Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. П. Месис, Теорема Винера о полях ограниченности,
Изв. вузов. Матем., 1974, номер 12, 64–66

https://www.mathnet.ru/ivm6687

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
19 января 2026 г., 10:56:18

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 12 (151)

УДК 513.88

И. П. Месис

ТЕОРЕМА ВИНЕРА О ПОЛЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ

1. Введем обозначения. $L_1(-\infty, +\infty)$ — банахово пространство измеримых функций с нормой

$$\|h\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt;$$

$\hat{h}(\omega)$ — преобразование Фурье от функции $h(t)$; P_h — поле ограниченности элемента h, т. е. множество ограниченных функций $m(t)$, для которых существует конечный предел выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\, m(t)\, dt$$

при $x \to \infty$; W — множество всех функций $h(t)$ из пространства $L_1(-\infty, +\infty)$, для которых $\hat{h}(\omega)$ не обращается в нуль ни в одной точке числовой оси.

2. Известную теорему Винера ([4], с. 354) можно сформулировать следующим образом: *Для любой функции $f(t)$ из класса W и любой функции $h(t)$ из пространства $L_1(-\infty, +\infty)$ справедливо включение полей ограниченности*

$$P_f \subseteq P_h.$$

Из этой теоремы вытекают следующие соотношения для полей ограниченности любых функций $f(t)$ и $h(t)$ из класса W и функции

$$\Phi_\lambda(t) = \sin^2 \lambda t / \lambda t^2.$$

$P_f = P_h$, $P_f \subseteq \bigcap_{\lambda>0} P_{\Phi_\lambda}$, $P_{\Phi_\lambda} \neq P_{\Phi_\mu}$, если λ и μ различные ([4], с. 361—362).

Докажем теорему Винера для специального пространства $L^{(a)}$. Здесь $L^{(a)}$ — множество функций $f(t)$, принадлежащих $L_1(-\infty, +\infty)$, для которых носитель $\operatorname{supp} \hat{f}(\omega) \subseteq [-a, a]$. $L^{(a)}$ является полным нормированным подпространством в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$ с той же нормой. Введем класс функций $W^{(a)}$. Классом $W^{(a)}$ назовем множество функций $f(t) \in L^{(a)}$, для которых $\hat{f}(\omega)$ не имеет нулей на интервале $(-a, a)$ и $\hat{f}(-a) = \hat{f}(a) = 0$.

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого элемента $f \in W^{(a)}$ и любого элемента $h \in L^{(a)}$ справедливо следующее включение полей ограниченности: $P_f \subseteq P_h$.*

Теорема 2. *Для любых элементов f и h из класса $W^{(a)}$ их поля ограниченности совпадают.*

Чтобы доказать эти теоремы, необходимы вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Для любого положительного ε и любой функции $h(t)$ из пространства $L^{(a)}$ найдется функция $h_\delta(t)$ в $L^{(a)}$ такая, что носитель $\operatorname{supp} \hat{h}_\delta(\omega) \subseteq [-a+\delta/2, a-\delta/2]$, $0 < \delta < a$, и $\|h - h_\delta\| < \varepsilon$.*

В лемме доказывается, что для произвольной функции $h(t)$ и произвольно выбранного $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое δ, $0 < \delta < a$, что

$$h_\delta(t) = \frac{16}{t^2\delta^2}\sin^2\frac{\delta t}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\,\varphi_\delta(u)\,du,$$

где

$$\varphi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos u(a-2\delta) - \cos u(a-\delta)}{\delta u^2}$$

удовлетворяет условиям леммы.

Для дальнейшего целесообразно рассматривать пространство $L^{(a)}$ как нормированное кольцо. В $L^{(a)}$ также, как и в $L_1(-\infty, +\infty)$, можно ввести операцию умножения элементов

$$(f\times h)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,h(u)\,du$$

и $(f\times h)(t)\in L^{(a)}$, если $f(t)$ и $h(t)$ принадлежат $L^{(a)}$. Ясно, что пространство $L^{(a)}$ является кольцом без единицы. Формально присоединяем к $L^{(a)}$ единичный элемент e. Множество элементов вида $\tilde{z} = \lambda e + f$, где $f(t)\in L^{(a)}$, а λ — скаляр, образует нормированное кольцо $V^{(a)}$ с обычными операциями ([1], с. 486; [2], с. 107) и нормой $\|\tilde{z}\| = |\lambda| + \|f\|$. Поиски максимальных идеалов I в кольце $V^{(a)}$, поиски значений элементов $\tilde{z}$ на максимальных идеалах I аналогичны тем, которые проводились в [1] на с. 486, потому что, если $f(t)$ принадлежит $L^{(a)}$, то и любой сдвиг $f(t-c)$ также принадлежит $L^{(a)}$.

Между всеми максимальными идеалами кольца $V^{(a)}$, отличными от $L^{(a)}$, и точками интервала $(-a, a)$ существует взаимно однозначное соответствие. Если отрезок $[-a, a$ перевести в окружность преобразованием $z = e^{ix\pi/a}$, то между всеми точками этой окружности и максимальными идеалами кольца $V^{(a)}$ существует взаимнооднозначное соответствие.

Используем обозначение I_ω для максимального идеала, $-a \leqslant \omega \leqslant a$. Кольцо $V^{(a)}$ полупростое, т. е. радикал кольца $\bigcap\limits_\omega I_\omega$ содержит один нулевой элемент пространства $L^{(a)}$. Значение элемента $\tilde{z} = \lambda e + f$ на максимальном идеале I_ω определяется формулой

$$(\tilde{z}, I_\omega) = \lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{it\omega}dt.$$

Лемма 1, свойства построенного кольца $V^{(a)}$ (имеется в виду, что кольцо $V^{(a)}$ полупростое) необходимы для доказательства леммы 2, являющейся аналогом известной теоремы аппроксимации Винера ([3], с. 162), в которой утверждается, что множество конечных линейных комбинаций сдвигов функций класса W всюду плотно в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$.

Лемма 2. *Множество конечных линейных комбинаций сдвигов функций класса $W^{(a)}$ всюду плотно в пространстве $L^{(a)}$.*

Действительно, произвольную функцию $h(t)$ можно приблизить функцией $h_\delta(t)$ так, что

$$\|h - h_\delta\| < \varepsilon/2, \tag{1}$$

где ε — произвольное малое положительное число. В силу того, что $\operatorname{supp}\hat{h}_\delta(\omega) \subseteq [-a+\delta/2, a-\delta/2]$, функцию $h_\delta(t)$ можно представить в виде $f\times\tilde{z}(t)$ ([1], с.

492), где $f(t)$ — фиксированная функция из класса $W^{(a)}$, $\tilde{z}$ имеет вид $\tilde{z}=(\tilde{f}+f\times\times f^*)^{-1}\times f^*\times h_\delta$, где $f(t)\in W^{(a)}$, $f^*(t)=\overline{f(-t)}$ и

$$\tilde{f}=e-\frac{4}{\pi}\,\frac{\cos t(a-\delta/2)-\cos t(a-\delta/4)}{\delta t^2}.$$

Далее, по примечанию к теореме 3 из [1] (см. с. 490) можно так подобрать постоянные N, α_i, β_i, что

$$\|f\times\tilde{z}-F\|<\varepsilon/2,\quad F(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f(t-\beta_i). \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает утверждение леммы 2.

Справедливость теоремы 1 непосредственно следует из леммы 2. Именно потому, что множество конечных комбинаций сдвигов функции класса $W^{(a)}$ всюду плотно в $L^{(a)}$, для полей ограниченности элемента f, принадлежащего классу $W^{(a)}$, и любого элемента h из пространства $L^{(a)}$ будет выполняться соотношение $P_f\subseteq P_h$. Если функция $h(t)$ не принадлежит классу $W^{(a)}$, то ее поле ограниченности P_h существенно шире поля P_f для элемента f из класса $W^{(a)}$. Действительно, пусть для функции $h(t)$ из $L^{(a)}$ существует такая точка $\omega_0\in(-a,a)$, что $\hat{h}(\omega_0)=0$. Тогда функция $e^{-it\omega_0}$ принадлежит полю P_h и не принадлежит полю P_f для элемента $f\in W^{(a)}$.

Теорема 2 является следствием теоремы 1; достаточно две функции $f(t)$ и $h(t)$, принадлежащие классу $W^{(a)}$, в доказательстве теоремы 1 поменять местами, откуда и будет следовать, что их поля ограниченности совпадают.

С помощью теоремы 2 доказываются следующие следствия.

Следствие 1. Для любой функции $f(t)$ из класса W справедливо

$$P_f=\bigcap_{\lambda>0}P_{\Phi_\lambda},$$

где P_{Φ_λ} — поле ограниченности функции $\Phi_\lambda=\dfrac{\sin^2\lambda t}{\lambda t^2}$.

Следствие 2. Если $\lambda<\mu$, то поля ограниченности соответствующих Φ_λ связаны соотношением

$$P_{\Phi_\lambda}\supset P_{\Phi_\mu}.$$

Следствие 3. Если ограниченная функция $m(t)$ представима рядом Фурье, сходящимся к ней равномерно на всей числовой оси, то она не принадлежит ни одному полю ограниченности P_f для любой функции $f(t)$ из класса W.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иосида К. Функциональный анализ. М., „Мир“, 1967.
2. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М., ГИФМЛ., 1960.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., „Наука“, 1965.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИИЛ, 1951.

г. Свердловск

Поступила
13 III 1974