, переходные интенсивности которого зависят от переходных интенсивностей его компонент и функционального множителя, равного константе, если следовать гипотезе адаптации. Задание таким образом переходных интенсивностей есть формальное выражение предположения о существовании в рассматриваемой сети (системе) адаптивного режима. В данной работе на примере двух таких систем показано как можно использовать полученную теорему для расчета стационарных распределений процессов, описывающих их функционирование. Эти результаты основаны на предположении существования режима адаптации системы к изменчивости входного потока, в первой модели и между двумя взаимодействующими системами, во второй модели. Оказалось, что теорема мультипликативности инвариантна относительно предполагаемых зависимостей.

Пусть $x_n(t), t \geq 0$, однородный марковский процесс с дискретным множеством состояний X_n, переходными интенсивностями $\lambda_n(i_n, j_n)$, $i_n, j_n \in X_n$, удовлетворяющий достаточным условиям эргодичности, которые являются одновременно достаточными для существования стационарного распределения $\pi_n(i_n)$, $i_n \in X_n$ (см. [1]). Обозначим

$$I = \{1, 2, \ldots, N\},\ I_n = \{k \in I,\ k \neq n\},\ \vec{i} = (i_k,\ k \in I),\ \vec{i_n} = (i_k,\ k \in I_n),$$

$$X_I = \otimes_{k\in I} X_k,\ X_{I_n} = \otimes_{k\in I_n} X_k,\ \Pi(\vec{i}) = \prod_{n\in I} \pi_n(i_n).$$

Рассмотрим N-мерный процесс $(x'_1(t), \ldots, x'_N(t))$ с множеством состояний X_I и переходными интенсивностями

$$\Lambda(\vec{i}, \vec{j}) = \sum_{n\in I} c_n(\vec{i_n})\delta(\vec{i_n}, \vec{j_n})\lambda(i_n, j_n),$$

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: mao@iam-mail.febras.ru

где δ символ Кронекера, а $c_n(\vec{i_n})$, $\vec{i_n} \in X_n$, $n \in I$, положительные ограниченные функции, т.е.

$$0 < c_n(\vec{i_n}) < \infty.$$

Теорема мультипликативности *Марковский процесс* $(x_1'(t), \ldots, x_N'(t))$ *эргодический и* $\Pi(\vec{i})$ *является его стационарным распределением.*

Доказательство этого факта смотрите в [2].

Рассмотрим систему МО, функционирование которой, описывается процессом гибели и рождения $x_2(t)$ с интенсивностями λ_j, μ_j, $j \in J$. Предположим, что на вход этой системы поступает пуассоновский поток интенсивности $x_1(t)$, где $x_1(t)$ процесс гибели и рождения с интенсивностями α_i, β_i, $i \in I$ и что интенсивность входного потока пропорциональна интенсивности обслуживания, т.е. система работает в режиме адаптации. Изменчивость интенсивности связана с подключением к входному потоку или отключением от него источников заявок. Функционирование такой системы можно описать марковским процессом $(x_1(t), x_2'(t))$ с переходными интенсивностями из рисунка 1 (здесь $g(i)$ положительная ограниченная функция). По теореме мультипликативности процесс $(x_1(t), x_2'(t))$ эргодический и его стационарное распределение имеет вид

$$\Pi_{(i,j)} = \pi_1(i)\pi_2(j), \ i \in I, \ j \in J, \tag{1}$$

где $\pi_1(i), \pi_2(j)$ стационарные распределения эргодических процессов $x_1(t), x_2(t)$ соответственно. Система МО такого вида может служить моделью управляемых систем, в которых блок управления инициализирует задания исполнительному блоку. Существование адаптивного режима, который формально задается через переходные интенсивности процесса $(x_1(t), x_2'(t))$ оправдано тем, что динамика физиологической и умственной активности людей, живущих в одном часовом поясе, одинакова (см. [3]).

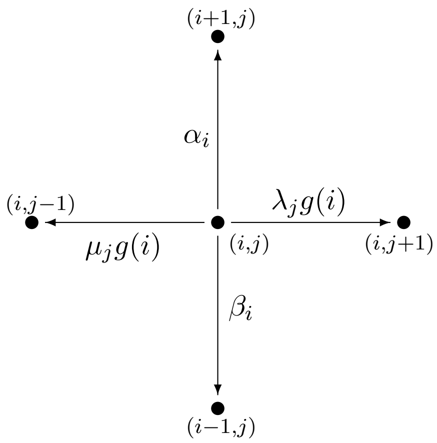

рис. 1

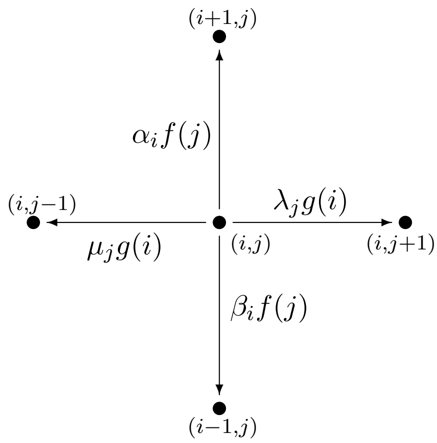

рис. 2

Теперь предположим, что процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ описывают функционирование двух взаимодействующих систем массового обслуживания МО, зависимость между которыми выражается в адаптивной реакции одной системы на состояние другой системы. Такое взаимодействие можно описать марковским процессом $(x_1'(t), x_2'(t))$ с переходными интенсивностями из рисунка 2 (здесь $f(j)$ положительная ограниченная функция). Этот процесс эргодический и его стационарное распределение рассчитывается по мультипликативной формуле (1). Рассмотренная система является, например, моделью работы двух экономических единиц в условиях конкурентной борьбы.

В качестве процесса $x_i(t)$, $i = 1, 2$, можно брать любой однородный марковский процесс с дискретным множеством состояний, удовлетворяющий достаточным условиям эргодичности, а значит, можно рассматривать не только системы МО, но и сети, функционирование которых описывается этим процессом. В частности, можно брать сети Джексона или BCMP-сети (см. [2]).

Список литературы

[1] *Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Кольев Н.В.* Вычисление стационарного распределения в адаптивных сетях массового обслуживания. ДВ мат. журнал, т. 1, № 2, 2001.

[2] *G.Sh. Tsitsiashvili, M.A. Osipova, N.V. Koliev, D. Baum.* A Product Theorem for Markov Chains with Application to PF-Queueing Networks. University of Trier, 2001, 18 p.

[3] *Глыбин Л.Я.* Ритм жизни человеческого общества. Открытие феномена. Владивосток, 1996, 154 с.

Представлено в Дальневосточный математический сборник в окончательной форме 26 октября 2001

Osipova M.A., The product theorem for interacting queueing system. Far Eastern Mathematical Journal, 2002. v. 3, № 1, pp. 61–63.

SUMMARY

In the present work two interacting queueing systems which are in a regime of an adaptation are considered. It is shown, that stationary distribution of these systems does not depend on their interactions.