В. Э. Адлер, Ю. Ю. Берест, В. М. Бухштабер, П. Г. Гриневич, Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, А. Н. Сергеев, М. В. Фейгин, Д. Фельдер, Е. В. Ферапонтов, О. А. Чалых, П. И. Этингоф, Александр Петрович Веселов (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2016, том 71, выпуск 6, 172–188

2016 г. ноябрь — декабрь *т. 71, вып. 6 (432)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Александр Петрович Веселов

(к шестидесятилетию со дня рождения)

4 мая 2015 г. исполнилось шестьдесят лет со дня рождения великолепного математика, яркого преподавателя, замечательного коллеги и товарища Александра Петровича Веселова. Научные интересы Александра Петровича необычайно широки. Наряду с вкладом в теорию и развитие интегрируемых систем, являющимся основным для научной деятельности А. П. Веселова, ему также принадлежат важные открытия в геометрии, теории дифференциальных уравнений и спектральной теории, теории представлений, теории специальных и симметрических функций.

Детство Александра Петровича прошло в деревне Волчихово неподалеку от города Удомли в Калининской (Тверской) области. Развитию математического таланта помогала мама, работавшая школьной учительницей. Ходить в школу приходилось несколько километров пешком, а делать уроки – при тусклом свете керосиновой лампы. Красота этих мест отражена в известных картинах Левитана “Март” и “Над вечным покоем”.

Решающим этапом в математическом становлении А. П. Веселова стало поступление в 1970 г. в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ (впоследствии СУНЦ им. А. Н. Колмогорова) в результате успешного выступления на Всесоюзной математической олимпиаде в Симферополе. В то время Андрей Николаевич принимал активное личное участие в работе школы-интерната, что оказало большое влияние на Александра Петровича. Впоследствии А. П. Веселов сам участвовал в преподавании в интернате, организовывал встречи учеников ФМШ с ведущими математиками.

В том же 1970 г. начинает выходить журнал “Квант” для школьников, и Александр Петрович становится активным читателем, а позднее и автором журнала [6]–[8].

В 1972 г. А. П. Веселов поступает на механико-математический факультет МГУ. Еще со школьных времен Александр Петрович интересуется геометрией, и изначально он выбирает научным руководителем А. Т. Фоменко, однако вскоре решает перейти под руководство С. П. Новикова, который оказал решающее влияние на формирование его математического вкуса. По окончании аспирантуры в 1981 г. Александр Петрович защищает кандидатскую диссертацию “Геометрия гамильтоновых систем, связанных с нелинейными уравнениями в частных производных”. Он становится сотрудником Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау в пос. Черноголовка.

DOI: 10.4213/rm9734

Это время можно по праву отнести к периоду расцвета института. Научно-исследовательская работа в ИТФ и общение с выдающимися физиками-теоретиками (такими, как А. А. Белавин, В. А. Фатеев, В. А. Казаков, А. Б. Мигдал, братья Замолодчиковы и другие) оказали серьезное влияние на будущие научные интересы Александра Петровича.

В 1984 г. А. П. Веселов переходит на работу в МГУ на кафедру высшей геометрии и топологии механико-математического факультета. После защиты в 1991 г. докторской диссертации "Геометрия интегрируемых систем с дискретным и непрерывным временем" он становится профессором МГУ и работает в этой должности до 1995 г.

Непосредственная работа со студентами раскрыла талант прекрасного преподавателя. А. П. Веселов преобразил традиционные курсы аналитической геометрии и линейной алгебры. Необычайно яркие и интересные лекции привлекали большое количество студентов и аспирантов на специальные курсы, читавшиеся А. П. Веселовым. Он организовал очень успешный собственный научный семинар, заседания которого, как правило, затягивались до позднего вечера. Среди студентов Александра Петровича в те годы были В. М. Гончаренко, А. А. Обломков, А. В. Пенской, М. В. Фейгин, О. А. Чалых; тогда же активным участником научного семинара становится Ю. Ю. Берест.

Ведя научную и преподавательскую работу в МГУ, А. П. Веселов одновременно работает со школьниками в родной 18-й ФМШ. Период преподавания там составляет более десяти лет – с 1978 по 1988 г. Помимо чтения общих курсов геометрии и анализа А. П. Веселов руководил математическим кружком, а также неоднократно сопровождал команду учащихся на традиционный фестиваль юных математиков, проходивший в Батуми.

Начиная с 1995 г. и по сей день А. П. Веселов является профессором университета Лафборо (Великобритания). За это время он внес большой вклад в преобразование математического факультета во всемирно известный научный центр по геометрии и интегрируемым системам. Среди сотрудников факультета много математиков с мировым именем, включая таких представителей московской математической школы, как А. В. Болсинов, А. И. Нейштадт и Е. В. Ферапонтов. Любовь Александра Петровича к красивой математике, тонкий вкус и энциклопедическое знание предмета привлекают к нему как экспертов, так и начинающих математиков.

По инициативе Александра Петровича Лондонское математическое общество учредило серию летних математических школ для младшекурсников Великобритании, первая из которых состоялась в Лафборо в 2015 г. Семинар "Геометрия и математическая физика", которым А. П. Веселов руководит в Лафборо более 20 лет, широко известен в Великобритании своим выдающимся научным уровнем, сочетающимся с неформальным и дружеским стилем обсуждений. Заседания семинара порой продолжаются более двух часов, после чего научные дискуссии переносятся в паб. Другим очень успешным проектом А. П. Веселова является семинар "Математические обзоры". Сотрудники и аспиранты собираются вместе на еженедельные заседания во время ланча и обсуждают разнообразные общематематические темы. Ставший традиционным математический "Рождественский конкурс" для студентов Лафборо успешно продолжает лучшие традиции российских математических олимпиад, что является редкостью в Великобритании. Наконец, ежегодный "Интегрируемый день", организуемый Александром Петровичем, стал настоящей визитной карточкой Лафборо. Эксперты из университетов Бата, Кембриджа, Глазго, Лондона, Кента, Лидса, Оксфорда, Йорка и других мест каждый год с нетерпением ожидают этого события.

Александр Петрович взрастил целую плеяду аспирантов в Лафборо, в их числе В. М. Гончаренко (матричные солитоны и безмонодромные матричные операторы Шрёдингера), М.-П. Гроссе (эллиптические полиномы Бернулли и теория операторов

Ламе), Г. Кемп (магнитные монополи Дирака и их дискретные аналоги), М. В. Фейгин (квантовые интегрируемые системы), А. Хемери (теория операторов Уиттекера–Хилла и тривиальная монодромия), В. Хезе-Хилл (спектральные свойства интегрируемых операторов Шрёдингера с сингулярными потенциалами) и В. Шрайбер (специальные конфигурации векторов в геометрии и интегрируемых системах).

Замечательно, что, несмотря на большую занятость, Александр Петрович находит время и энергию на еще одно пламенное увлечение своей жизни: школьную математику. В течение многих лет, при помощи лишь своих аспирантов, он вел еженедельные математические кружки для школьников в Лафборо, включая ставшие популярными матбои. В 2012–2015 гг. А. П. Веселов являлся членом Комитета по образованию Лондонского математического общества.

Говоря о работе и жизни А. П. Веселова в Лафборо, нельзя не упомянуть его супругу Ларису Евгеньевну и необыкновенное гостеприимство их дома, распространяющееся на визитеров и друзей. Многие из нас хранят самые добрые воспоминания о яблонях в их замечательном саду, о вечерах с игрой на фортепиано и гитаре, а также о верном друге, спаниеле Джиме.

Описание основных результатов и научных достижений А. П. Веселова следует начать с работ конца 1970-х годов. В то время одной из центральных тем математической физики была теория конечнозонных операторов, развиваемая школой С. П. Новикова. А. П. Веселов стал активным участников программы развития метода конечнозонного интегрирования.

Одна из первых работ А. П. Веселова [1] (1979) была посвящена вычислению ядра гамильтонова оператора иерархии Гельфанда–Дикого и построению гамильтонова формализма уравнения коммутативности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Конечнозонное интегрирование уравнений с одной пространственной переменной существенно базируется на том, что стационарные подмногообразия для линейных комбинаций высших потоков соответствующей иерархии в случае операторов взаимно простых порядков образуют конечномерные инвариантные подпространства, задаваемые условием коммутирования операторов, входящих в пару Лакса уравнения и допускающих естественное алгебро-геометрическое описание. Естественно возникла задача вычисления ограничения гамильтонова формализма на это подмногообразие. Лагранжев и, как следствие, гамильтонов формализм ограничения исследовался в работах И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого, однако из-за наличия нетривиального гамильтонова оператора в исходной системе возникла необходимость в вычислении его ядра и проверке некоторых условий невырожденности. А. П. Веселов вычислил ядро указанного гамильтонова оператора, установив его градиентный характер, что позволило введением множителей Лагранжа получить задачу со стандартной вариационной формулировкой. А. П. Веселов также показал, что для пар операторов взаимно простых порядков условия невырожденности гамильтонова оператора всегда выполнены, и тем самым завершил решение сформулированной выше задачи.

Первоначально гамильтонов формализм ограничений солитонных систем на стационарные решения высших уравнений описывался в терминах полевых переменных. Однако, как показал А. П. Веселов совместно с С. П. Новиковым [2], [3], наиболее прозрачный вид этот формализм приобретает в “спектральных” переменных (спектральная кривая и дивизор), при этом получаются так называемые “аналитические” скобки, теория которых была развита в работах [2], [3]. В рамках этого формализма в работе [2] была решена классическая задача вычисления переменных действие-угол для задачи о волчке Ковалевской, традиционно считающейся самой важной интегрируемой системой XIX века.

В 1983 г. А. П. Веселов совместно с С. П. Новиковым решили задачу выделения алгебро-геометрических данных, порождающих двумерные операторы Шрёдингера

с нулевым магнитным полем и вещественным потенциалом. Идея о том, что для пространственно-двумерных солитонных уравнений естественно рассматривать задачу рассеяния при одном уровне энергии, была предложена в 1976 г. в работе Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова (двумерные операторы Шрёдингера, "конечнозонные при одной энергии"), существенно использовавшей формализм L-A-B-троек С. В. Манакова. Естественно возникла постановка задачи о характеризации спектральных данных (комплексной ферми-кривой данного уровня энергии и дивизора на ней), отвечающих важной редукции тождественно нулевого магнитного поля (потенциальным операторам). Эта задача оказалась неожиданно сложной, и ее решение было дано в работе [4] в терминах так называемого дифференциала Чередника и голоморфной инволюции с парой неподвижных точек (дополнительное условие вещественности электрического поля означает инвариантность спектральных данных относительно антиголоморфной инволюции, коммутирующей с голоморфной). Как известно, многообразие Прима кривой с голоморфной инволюцией естественно главно поляризовано (и, соответственно, можно строить Θ-функции на примиане кривой), только если число неподвижных точек равно 0 или 2. В работе [5] А. П. Веселов и С. П. Новиков показали, что, при выполнении условия потенциальности, Θ-функции Римана в формуле для электрического поля редуцируются к Θ-функциям на примиане. Кроме того, в работе [5] была построена иерархия интегрируемых систем с двумя пространственными переменными, известная теперь как иерархия Веселова–Новикова.

Указанные работы оказали серьезное влияние на дальнейшее развитие теории интегрируемых систем, точно решаемых линейных операторов и связи теории солитонов с алгебраической геометрией. Одним из направлений стало построение теории рассеяния на одном уровне энергии для локализованных потенциалов (Р. Г. Новиков, П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, С. П. Новиков). Данная редукция и ее аналоги для дискретных систем в дальнейшем активно использовались в работах по характеризации примианов кривых (проблема Римана–Шоттки) методами теории интегрируемых систем (И. А. Тайманов, полное решение – И. М. Кричевер, С. Грушевский).

А. П. Веселову принадлежит также целый ряд основополагающих результатов в теории интегрируемых динамических систем с дискретным временем и двумерных дискретных уравнений. В этой области им заложены новые направления исследований, которые до сих пор активно разрабатываются математиками по всему миру.

Одно из таких направлений связано с изучением лагранжевых систем с дискретным временем. В работе [9] А. П. Веселовым была установлена интегрируемость стационарной задачи для анизотропной дискретной цепочки Гейзенберга: найдена производящая функция для первых интегралов, указана связь с конечнозонными разностными операторами Шрёдингера и построены тэта-функциональные решения. Помимо конкретных результатов, концептуально важным оказалось следующее простое наблюдение: отображение сдвига по узлам цепочки допускает естественную интерпретацию как динамическая система. До этого был известен еще лишь один пример интегрируемого отображения такого типа – биллиард на эллипсоиде. Вскоре Александру Петровичу удалось найти целый ряд аналогичных примеров, в том числе дискретизации волчка Эйлера, систем Неймана и Якоби в размерности n. Для таких отображений им была развита дискретная версия лагранжева и гамильтонова формализма и установлен дискретный аналог теоремы Лиувилля–Арнольда [11], [13]. Интегрируемые системы классической механики возникают из рассматриваемых дискретных систем в непрерывном пределе. Наоборот, дискретную систему можно рассматривать как специальную численную схему для решения непрерывной системы, причем такая схема обладает уникальными характеристиками благодаря своей интегрируемой природе.

А. П. Веселовым совместно с Ю. Мозером был обнаружен также общий алгебраический механизм, лежащий в основе интегрируемости большинства интересных

примеров: представление отображения как результата факторизации подходящего матричного многочлена от спектрального параметра и последующей перестановки сомножителей. Такое преобразование сохраняет спектр, что и приводит к наличию интегралов движения и алгебро-геометрическим формулам для решения, линеаризующим динамику на якобиане спектральной кривой.

Эта схема, известная как алгоритм Мозера–Веселова, служит естественным дискретным аналогом представления Лакса. Она была предложена и изучена в работах [15], [19], а в [43] было дано обобщение на случай отображений в бесконечномерной группе симплектических диффеоморфизмов плоскости. Две последние статьи были написаны в соавторстве с Юргеном Мозером, сотрудничество с которым оказало глубокое влияние на научную деятельность А. П. Веселова. Александр Петрович рассказывает о своем знакомстве с Мозером и об обсуждавшемся ими круге задач в статье [61].

Второе важное направление работы А. П. Веселова тех лет – исследование общих полиномиальных и рациональных отображений и соответствий в $\mathbb{C}^n$. В отличие от симплектического случая, здесь трудно дать универсальное определение интегрируемости. В статье [10] Александр Петрович предложил подход, основанный на существовании коммутирующих отображений. В этой работе обсуждается задача классификации таких отображений в $\mathbb{C}^n$, построено важное семейство таких отображений, связанных с алгебрами Ли, и исследованы их динамические свойства. Результаты этой работы являются нетривиальным обобщением результатов Г. Жюлиа, П. Фату и Дж. Ф. Ритта начала XX века, отвечающих случаю $n = 1$. С другой стороны, упомянутая задача является естественным дискретным аналогом теории коммутирующих дифференциальных операторов и теории обобщенных симметрий для уравнений в частных производных, активно развивающихся в математической физике после открытия метода обратной задачи рассеяния. Подход с коммутирующими отображениями использовался А. П. Веселовым и при классификации полиномиальных отображений из группы Кремоны – см. работу [12], где также впервые была отмечена важная связь интегрируемости отображения с полиномиальностью роста степеней у последовательности его итераций.

Отдельно следует упомянуть о такой специфике дискретного случая, как многозначные отображения, или соответствия. Они возникают естественным образом и очень важны, например, в теории представлений многозначных групп Бухштабера [31]. Но что следует понимать под решением такого соответствия? Для дифференциальных уравнений многозначность не играет большой роли, поскольку соображения непрерывности позволяют отделить разные ветви решения. Напротив, для дискретных уравнений само понятие ветви теряет смысл и под решением следует понимать всю совокупность величин, связанных данным соответствием. Структура этой совокупности описывается некоторым графом, природа которого может быть самой разной, от регулярной решетки до n-арного дерева. А. П. Веселову принадлежит бесспорный приоритет в исследовании этого феномена. В статьях [16], [20] показано, что признаком интегрируемости для симплектических соответствий является склейка образов при итерациях, благодаря чему их число имеет полиномиальный рост. Для общих алгебраических соответствий этот рост экспоненциальный, но и в этом случае наличие коммутирующего соответствия приводит к некоторому ограничению роста. Для однозначных отображений в качестве аналогичной числовой характеристики можно принять, например, сложность динамической системы по Арнольду (в случае плоскости – число пересечений кривой с образами другой кривой).

Итоги исследований интегрируемых отображений, а также возникающие в этой области гипотезы и нерешенные задачи описаны А. П. Веселовым в замечательных обзорах [17], [18], которые до сих пор дают пищу для размышлений как опытным,

так и молодым математикам. После 1992 г. его интересы смещаются в сторону дискретных аналогов уравнений в частных производных.

В современной математической физике двумерные дискретные и полудискретные уравнения возникают и как самостоятельные модели, и как вспомогательный инструмент при изучении непрерывных уравнений. Характерным примером является теория преобразований Бэклунда, которые можно интерпретировать как соответствие на бесконечномерном пространстве струй, причем свойство коммутативности (открытое Л. Бианки) оказывается центральным и в этой постановке. Работа А. П. Веселова и А. Б. Шабата [21] посвящена одевающей цепочке – дифференциально-разностному уравнению, описывающему итерации преобразования Дарбу для одномерного оператора Шрёдингера и коммутирующему с изоспектральным потоком, определяемым уравнением КдФ. Для этой цепочки построена гамильтонова теория и показано, что описание конечнозонных операторов Шрёдингера может быть полностью дано на языке ее периодических решений. Еще одно важное наблюдение, сделанное в этой работе, заключается в том, что некоторое ослабление условия периодичности выделяет новый точно решаемый класс потенциалов – обобщения гармонического осциллятора с линейно растущим дискретным спектром, которые выражаются через трансценденты Пенлеве и их высшие аналоги. Эти результаты послужили основой для целого ряда дальнейших исследований и обобщений как в теории интегрируемых уравнений, так и в спектральной теории операторов Шрёдингера и теории уравнений типа Пенлеве. Александр Петрович и сам неоднократно возвращался к этой теме: многополевая и матричная версии одевающей цепочки рассматривались в [30], [38], приложения в теории периодических цепных дробей – в [60].

Близким классом уравнений, в исследование которых Александр Петрович внес существенный вклад, являются отображения Янга–Бакстера. А. П. Веселовым и его соавторами был получен ряд важных результатов о динамических свойствах этих отображений, их гамильтоновой структуре, структуре лаксовых матриц и связях с другими типами интегрируемых уравнений, такими как квад-уравнения и матричное уравнение КдФ [47]–[49], [51], [55], [56], [65].

Другим важнейшим вкладом А. П. Веселова и его школы было обобщение конечнозонной теории на многомерный случай. Как показал С. П. Новиков в работе 1974 г., одномерный оператор Шрёдингера $L = -\partial^2 + u(x)$ с периодическим потенциалом $u(x)$, для которого существует коммутирующий оператор $M = \partial^{2m+1} + \cdots$, обладает замечательным спектральным свойством: в его спектре имеется конечное число лакун (конечнозонность). Важным примером является оператор Ламе $L = -\partial^2 + m(m+1)\wp(x,\tau)$, где $\wp$ – эллиптическая функция Вейерштрасса.

Если L – конечнозонный оператор, то, как заметили Дж. Л. Берчналл и Т. Чаунди уже в 20-х годах прошлого столетия, операторы L, M являются алгебраически зависимыми, т. е. удовлетворяют полиномиальному уравнению $M^2 = f(L)$, $f = -t^{2m+1} + \cdots \in \mathbb{C}[t]$, которое определяет гиперэллиптическую кривую X_L, называемую спектральной кривой L. Более того, стационарное уравнение Шрёдингера $L\psi = \lambda\psi$ может быть решено явно, так как это уравнение можно заменить системой $L\psi = \lambda\psi$, $M\psi = \mu\psi$ $((\lambda,\mu) \in X_L)$, которая имеет ранг 1 и, тем самым, может быть сведена к линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка. Другими словами, для общего λ мы получаем базис решений уравнения $L\psi = \lambda\psi$, который образован собственными функциями максимальной коммутативной подалгебры алгебры дифференциальных операторов, порожденной L, M и изоморфной алгебре $O(X_L)$ регулярных функций на спектральной кривой.[1]

[1]Полная теория коммутативных подалгебр алгебры дифференциальных операторов одной переменной была развита И. М. Кричевером в конце 1970-х.

Обобщение конечнозонной теории на многомерный случай было впервые предпринято И. М. Кричевером и затем развито А. П. Веселовым и О. А. Чалых в работе [14]. По определению, алгебраически интегрируемый оператор Шрёдингера нескольких переменных – это оператор

$$L = -\Delta + u(x_1, \dots, x_n),$$

где Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^n$, а u – функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что L может быть включен в *суперполную алгебру дифференциальных операторов*, т. е. в (максимальную) коммутативную подалгебру A алгебры дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ такую, что задача на собственные значения $M\psi = \lambda(M)\psi$, $M \in A$, имеет одномерное пространство решений для любого характера $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ (называемого *спектральным многообразием алгебры* A).

А. П. Веселов и О. А. Чалых высказали предположение, что эллиптический оператор Калоджеро–Мозера L с потенциалом, определяемым по произвольной системе корней формулой

$$u = \sum_{\alpha} m_\alpha (m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)\wp(\alpha(x), \tau), \tag{1}$$

где α пробегает положительную часть системы корней, а $m_\alpha = m(\alpha)$ – инвариантная относительно группы Вейля функция на корнях со значениями в $\mathbb{Z}_+$, является алгебраически интегрируемым. В случае системы корней A_{n-1} система Калоджеро–Мозера является системой n частиц на прямой с попарным взаимодействием. В теории интегрируемых систем потенциалы (1), а также их рациональные и тригонометрические вырождения (получаемые заменой $\wp(z, \tau)$ на z^{-2} и $\sin^{-2} z$ соответственно; в рациональном случае это включает некристаллографические группы Кокстера W) появились изначально в работе М. А. Ольшанецкого и А. М. Переломова (1977) с произвольными комплексными m_α. А. П. Веселов и О. А. Чалых доказали гипотезы для рациональных и тригонометрических вырождений[2]. Доказательство основано на важной технике многомерных функций Бейкера–Ахиезера, развитой в этих работах. Обобщение этих результатов на случай конечных групп, порожденных отражениями, было получено в [23]. Новые интересные примеры, такие как деформированные системы Калоджеро–Мозера, были найдены позже А. П. Веселовым с соавторами (см. ниже).

Эти работы получили интересное развитие в последующие 25 лет. Прежде всего кольца A квантовых интегралов операторов Калоджеро–Мозера L в рациональном и тригонометрическом случаях, а также соответствующие спектральные многообразия оказались очень интересными. А именно, алгебра $A = Q_m$ квантовых интегралов рациональной системы является алгеброй *m-квазиинвариантных многочленов* конечной группы Кокстера W. По определению это подалгебра таких многочленов f на геометрическом представлении $\mathbb{R}^n$ группы W, что $f(x) - f(s_\alpha x)$ делится на $\alpha(x)^{2m_\alpha+1}$ для всех корней α (s_α – отражение, соответствующее α). В работе [44] А. П. Веселов и М. В. Фейгин предложили изучить алгебраические свойства Q_m и, в частности, предположили, что эта алгебра коэн-маколеева и, более того, горенштейнова. Они доказали это в случае ранга 2 и постоянной функции m_α. Позже в работе [46] А. П. Веселов и Дж. Фельдер вычислили ряд Гильберта Q_m. Так как он удовлетворяет свойству палиндромичности Стэнли, из этого следовала горенштейновость, если

[2] В эллиптическом случае гипотеза была доказана А. Браверманом, П. И. Этингофом и Д. Гэйцгори в 1997 г. в типе A с использованием работы Дж. Фельдера и А. Варченко, которые вычислили спектральное многообразие этой системы. А. Обломков, О. А. Чалых и П. Этингоф в 2002 г. доказали гипотезу в общем виде, используя результат И. Чередника 1994 г. об обычной квантовой интегрируемости этой системы. Отметим, что в одномерном случае это сводится к конечнозонному свойству оператора Ламе.

известна коэн-маколеевость. Факт коэн-маколеевости Q_m (и, следовательно, горенштейновости) был доказан в работе В. Гинзбурга и П. Этингофа, а также позднее в работе В. Гинзбурга, П. Этингофа и Ю. Береста с использованием теории представлений рациональной алгебры Чередника. В последней работе было также показано, что кольцо дифференциальных операторов на Q_m эквивалентно по Морите кольцу дифференциальных операторов на аффинном пространстве (как было ранее предположено Ю. Ю. Берестом). Позже Д. Бен-Зви и Т. Невинс показали, что этот факт является общим свойством многообразий с биективной гладкой нормализацией (таким многообразием, в частности, является спектральное многообразие $\operatorname{Spec} Q_m$). Ю. Ю. Берестом и О. А. Чалых теория квазиинвариантов была обобщена на комплексные группы отражений и была установлена ее связь с теорией представлений рациональных алгебр Чередника для таких групп. Наконец, О. А. Чалых обобщил теорию квазиинвариантов и функций Бейкера–Ахиезера на q-деформированный случай и с помощью этого обобщения получил новое доказательство гипотез Макдональда. Таким образом, теория квазиинвариантов стимулировала развитие нескольких направлений в теории представлений, комбинаторике и алгебраической геометрии.

В 1994 г. В. М. Бухштабер, А. П. Веселов и Дж. Фельдер [27] определили эллиптические операторы Данкла и предложили использовать их для доказательства квантовой интегрируемости эллиптической системы Калоджеро–Мозера. Доказательство, основанное на близком подходе, было дано И. Чередником примерно в то же время.

Широта научных интересов и замечательная интуиция Александра Петровича проявились в работе [32]. В работе [27] существенно используется некоторое функциональное уравнение, для которого найдено полное аналитическое решение. Эллиптические функции, задающие это решение, играют важную роль в теории родов Хирцебруха многообразий. А. П. Веселов предложил поискать топологические приложения результатов работы [27]. В результате в совместной работе с В. М. Бухштабером [32] была открыта связь классических преобразований эллиптических функций с операторами Адамса–Новикова в теории комплексных кобордизмов. Следствием этого результата явилось удивительное соотношение между сигнатурой стабильно комплексного многообразия и сигнатурами его подмногообразий, двойственных классам Понтрягина в кобордизмах этого многообразия. Это направление получило дальнейшее развитие в работах К. Э. Фельдмана и других авторов.

Подход работы [27] к интегрируемости квантовой эллиптической системы Калоджеро–Мозера был реализован и обобщен на кристаллографические комплексные группы отражений в работе [66], что дало новые примеры эллиптических квантовых интегрируемых систем.

Параллельно с этим А. П. Веселов, М. В. Фейгин и О. А. Чалых нашли новые примеры квантовых интегрируемых операторов Шрёдингера – деформированные системы Калоджера–Мозера [34], [35]. Эти системы (которые являются чисто квантовыми и не имеют интегрируемых классических аналогов) обладают богатой структурой, включая связь с теорией классических супералгебр Ли, развитую А. П. Веселовым и А. Н. Сергеевым, и связь с представлениями алгебр Чередника, установленную М. В. Фейгиным.

Для специальных значений параметров некоторые из этих систем допускают дополнительные квантовые интегралы, а алгебра квантовых интегралов может быть суперполной, что означает наличие собственной функции, являющейся многомерным аналогом стационарной рациональной функции Бейкера–Ахиезера и имеющей вид $\psi(k,x) = e^{(k,x)}Q(k,x)$, где Q – рациональная функция. Теория таких алгебраически интегрируемых операторов была развита в [39], [45]. Она получила дальнейшее развитие в более поздних работах (таких как работы А. Н. Сергеева и А. П. Веселова, Э. Рэйнса и П. Этингофа) и является предметом активного изучения в настоящее время.

Алгебраически интегрируемые многомерные операторы Шрёдингера оказались тесно связанными с принципом Гюйгенса. В точных математических терминах вопрос о принципе Гюйгенса был поставлен Ж. Адамаром в его "Лекциях о задаче Коши" (1923). Физически этот феномен означает, что волна, распространяющая изначально локализованное возмущение, не оставляет "хвоста" позади ее самого быстрого фронта. Математически, согласно Адамару, это свойство может быть выражено как зануление фундаментального решения гиперболического волнового оператора внутри области распространения. Исходный вопрос Адамара: "Какие волновые операторы удовлетворяют принципу Гюйгенса?" оказался сложной математической задачей. Долгое время считалось, что классический даламбертиан $\Box_{n+1} = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \cdots - \partial_{x_n}^2$ в пространстве нечетного числа измерений ($n \geqslant 3$) является единственным гюйгенсовым оператором (по модулю тривиальных преобразований). Это предположение, иногда называемое гипотезой Адамара, было частично подтверждено теоремой М. Матиссона (1939), который доказал, что для $n = 3$ оператор $\Box_{3+1}$ действительно является единственным гюйгенсовым оператором среди всех гиперболических операторов второго порядка с постоянным старшим символом. Тем не менее в высших размерностях "гипотеза Адамара" оказалась неверной: в 1953 г. К. Штельмахер построил первые контрпримеры для $n = 5$, а позже, в совместных работах с Дж. Лагнезе 1960-х годов, ему удалось описать все гюйгенсовы операторы вида $\mathscr{L} = \Box_{n+1} + V(x)$, где $V(x)$ – некоторые алгебраические потенциалы, зависящие от одной переменной (скажем, $x = x_1$). Замечательно, что потенциалы Штельмахера–Лагнезе в точности совпадают с потенциалами Адлера–Мозера, определяющими рациональные решения известного уравнения КдФ. Это совпадение указывало на близкую связь принципа Гюйгенса и интегрируемости, а также на то, что методы и результаты теории интегрируемых систем могут быть применены к изучению задачи Адамара. Работы А. П. Веселова и его соавторов в последние 20 лет подтвердили это интуитивное предположение, усилили и расширили связь с интегрируемыми системами.

Первые новые результаты по проблеме Адамара, вдохновленные связью с интегрируемыми системами, появились в совместных работах с Ю. Ю. Берестом (см. [24], [25]). В этих статьях был построен новый класс гюйгенсовых операторов $\mathscr{L} = \Box_{n+1} + V$ с потенциалами $V = V(x_1, \ldots, x_n)$, зависящими от произвольного числа переменных. А именно, потенциал V является рациональным вырождением эллиптического потенциала Калоджеро–Мозера (1). Главная теорема работ [24], [25] утверждает, что для любой пары (W, m) такой, как указано выше, волновой оператор $\mathscr{L}$ гюйгенсов при условии, что n нечетно и $n \geqslant 3 + 2\sum m_\alpha$. В случае ранга 1 этот результат покрывает примеры Штельмахера. Доказательства в работах [24], [25] основаны на замечательной связи между функцией Бейкера–Ахиезера для оператора Шрёдингера $L = -\Delta + V$ и фундаментальным решением соответствующего волнового оператора $\mathscr{L}$: грубо говоря, функция Бейкера–Ахиезера и фундаментальное решение строятся универсальным образом из одних и тех же ингредиентов – последовательности функций $\{U_\nu(x, \xi) \colon \nu \geqslant 0\}$, называемых коэффициентами Адамара. Конечность этой последовательности (т. е. зануление U_ν для $\nu \gg 0$) гарантирует, с одной стороны, алгебраическую интегрируемость оператора Шрёдингера и, с другой стороны, принцип Гюйгенса для соответствующего волнового оператора. Такого типа связь играла ключевую роль во всех последующих исследованиях задачи Адамара методами интегрируемых систем и теории представлений. Так, этот подход был применен в работах [22], [33] при доказательстве принципа Гюйгенса для модифицированных волновых уравнений на некоторых симметрических пространствах ненулевой кривизны.

В работе [25] было высказано предположение, что кокстеровские потенциалы (вместе с одномерными потенциалами Штельмахера–Лагнезе) дают полное решение проблемы Адамара в классе волновых операторов вида $\mathscr{L} = \Box_{n+1} + V$, однако это ока-

залось не так. В совместных работах с М. В. Фейгиным и О. А. Чалых [34], [35], [39] А. П. Веселов обнаружил новые удивительные примеры алгебраически интегрируемых операторов Шрёдингера, связанные с некокстеровскими конфигурациями гиперплоскостей. Соответствующие потенциалы происходят из (очень специальных) деформаций кокстеровских систем корней типа A и B, и в случае целых кратностей они дают новые примеры гюйгенсовых операторов. Исследования А. П. Веселова, М. В. Фейгина и О. А. Чалых послужили мотивацией для работы Ю. Ю. Береста и И. М. Луценко (1997), которые нашли другое семейство некокстеровских примеров двумерных потенциалов, зависящих от непрерывных параметров. Эти примеры могут рассматриваться как деформации диэдральной системы Кокстера с помощью солитонных потоков КдФ, действующих по угловой переменной. Во всех случаях гюйгенсовы потенциалы оказываются рациональными функциями с особенностями вдоль специального дивизора гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$. В работе [39] авторы аксиоматизировали эту ситуацию, введя понятие локусной конфигурации и соответствующей функции Бейкера–Ахиезера. Локусная конфигурация – это конфигурация гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая некоторой явной переопределенной системе алгебраических уравнений, называемой локусными уравнениями. Если локусные уравнения имеют решение, т. е. локусная конфигурация не пуста, то существуют функция Бейкера–Ахиезера, связанная с ней, и явный потенциал V (имеющий особенности на этой локусной конфигурации) такой, что волновой оператор $\mathscr{L} = \Box_{n+1} + V$ удовлетворяет принципу Гюйгенса. Основываясь на более ранних работах с Ю. Ю. Берестом [36], [41], А. П. Веселов с соавторами смогли доказать в [39] и обратное утверждение, а именно: если все коэффициенты Адамара являются рациональными функциями, то потенциал V гюйгенсов тогда и только тогда, когда он отвечает некоторой локусной конфигурации. Таким образом, исходная аналитическая задача нахождения и классификации гюйгенсовых операторов была сведена к алгебраической задаче нахождения и классификации локусных конфигураций. В последние годы, благодаря усилиям А. П. Веселова с соавторами, локусные конфигурации были тщательно изучены и обнаружились новые интересные связи с другими разделами математики (см., например, [50]). Связь принципа Гюйгенса и интегрируемости была темой доклада А. П. Веселова на 2-м Европейском математическом конгрессе в Будапеште в 1996 г., краткий обзор его доклада имеется в [37]. Более подробный обзор, охватывающий классические работы по принципу Гюйгенса, можно найти в [26].

Целый ряд работ А. П. Веселова, выполненных в основном совместно с Дж. Фельдером, относится к теории групп Кокстера. Вклад Александра Петровича основан на соединении классических геометрических и топологических аспектов этой теории с современной математической физикой. Он прояснил и использовал глубокие связи между геометрией и топологией дополнения к гиперплоскостям отражений групп Кокстера, теорию квантовых интегрируемых систем Калоджера–Мозера и уравнения Книжника–Замолодчикова. В случае A_n система Калоджеро–Мозера является системой $n+1$ частиц на прямой с попарным взаимодействием, а уравнение Книжника–Замолодчикова является уравнением на корреляционные функции двумерной конформной теории поля, модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена с группой $U(n+1)$. Обе составляющие обобщаются на кристаллографические группы Кокстера, а в рациональном случае – на все группы Кокстера.

В работах [28] и [29] было показано, что оператор сдвига, предложенный Э. М. Опдамом и Г. Хекманом и связывающий собственные функции оператора Шрёдингера с разными параметрами взаимодействия, имеет очень естественную интерпретацию в терминах изоморфизма Мацуо–Чередника между этими собственными функциями и решениями уравнений Книжника–Замолодчикова. В работе [46] авторы использовали вариант изоморфизма Мацуо–Чередника в вырожденном пределе нулевого спектрального параметра для вычисления полинома Пуанкаре пространства

m-гармонических многочленов для произвольной изотипической компоненты действия группы Кокстера. Эти полиномы, обобщающие гармонические полиномы из теории групп Кокстера, являются полиномиальными собственными функциями квантовых интегралов систем Калоджеро–Мозера; они были введены в работе [44]. Мотивируясь соответствием Мацуо–Чередника, А. П. Веселов и Дж. Фельдер нашли полный набор полиномиальных решений уравнений Книжника–Замолодчикова и формулу для функции Бейкера–Ахиезера систем Калоджеро–Мозера с целыми параметрами через итерацию взятия вычетов [57], [62].

В работе [52] А. П. Веселов совместно с Дж. Фельдером ввели геометрическое понятие *специальной инволюции* в группе Кокстера G. Это понятие оказывается центральным для описания действия группы Кокстера на когомологиях дополнения к комплексифицированной конфигурации гиперплоскостей отражений. Хорошо известно, что размерность пространства когомологий равна порядку группы Кокстера G, однако, пожалуй, неожиданно, что, как показали Г. И. Лерер и Л. Соломон, это представление, вообще говоря, не изоморфно регулярному представлению ρ. В работе [52] было получено универсальное описание этого представления для всех групп Кокстера в виде суммы $\sum_a (2\operatorname{Ind}_{\langle a\rangle}^G 1 - \rho)$ по классам сопряженности специальных инволюций представлений, индуцированных с тривиального представления подгрупп, порожденных инволюциями. В частности, было показано, что знаковое представление никогда не встречается. Авторы также показали, что полином Пуанкаре когомологий соответствующей группы кос Артина имеет вид $P(t) = \sum_a t^{d(a)}$, где суммирование происходит по классам специальных инволюций, а $d(a)$ является размерностью собственного подпространства с собственным значением (-1) в геометрической реализации. Авторы предложили объяснение, предъявив гипотетический базис в когомологиях, который нумеруется специальными инволюциями. Эта гипотеза доказана авторами за исключением случаев E_7, E_8, F_4, H_3, H_4.

В работе [67] А. П. Веселов совместно с Дж. Фельдером и его аспирантом Л. Агирре рассмотрели универсальную версию интегрируемой спиновой цепочки Годена. В этой постановке система Годена является абелевой подалгеброй Ли максимальной размерности $n-1$ в пространстве V_n, натянутом на генераторы алгебры Коно–Дринфельда t_n. Набор систем Годена естественным образом является подмногообразием в грассманиане $(n-1)$-мерных плоскостей в V_n. В [67] доказано, что это подмногообразие является гладким и изоморфным пространству Делиня–Мамфорда модулей стабильных рациональных кривых $\overline{\mathscr{M}}_{0,n+1}$ с $n+1$ отмеченными точками, и дано геометрическое описание тавтологического расслоения с системой Годена в качестве слоев. В недавней работе [73] этот результат был обобщен на случай общих кокстеровских конфигураций и соответствующих компактификаций Де Кончини–Прочези проективизированных дополнений к кокстеровским конфигурациям гиперплоскостей.

Новый подход к изучению деформированных интегрируемых систем Калоджеро–Мозера–Сазерленда был развит Александром Петровичем в серии совместных работ с А. Н. Сергеевым. Начало их плодотворного сотрудничества относится к 2001 г., когда они, в прошлом выпускники одного года Колмогоровского интерната и соседи по общежитию мехмата МГУ, встретились в рамках научной программы "Симметрические функции 2001: обзор достижений и перспективы" в Институте Ньютона в Кембридже.

Результаты по суперполиномам Джека, полученные А. Н. Сергеевым незадолго до этого, указывали на возможные глубокие связи между теорией супералгебр Ли и теорией деформированных систем Калоджеро–Мозера. Результатом последующих совместных исследований была статья [50], подтвердившая это предположение. Более точно, для каждой простой классической супералгебры Ли с ее ассоциированной

обобщенной системой корней, введенной ранее В. Сергановой, был построен деформированный оператор Калоджеро–Мозера–Сазерленда. В этой работе были введены основные объекты для дальнейшего исследования: допустимые деформации обобщенных систем корней и соответствующий деформированный оператор второго порядка, обобщенные алгебры инвариантов и их разностные аналоги. Случай обобщенной системы корней $A(n,m)$ был рассмотрен более подробно в работе [53] в дифференциальном случае, а в работе [63] был изучен соответствующий разностный случай. Как побочный результат этой деятельности появилась работа [54], где исследовались полиномы Джека в случае специального параметра в связи с классическим вопросом Сильвестра–Кэли об описании многочленов с предписанными кратностями корней.

Эти работы показали, что между супералгебрами Ли и деформированными квантовыми интегрируемыми системами существуют глубокие связи, которые могут быть использованы для развития обоих направлений. В частности, рассмотрение бесконечномерных аналогов деформированных интегрируемых систем позволило объяснить интегрируемость деформированного разностного оператора Макдональда–Руженаарса и дифференциального деформированного оператора типа BC, а также получить явные формулы для их собственных функций [63], [64]. Эти собственные функции зависят от нескольких параметров. Возникает естественный вопрос: как можно интерпретировать специализации собственных функций с точки зрения теории представлений? В случае классических полиномов Джека известно, что они специализируются либо в характеры неприводимых конечномерных представлений алгебр Ли, либо в сферические функции, связанные с конечномерными представлениями, а соответствующие операторы второго порядка интерпретируются как радиальные части операторов Лапласа.

В случае деформированных операторов Калоджеро–Мозера–Сазерленда окончательная картина не ясна до сих пор. Это связано с тем, что простые супералгебры Ли могут обладать приводимыми неразложимыми представлениями. Частичные результаты в этом направлении получены в работах [68], [69]. В первой из них доказано, что в случае деформированного оператора типа BC существует естественная специализация собственных функций в характеры Эйлера, а во второй, опубликованной в “Annals of Mathematics”, получено описание колец представлений классических супералгебр Ли как инвариантов некоторого группоида, естественно возникающего с точки зрения деформированных квантовых интегрируемых систем.

Связь с теорией супералгебр Ли позволила построить естественное обобщение классических симметрических функций Джека и описать действие алгебры интегралов в обобщенных собственных подпространствах при определенных значениях параметров [70], [72].

В работе [71] на основе бесконечномерных аналогов операторов Данкла были найдены пары Лакса для деформированных операторов Калоджеро–Мозера–Сазерленда, соответствующих классическим сериям обобщенных систем корней. Это позволило получить более простое доказательство интегрируемости этих операторов.

А. П. Веселов внес также существенный вклад в теорию фробениусовых многообразий. В 1999 г. он заметил, что обобщенные системы корней позволяют получать новые решения уравнений Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (уравнений ассоциативности), и ввел понятие $\vee$-системы [40]. Последняя является набором векторов с естественными линейно-алгебраическими условиями, эквивалентными уравнениям ассоциативности на соответствующий препотенциал с логарифмическими особенностями на конфигурации гиперплоскостей, отвечающей данной $\vee$-системе. В случае систем корней такие препотенциалы являются двойственными по Дубровину полиномиальной фробениусовой структуре на пространстве орбит группы Кокстера, они также возникают в теории Зайберга–Виттена. В работе [42] А. П. Веселов и О. А. Ча-

лых нашли n-параметрические $\vee$-системы, деформирующие классические системы корней A_n и B_n. В работе [58] А. П. Веселов и М. В. Фейгин нашли естественную интерпретацию решений такого рода в терминах фробениусовых структур на дискриминантах групп Коксетера, возникающих в работе Строна, продолжив тем самым двойственность Дубровина на дискриминантные страты, что привело к новым классам $\vee$-систем. В работах [58], [59] А. П. Веселов и М. В. Фейгин показали, что класс $\vee$-систем замкнут относительно естественных операций взятия подсистем и ограничений, а в недавней работе [74] они исследовали подкласс гармонических $\vee$-систем и рассмотрели связи с теорией свободных по Саито конфигураций гиперплоскостей. Полное описание $\vee$-систем остается интересным открытым вопросом.

В настоящее время А. П. Веселов продолжает активную и насыщенную математическую жизнь, участвуя во многих научных мероприятиях в Великобритании, России и других странах. Он входит в редколлегии и редакционные советы журналов "Фунциональный анализ и его приложения", "Журнал интегрируемых систем", "Регулярная и хаотическая динамика", "Журнал нелинейной математической физики".

Мы желаем Александру Петровичу крепкого здоровья и долгих активных лет.

В. Э. Адлер, *Ю. Ю. Берест*, *В. М. Бухштабер*,
П. Г. Гриневич, *Б. А. Дубровин*, *И. М. Кричевер*,
С. П. Новиков, *А. Н. Сергеев*, *М. В. Фейгин*, *Дж. Фельдер*,
Е. В. Ферапонтов, *О. А. Чалых*, *П. И. Этингоф*

Список цитированных работ А. П. Веселова

[1] "О гамильтоновом формализме для уравнений Новикова–Кричевера коммутативности двух операторов", *Функц. анализ и его прил.*, **13**:1 (1979), 1–7; англ. пер.: "Hamiltonian formalism for the Novikov–Krichever equations for the commutativity of two operators", *Funct. Anal. Appl.*, **13**:1 (1979), 1–6.

[2] "О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой Кортевега–де Фриза на множестве конечнозонных потенциалов", *Докл. АН СССР*, **266**:3 (1982), 533–537 (совм. с С. П. Новиковым); англ. пер.: "On Poisson brackets compatible with algebraic geometry and Korteweg–de Vries dynamics on the set of finite-zone potentials", *Soviet Math. Dokl.*, **26** (1982), 357–362 (with S. P. Novikov).

[3] "Скобки Пуассона и комплексные торы", *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, **165**, 1984, 49–61 (совм. с С. П. Новиковым); англ. пер.: "Poisson brackets and complex tori", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165** (1985), 53–65 (with S. P. Novikov).

[4] "Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы", *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788 (совм. с С. П. Новиковым); англ. пер.: "Finite-zone, two-dimensional Schrödinger operators. Potential operators", *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 705–708 (with S. P. Novikov).

[5] "Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения", *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24 (совм. с С. П. Новиковым); англ. пер.: "Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations", *Soviet Math. Dokl.*, **30** (1984), 588–591 (with S. P. Novikov).

[6] "Классификация пленок", *Квант*, 1984, № 2, 16–21.

[7] "Элементарные функции", *Квант*, 1984, № 9, 9–14 (совм. с С. Гиндикиным).

[8] "О математике гармонических колебаний", *Квант*, 1986, № 5, 9–13, 43.

[9] "Интегрирование стационарной задачи для классической спиновой цепочки", *ТМФ*, **71**:1 (1987), 154–159; англ. пер.: "Integration of the stationary problem for a classical spin chain", *Theoret. and Math. Phys.*, **71**:1 (1987), 446–450.

[10] "Интегрируемые отображения и алгебры Ли", *Докл. АН СССР*, **292**:6 (1987), 1289–1291; англ. пер.: "Integrable mappings and Lie algebras", *Soviet Math. Dokl.*, **35** (1987), 211–213.

[11] "Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы", *Функц. анализ и его прил.*, **22**:2 (1988), 1–13; англ. пер.: "Integrable discrete-time systems and difference operators", *Funct. Anal. Appl.*, **22**:2 (1988), 83–93.

[12] "Группа Кремоны и динамические системы", *Матем. заметки*, **45**:3 (1989), 118–120.

[13] "Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky space", *J. Geom. Phys.*, **7**:1 (1990), 81–107.

[14] "Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras", *Comm. Math. Phys.*, **126**:3 (1990), 597–611 (with O. A. Chalykh).

[15] "Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов", *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 38–49; англ. пер.: "Integrable Lagrangian correspondences and the factorization of matrix polynomials", *Funct. Anal. Appl.*, **25**:2 (1991), 112–122.

[16] "О росте числа образов точки при итерациях многозначного отображения", *Матем. заметки*, **49**:2 (1991), 29–35; англ. пер.: "Growth of the number of images of a point under iterates of a multivalued map", *Math. Notes*, **49**:2 (1991), 134–139.

[17] "Интегрируемые отображения", *УМН*, **46**:5(281) (1991), 3–45; англ. пер.: "Integrable maps", *Russian Math. Surveys*, **46**:5 (1991), 1–51.

[18] "What is an integrable mapping?", *What is integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1991, 251–272.

[19] "Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials", *Comm. Math. Phys.*, **139**:2 (1991), 217–243 (with J. Moser).

[20] "Growth and integrability in the dynamics of mappings", *Comm. Math. Phys.*, **145**:1 (1992), 181–193.

[21] "Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера", *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21 (совм. с А. Б. Шабатом); англ. пер.: "Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator", *Funct. Anal. Appl.*, **27**:2 (1993), 81–96 (with A. B. Shabat).

[22] "Integrability in the theory of Schrödinger operator and harmonic analysis", *Comm. Math. Phys.*, **152**:1 (1993), 29–40 (with O. A. Chalykh).

[23] "Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шредингера и группы, порожденные отражениями", *ТМФ*, **94**:2 (1993), 253–275 (совм. с К. Л. Стыркасом, О. А. Чалых); англ. пер.: "Algebraic integrability for the Schrödinger equation and finite reflection groups", *Theoret. and Math. Phys.*, **94**:2 (1993), 182–197 (with K. L. Styrkas, O. A. Chalykh).

[24] "Принцип Гюйгенса и группы Кокстера", *УМН*, **48**:3(291) (1993), 181–182 (совм. с Ю. Ю. Берестом); англ. пер.: "The Huygens principle and Coxeter groups", *Russian Math. Surveys*, **48**:3 (1993), 183–184 (with Yu. Yu. Berest).

[25] "Проблема Адамара и группы Кокстера: новые примеры гюйгенсовых уравнений", *Функц. анализ и его прил.*, **28**:1 (1994), 3–15 (совм. с Ю. Ю. Берестом); англ. пер.: "Hadamard's problem and Coxeter groups: new examples of Huygens' equations", *Funct. Anal. Appl.*, **28**:1 (1994), 3–12 (with Yu. Yu. Berest).

[26] "Принцип Гюйгенса и интегрируемость", *УМН*, **49**:6(300) (1994), 7–78 (совм. с Ю. Ю. Берестом); англ. пер.: "Huygens' principle and integrability", *Russian Math. Surveys*, **49**:6 (1994), 5–77 (with Yu. Yu. Berest).

[27] "Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations", *Duke Math. J.*, **76**:3 (1994), 885–911 (with V. M. Buchstaber, G. Felder).

[28] "Shift operators for the quantum Calogero–Sutherland problems via Knizhnik–Zamolodchikov equation", *Comm. Math. Phys.*, **160**:2 (1994), 259–273 (with G. Felder).

[29] "Квантовая задача Калоджеро, уравнение Книжника–Замолодчикова и принцип Гюйгенса", *ТМФ*, **98**:3 (1994), 524–535; англ. пер.: "Calogero quantum problem, Knizhnik–Zamolodchikov equation, and Huygens principle", *Theoret. and Math. Phys.*, **98**:3 (1994), 368–376.

[30] "Факторизация и пуассоновы соответствия", *ТМФ*, **105**:2 (1995), 225–245 (совм. с А. П. Форди, А. Б. Шабатом); англ. пер.: "Factorization and Poisson correspondences", *Theoret. and Math. Phys.*, **105**:2 (1995), 1369–1386 (with A. P. Fordy, A. B. Shabat).

[31] "Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **1996**:8 (1996), 381–400 (with V. M. Buchstaber).

[32] "On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera", *Math. Z.*, **223**:4 (1996), 595–607 (with V. M. Buchstaber).

[33] "Integrability and Huygens' principle on symmetric spaces", *Comm. Math. Phys.*, **178**:2 (1996), 311–338 (with O. A. Chalykh).

[34] "Новые интегрируемые деформации квантовой задачи Калоджеро–Мозера", *УМН*, **51**:3(309) (1996), 185–186 (совм. с М. В. Фейгиным, О. А. Чалых); англ. пер.: "New integrable deformations of the Calogero–Moser quantum problem", *Russian Math. Surveys*, **51**:3 (1996), 573–574 (with M. V. Feigin, O. A. Chalykh).

[35] "New integrable generalizations of Calogero–Moser quantum problem", *J. Math. Phys.*, **39**:2 (1998), 695–703 (with O. Chalykh, M. Feigin).

[36] "О сингулярностях потенциалов точно решаемых уравнений Шрёдингера и проблеме Адамара", *УМН*, **53**:1(319) (1998), 211–212 (совм. с Ю. Ю. Берестом); англ. пер.: "On the singularities of potentials of exactly soluble Schrödinger equations and on Hadamard's problem", *Russian Math. Surveys*, **53**:1 (1998), 208–209 (with Yu. Yu. Berest).

[37] "Huygens' principle and integrability", *European congress of mathematics*, v. II (Budapest, 1996), Progr. Math., **169**, Birkhäuser, Basel, 1998, 259–275.

[38] "Monodromy of the matrix Schrödinger equations and Darboux transformations", *J. Phys. A*, **31**:23 (1998), 5315–5326 (with V. M. Goncharenko).

[39] "Multidimensional Baker–Akhiezer functions and Huygens' principle", *Comm. Math. Phys.*, **206**:3 (1999), 533–566 (with O. A. Chalykh, M. V. Feigin).

[40] "Deformations of the root systems and new solutions to generalised WDVV equations", *Phys. Lett. A*, **261**:5-6 (1999), 297–302.

[41] "On the structure of singularities of integrable Schrödinger operators", *Lett. Math. Phys.*, **52**:2 (2000), 103–111 (with Yu. Berest).

[42] "Locus configurations and $\vee$-systems", *Phys. Lett. A*, **285**:5-6 (2001), 339–349 (with O. A. Chalykh).

[43] "Two-dimensional 'discrete hydrodynamics' and Monge–Ampère equations", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22**:5 (2002), 1575–1583 (with J. Moser); preprint, ETH, Zürich, 1993, 7 pp.

[44] "Quasi-invariants of Coxeter groups and m-harmonic polynomials", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2002**:10 (2002), 521–545 (with M. Feigin).

[45] "Quasi-invariants and quantum integrals of the deformed Calogero–Moser systems", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2003**:46 (2003), 2487–2511 (with M. Feigin).

[46] "Action of Coxeter groups on m-harmonic polynomials and Knizhnik–Zamolodchikov equations", *Mosc. Math. J.*, **3**:4 (2003), 1269–1291 (with G. Felder).

[47] "Lax matrices for Yang–Baxter maps", *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**, suppl. 2 (2003), 223–230 (with Yu. B. Suris).

[48] "Yang–Baxter maps and matrix solitons", *New trends in integrability and partial solvability*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **132**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 191–197 (with V. M. Goncharenko).

[49] "Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs", *Acta Appl. Math.*, **84**:2 (2004), 237–262 (with V. E. Adler).

[50] "Deformed quantum Calogero–Moser problems and Lie superalgebras", *Comm. Math. Phys.*, **245**:2 (2004), 249–278 (with A. N. Sergeev).

[51] "Poisson Lie groups and Hamiltonian theory of the Yang–Baxter maps", 2005, 9 pp., arXiv: math/0512328v2 (with N. Reshetikhin).

[52] "Coxeter group actions on the complement of hyperplanes and special involutions", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **7**:1 (2005), 101–116 (with G. Felder).

[53] "Generalised discriminants, deformed Calogero–Moser–Sutherland operators and super-Jack polynomials", *Adv. Math.*, **192**:2 (2005), 341–375 (with A. N. Sergeev).

[54] "Coincident root loci and Jack and Macdonald polynomials for special values of the parameters", *Jack, Hall–Littlewood and Macdonald polynomials*, Contemp. Math., **417**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 207–225 (with M. Kasatani, T. Miwa, A. N. Sergeev).

[55] "Yang–Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs", *J. Math. Phys.*, **47**:8 (2006), 083502, 16 pp. (with V. G. Papageorgiou, A. G. Tongas).

[56] "Yang–Baxter maps: dynamical point of view", *Combinatorial aspect of integrable systems*, MSJ Mem., **17**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 145–167.

[57] "Polynomial solutions of the Knizhnik–Zamolodchikov equations and Schur–Weyl duality", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2007**:15 (2007), rnm046, 21 pp. (with G. Felder).

[58] "Logarithmic Frobenius structures and Coxeter discriminants", *Adv. Math.*, **212**:1 (2007), 143–162 (with M. V. Feigin).

[59] "On the geometry of $\vee$-systems", *Geometry, topology, and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 111–123 (with M. V. Feigin).

[60] "Periodic continued fractions and hyperelliptic curves", *J. Lond. Math. Soc.* (2), **77**:3 (2008), 593–606 (with M.-P. Grosset).

[61] "Кое-что из того, чему я научился у Юргена Мозера", *Нелинейная динам.*, **5**:1 (2009), 39–51.

[62] "Baker–Akhiezer function as iterated residue and Selberg-type integral", *Glasg. Math. J.*, **51**:A (2009), 59–73 (with G. Felder).

[63] "Deformed Macdonald–Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials", *Comm. Math. Phys.*, **288**:2 (2009), 653–675 (with A. N. Sergeev).

[64] "BC_∞ Calogero–Moser operator and super Jacobi polynomials", *Adv. Math.*, **222**:5 (2009), 1687–1726 (with A. N. Sergeev).

[65] "On quadrirational Yang–Baxter maps", *SIGMA*, **6** (2010), 033, 9 pp. (with V. G. Papageorgiou, Yu. B. Suris, A. G. Tongas).

[66] "On elliptic Calogero–Moser systems for complex crystallographic reflection groups", *J. Algebra*, **329** (2011), 107–129 (with P. Etingof, G. Felder, X. Ma).

[67] "Gaudin subalgebras and stable rational curves", *Compos. Math.*, **147**:5 (2011), 1463–1478 (with L. Aguirre, G. Felder).

[68] "Euler characters and super Jacobi polynomials", *Adv. Math.*, **226**:5 (2011), 4286–4315 (with A. N. Sergeev).

[69] "Grothendieck rings of basic classical Lie superalgebras", *Ann. of Math.* (2), **173**:2 (2011), 663–703 (with A. N. Sergeev).

[70] "Jack–Laurent symmetric functions", *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **111**:1 (2015), 63–92 (with A. N. Sergeev).

[71] "Dunkl operators at infinity and Calogero–Moser systems", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2015**:21 (2015), 10959–10986 (with A. N. Sergeev).

[72] "Jack–Laurent symmetric function for special values of the parameters", *Glasg. Math. J.*, **58**:3 (2016), 599–616 (with A. N. Sergeev).

[73] "Gaudin subalgebras and wonderful models", *Selecta Math.* (*N. S.*), **22**:3 (2016), 1057–1071 (with L. Aguirre, G. Felder).

[74] "$\vee$-systems, holonomy Lie algebras, and logarithmic vector fields", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2016** (2016), 29 pp. (to appear) (with M. V. Feigin).