V. G. Krotov, On series with respect to the Faber–Schauder system and with respect to the bases of the space $C[0,1]$, *Mat. Zametki*, 1973, Volume 14, Issue 2, 185–195

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 2 (1973), 185—195

УДК 517. 5

О РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА — ШАУДЕРА И ПО БАЗИСАМ ПРОСТРАНСТВА C [0, 1]

В. Г. Кротов

В работе изучаются последовательности коэффициентов разложения непрерывных функций по нормированным и квазинормированным базисам пространства C [0, 1]. При этом существенно используются свойства системы функций Фабера — Шаудера. Исследуются некоторые примыкающие вопросы. Библ. 9 назв.

§ 1. Пусть B — банахово пространство с базисом *) и $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность чисел. Тогда 1) если существует нормированный базис $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства B, для которого ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n \tag{1}$$

сходится в B, то выполнено условие

$$c_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{2}$$

2) если выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty, \tag{3}$$

то для любого нормированного базиса $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства B ряд (1) сходится в B.

Целью настоящей заметки является доказательство того, что в случае, когда $B = C$ [0, 1] — пространство непрерывных на отрезке [0, 1] функций с равномерной

*) Определение базиса см. [3] или [4], стр. 115.

нормой, справедливы и обратные утверждения. При этом мы будем существенно использовать свойства системы Фабера — Шаудера, которые интересны, быть может, и сами по себе.

§ 2. Дадим определение функций Фабера — Шаудера. Положим для $t \in [0, 1]$

$$\widetilde{\Phi}_0(t) \equiv 1, \qquad \widetilde{\Phi}_n(t) = \int_0^t \mathrm{X}_n(u)\,du \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (4)$$

где $\{\mathrm{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система функций Хаара (определение см. в [1]).

Система функций (4) была введена Фабером [2]. Им же доказано, что система $\{\widetilde{\Phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в пространстве $C[0, 1]$.

Шаудер [3] ввел в рассмотрение класс базисов пространства $C[0, 1]$. Каждый базис из этого класса определяется в зависимости от исходного счетного всюду плотного на $[0, 1]$ множества, содержащего точки 0 и 1. Если в качестве такого множества взять множество двоично-рациональных дробей, упорядоченное естественным образом, то мы получим систему $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая совпадает с системой (4) после нормировки последней в $C[0, 1]$. Эту систему $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — нормированный базис в $C[0, 1]$ — мы и называем системой Фабера — Шаудера.

ЛЕММА 1. *Пусть $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — базис в банаховом пространстве B. Если некоторая подпоследовательность $\{\sum_{n=0}^{n_i} c_n y_n\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности частных сумм ряда* (1) *сходится в B, то ряд* (1) *сходится в B.*

Доказательство леммы 1 очевидно.

ЛЕММА 2. *Пусть отрезок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, число $\gamma \in (\alpha, \beta)$ и функции $x_i \in C[0, 1]$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям:* 1) *x_1 линейна на отрезке $[\alpha, \beta]$;* 2) *x_2 линейна на отрезках $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ и равна нулю вне (α, β);* 3) *$\| x_i \|_C \leqslant \delta$, где $\delta \geqslant 0$ — некоторое число, $i = 1, 2$.*

Тогда можно выбрать знак $\varepsilon = \pm 1$ так, чтобы

$$\| x_1 + \varepsilon x_2 \|_C \leqslant \delta.$$

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что достаточно показать возможность выбора знака $\varepsilon = \pm 1$

с тем, чтобы выполнялось неравенство

$$| x_1(\gamma) + \varepsilon x_2(\gamma) | \leqslant \delta.$$

Ясно, что последнее неравенство выполнено при любом $\varepsilon = \pm 1$, если хоть одно из чисел $x_i(\gamma)$ равно нулю, поэтому считаем $x_i(\gamma) \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Положим тогда $\varepsilon_i = \operatorname{sign} x_i(\gamma) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ и $\varepsilon = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. В силу условия 3) получаем

$$|x_1(\gamma) + \varepsilon x_2(\gamma)| = |\varepsilon_1 |x_1(\gamma)| + \varepsilon\varepsilon_2 |x_2(\gamma)|| =$$

$$= ||x_1(\gamma)| - |x_2(\gamma)|| = \max_{i=1,2} |x_i(\gamma)| - \min_{i=1,2} |x_i(\gamma)| \leqslant \delta$$

и лемма доказана.

Замечание 1*). Если N — натуральное число, то для $x_1 = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \Phi_n$ и $x_2 = c_N \Phi_N$ все условия леммы 2 выполнены при $\| x_1 \|_C \leqslant \delta$ и $| c_N | \leqslant \delta$. Здесь $[\alpha, \beta] = \left[\frac{\nu - 1}{2^s}, \frac{\nu}{2^s} \right]$, $\gamma = \frac{2\nu - 1}{2^{s+1}}$, если $N = 2^s + \nu$ $(s \geqslant 0, 1 \leqslant \nu \leqslant 2^s)$.

Определение 1. Будем говорить, что нормированный базис $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства $C[0, 1]$ удовлетворяет условию (S_0), если для любой последовательности чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (2), можно определить последовательность знаков $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\varepsilon_n = \pm 1, n = 0, 1, \ldots)$ так, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n c_n y_n$ сходился в $C[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1. *Система Фабера — Шаудера* $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (S_0).

Доказательство. Пусть $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условию (2). Зафиксируем некоторую последовательность чисел $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \qquad (5)$$

---

*) Утверждение, близкое к замечанию 1, содержится в работе [5] и используется для других целей.

В силу условия (2) можно определить последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $N_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$ такую, что выполняются неравенства

$$|c_n| \leqslant \delta_k \quad \text{при} \quad n > 2^{N_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Знаки $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^{N_1}}$ выберем произвольно и, фиксируя произвольно натуральное число $k \geqslant 1$, покажем, что знаки ε_n $(n = 2^{N_k} + 1, \ldots, 2^{N_{k+1}})$ можно выбрать так, чтобы

$$\Big\| \sum_{n=2^{N_k}+1}^{2^{N_{k+1}}} \varepsilon_n c_n \Phi_n \Big\|_C \leqslant \delta_k. \tag{7}$$

В самом деле, при произвольных $\varepsilon_{2^{N_k}+1}, \ldots, \varepsilon_{2^{N_k+1}}$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$ в силу условия (6) и определения функций Фабера — Шаудера получаем неравенство

$$\Big\| \sum_{n=2^{N_k}+1}^{2^{N_k+1}} \varepsilon_n c_n \Phi_n \Big\|_C \leqslant \delta_k.$$

Но (см. (6)) $|c_{2^{N_k+1}+1}| \leqslant \delta_k$, значит, в силу леммы 2 (см замечание 1) получаем неравенство

$$\Big\| \sum_{n=2^{N_k}+1}^{2^{N_k+1}+1} \varepsilon_n c_n \Phi_n \Big\|_C \leqslant \delta_k,$$

где $\varepsilon_{2^{N_k+1}+1} = \pm 1$ — соответствующим образом выбранный знак.

Так как $|c_{2^{N_k+1}+2}| \leqslant \delta_k$ (см. (6)), то мы снова можем применить лемму 2 и так далее. Ясно, что знаки $\varepsilon_{2^{N_k}+1}, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_{2^{N_{k+1}}}$ можно выбрать так, что выполнено условие (7). Но $k \geqslant 1$ — любое натуральное число, значит, все знаки $\varepsilon_n = \pm 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ выбраны и при $k = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства (7).

При произвольно фиксированных $p > q > 1$ получаем в силу неравенств (7)

$$\Big\| \sum_{n=2^{N_q}+1}^{2^{N_p}} \varepsilon_n c_n \Phi_n \Big\|_C \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \Big\| \sum_{n=2^{N_k}+1}^{2^{N_{k+1}}} \varepsilon_n c_n \Phi_n \Big\|_C \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \delta_k,$$

следовательно (см. (5)), подпоследовательность $\left\{\sum_{n=0}^{2^{N_k}} \varepsilon_n c_n \Phi_n\right\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности частных сумм ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n c_n \Phi_n \tag{8}$$

сходится в C [0, 1]. Так как система Фабера — Шаудера образует базис в C [0, 1], то, применяя лемму 1, получаем сходимость в C [0, 1] ряда (8). Теорема доказана.

Покажем, что свойство (S_0) не является общим для всех нормированных базисов пространства C [0, 1]. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Всякий ортогональный в* L^2 (0, 1) *нормированный базис пространства* C [0, 1] *не удовлетворяет условию* (S_0).

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный в L^2 (0, 1) базис пространства C [0, 1] и $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность чисел, удовлетворяющая условию (2) (фиксированная произвольно). Предположим, что можно выбрать знаки $\varepsilon_n = \pm 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ так, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n c_n \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_C}$ сходится в C [0, 1]. Тогда этот ряд сходится и в L^2 (0, 1), следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|_C^{-2} < \infty$. Но $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условию (2), значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_C^{-2} < \infty.$$

На самом деле это невозможно, ибо справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *ортонормированный в* $L^2(0, 1)$ *базис пространства* L^p (0,1) *при некотором* $p \in [1, \infty]$ $(L^\infty(0, 1) = C[0, 1])$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^p}^{-2} = \infty.$$

Доказательство. Теорема очевидна при $p \in [1, 2]$, так как в этом случае $\|\varphi_n\|_{L^p} \leqslant \|\varphi_n\|_{L^2} = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, потому считаем $p \in (2, \infty]$. Тогда для любой функции $x \in L^p$ (0, 1)

$$x \overset{L_p}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (x, \varphi_n)\, \varphi_n, \tag{9}$$

где (x, y) — скалярное произведение в L^2 (0, 1).

Из (9) получаем

$$|(x, \varphi_n)| \leqslant \frac{A(x)}{\|\varphi_n\|_{L^p}} \quad (n = 0, 1, \ldots, x \in L^p(0, 1), A(x) = \text{const}). \tag{10}$$

Предположим противное, т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^p}^{-2} < \infty$. Тогда, полагая $\omega(n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{L^p}^{-2}\right)^{\alpha-1}$ при $n = 0, 1, \ldots$ и некотором $\alpha \in (0, 1)$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^p}^{-2} \omega(n) < \infty, \tag{11}$$

$$\omega(n) \uparrow \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Из (10) и (11) получаем для любой функции $x \in L^p(0, 1)$ (в частности, для любой функции $x \in C[0, 1]$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x, \varphi_n)^2 \omega(n) \leqslant A^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^p}^{-2} \omega(n) < \infty.$$

С другой стороны, из результатов А. М. Олевского [6] следует, что множество тех функций $x \in C[0, 1]$, для которых $\sum_{n=0}^{\infty} (x, \varphi_n)^2 \omega(n) = \infty$, где $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (12), есть множество второй категории в $C[0, 1]$. Следовательно, теорема 3, а значит и теорема 2 доказаны.

З а м е ч а н и е 2. В случае $p = \infty$ из теоремы 3 получаем: если $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный в $L^2(0, 1)$ базис пространства $C[0, 1]$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_C^{-2} = \infty. \tag{13}$$

А. М. Олевский [7] показал, что для ортонормированного в $L^2(0, 1)$ базиса пространства $C[0, 1]$ выполнено соотношение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|\varphi_n\|_C = \infty$. Как видно из (13), нормы $\|\varphi_n\|_C$ не могут все же возрастать слишком быстро.

Условие (13) точно в том смысле, что для системы Хаара $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|_C^{-2-\varepsilon} < \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Несмотря на то, что любой ортогональный в $L^2(0, 1)$ нормированный базис пространства $C[0, 1]$ не удовлетворяет условию (S_0), мы можем указать класс базисов в $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию

S_0. Именно, любой базис из класса Шаудера, о котором говорилось выше, удовлетворяет условию (S_0).

Пусть функция $x \in C\,[0, 1]$. Положим тогда $\Delta\,[x] = \{t : t \in [0, 1],\ x\,(t) \neq 0\}$. Для функций Фабера — Шаудера получаем $\Delta\,[\Phi_n] = \left(\frac{\nu - 1}{2^s}, \frac{\nu}{2^s}\right)$ при $n = 2^s + \nu$ ($s \geqslant 0,\ 1 \leqslant \nu \leqslant 2^s$).

Замечание 4. Соотношение $\Delta\,[\Phi_n] \supset \Delta\,[\Phi_m]$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Delta\,[\Phi_n]$ и $\Delta\,[\Phi_m]$ имеют общую точку и $m \geqslant n$.

Определение 2. Перестановку $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ системы Фабера — Шаудера назовем нормальной, если при $\Delta\,[\psi_n] \supset \Delta\,[\psi_m]$ функция ψ_n предшествует функции ψ_m.

Это определение аналогично соответствующему определению А. М. Олевского для системы Хаара [7].

ЛЕММА 3. *Всякая нормальная перестановка системы Фабера — Шаудера образует базис в* $C\,[0, 1]$.

Доказательство леммы 3 почти дословно повторяет доказательство аналогичной леммы А. М. Олевского для системы Хаара ([7], стр. 422—423), лишь случай двоично-рациональных точек не надо рассматривать особо.

§ 3. Используя теорему 1, мы легко получим условия, описывающие класс последовательностей коэффициентов сходящихся рядов по базисам пространства $C\,[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть задана последовательность чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Для того чтобы существовал нормированный базис* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *пространства* $C\,[0, 1]$, *для которого ряд* (1) *сходится, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2).

Необходимость очевидна, а достаточность мгновенно следует из теоремы 1. В самом деле, пусть последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2) и последовательность знаков $\{\varepsilon_n = \pm 1\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что ряд $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n\,[\varepsilon_n \Phi_n]$ сходится в $C\,[0, 1]$, тогда $\{y_n = \varepsilon_n \Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — искомый нормированный базис.

Теорема 4 неверна для произвольного пространства Банаха, имеющего базис. Более того, если $\Sigma_{n=0}^{\infty} |\,c_n|^p = \infty$ при любом $p > 1$, то для любого квазинормированного *)

---

*) Базис $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется квазинормированным, если $0 < A_1 \leqslant \|\,y_n\| \leqslant A_2 < \infty$ ($n = 0, 1, \ldots$).

базиса $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в равномерно гладком пространстве Банаха расходится ряд (1). Этот результат был получен в [8]. Заметим также, что базис, существование которого утверждает достаточность теоремы 4, существенно зависит от последовательности $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, ибо (см. [4], стр. 102—103, 131) для любого квазинормированного базиса $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $C[0, 1]$ существует последовательность чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (2), для которой ряд (1) расходится.

Далее, для квазинормированных базисов достаточность теоремы 4 допускает следующее усиление.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть задана последовательность чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *причем не все* c_n *равны нулю, и ненулевой элемент* $x \in C[0, 1]$.

Для того чтобы существовал квазинормированный базис $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *в* $C[0, 1]$, *для которого* $x \overset{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2).

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, согласно теореме 4, существуют ненулевой элемент $\tilde{x} \in C[0, 1]$ и нормированный базис $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $C[0, 1]$ такие, что

$$\tilde{x} \overset{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{y}_n. \tag{14}$$

Пусть U — линейный ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный, действует из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$ и удовлетворяет условию

$$x = U\tilde{x}. \tag{15}$$

Такой оператор существует (см. [4], стр. 103). Из (14) и (15) следует, что $\{y_n = U\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — искомый квазинормированный базис. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть задана последовательность чисел* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Для того чтобы при любом нормированном базисе $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *пространства* $C[0, 1]$ *сходился ряд* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3).

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим противное, т. е.

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |c_n| = \infty, \tag{3'}$$

и покажем, что для некоторого нормированного базиса $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $C\,[0, 1]$ ряд (1) расходится.

Построим по индукции последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$, $\{M_k\}$, $\{s_k\}$ и $\{l_k\}$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum\nolimits_{n=m_k}^{M_k} |c_n| \geqslant \delta_0, \tag{16}$$

$$p(s_k) < m_k \leqslant p(s_k + 1), \tag{17}$$

$$(k = 1, 2, \ldots),$$

$$l_{k-1} < m_k \leqslant M_k < l_k, \tag{18}$$

$$l_k = 2^{s_k + M_k - m_k + 2}, \tag{19}$$

где δ_0 — некоторое положительное число, $l_0 = 2$, а числа $p(s)$ $(s = 0, 1, \ldots)$ определяются из соотношений

$$\Phi_{p(s)}\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0 \qquad (2^s < p(s) \leqslant 2^{s+1}, s = 0, 1, \ldots).$$

В силу условия (3′) найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $N > 0$ можно определить номера $M_N \geqslant m_N > N$ такие, что $\sum\nolimits_{n=m_N}^{M_N} |c_n| \geqslant \delta_0$, причем число M_N можно взять сколь угодно большим. Пусть $k = 1$, $N = l_0$, тогда существуют номера $M_1 \geqslant m_1 > l_0$ такие, что $\sum\nolimits_{n=m_1}^{M_1} |c_n| \geqslant \delta_0$.

Определим число s_1 из соотношения (17), выберем M_1 настолько большим, чтобы $2^{s_1 + M_1 - m_1 + 2} > M_1$, и положим $l_1 = 2^{s_1 + M_1 - m_1 + 2}$.

Пусть $k = 2$, $N = l_1$, тогда можно определить номера $M_2 \geqslant m_2 > l_1$ так, что $\sum\nolimits_{n=m_2}^{M_2} |c_n| \geqslant \delta_0$, и так далее. Ясно, что искомые последовательности можно определить.

Зафиксируем число $k \geqslant 1$ произвольно и в блоке $\{\Phi_n\}_{n=l_{k-1}+1}^{l_k}$ переставим функции следующим образом. Положим

$$\psi_{l_{k-1}+i} = \Phi_{l_{k-1}+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_k - l_{k-1} - 1), \tag{20}$$

$$\psi_{m_k+i-1} = \Phi_{p(s_k+i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, M_k - m_k + 1). \tag{21}$$

Пусть $\{n_k(i)\}_{i=1}^{l_k-M_k}$ — это расположенные в порядке возрастания номера n, $l_{k-1} < n \leqslant l_k$, для которых функция Φ_n не участвует в равенствах (20) и (21). Положим тогда

$$\psi_{M_k+i} = \Phi_{n_k(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l_k - M_k). \tag{22}$$

Таким образом, мы получим некоторую перестановку $\{\psi_n\}_{n=l_{k-1}+1}^{l_k}$ блока $\{\Phi_n\}_{n=l_{k-1}+1}^{l_k}$.

Легко видеть, что перестановка $\{\psi_n\}_{n=l_{k-1}+1}^{l_k}$ удовлетворяет условию нормальности, т. е. при $\Delta[\psi_n] \supset \Delta[\psi_m]$ выполнено неравенство $m \geqslant n$. Это следует из соотношений (17) — (22) и замечания 4.

Следовательно, если мы положим еще $\psi_n = \Phi_n$ $n = 0, 1, 2)$, то система $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является нормальной перестановкой системы Фабера — Шаудера. В силу леммы 3 $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является нормированным базисом пространства $C[0, 1]$, а тогда и последовательность $\{y_n = \operatorname{sign} c_n \cdot \psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *) есть нормированный базис в $C[0,1]$. В силу того, что $\Phi_{p(s)}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ $(s = 0, 1, \ldots)$, а также из (16) — (18) и (21) получаем

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\, \psi_n\left(\frac{2}{3}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=m_k}^{M_k} |c_n|\, \psi_n\left(\frac{2}{3}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=m_k}^{M_k} |c_n| \geqslant \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \delta_0 = \infty,$$

т. е. ряд (1) расходится. Теорема доказана.

Теорема 6 (так же, как и теорема 5) неверна для произвольных пространств Банаха, так как если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$ при любом $p > 1$, то для любого квазинормированного базиса $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в равномерно выпуклом пространстве Банаха сходится ряд (1) [8].

Из теоремы 4 следует, что о последовательности коэффициентов базисного разложения по нормированному базису пространства $C[0, 1]$ мы не можем сказать ничего нового

---

*) Если $c_n = 0$, то считаем $y_n = \psi_n$.

по сравнению со случаем произвольного пространства Банаха, имеющего базис. Нам представляется, что это связано со свойствами единичной сферы пространства: $C[0, 1]$ имеет плохую репутацию с точки зрения гладкости единичной сферы, и естественно, что в $C[0, 1]$ реализуется наихудший из возможных случаев.

Точно так же «плохие» свойства единичной сферы пространства $C[0, 1]$ не позволяют утверждать, что ряд (1) сходится для любого нормированного базиса в $C[0, 1]$ при менее ограничительном условии, нежели (3).

Наконец, заметим, что для последовательностей $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $|c_n| \downarrow 0$ при $n \to \infty$, и пространств Гильберта утверждение, подобное теореме 4, доказано [9] при условии $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p < \infty$ при некотором $p > 1$, а утверждение, подобное теореме 6, доказано [9] при условии $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p < \infty$ при любом $p > 1$.

Автор благодарит В. А. Андриенко за постоянное внимание к работе.

Одесский государственный университет

Поступило 14.XII.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ульянов П. Л., О рядах по системе Хаара, Матем. сб., **63** № 3 (1964), 356—391.
[2] Faber G., Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., **19** (1910), 104—112.
[3] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitschr., **26** (1927), 47—65.
[4] Дэй М., Нормированные линейные пространства, М., 1961.
[5] Мелетиди М. А., О базисах в пространствах C и L^p, Матем. заметки, **10**, № 6 (1971), 635—640.
[6] Олевский А. М., О расходимости ортогональных рядов и коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам, Сиб. матем. ж., **4**, № 3 (1963), 647—656.
[7] Олевский А. М., Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормальным системам, Изв. АН СССР, Сер. матем., **30**, № 2 (1966), 387—432.
[8] Гурарий В. И., Гурарий Н. И., О базисах в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах, Изв. АН СССР, Сер. матем., **35**, № 1 (1970), 210—215.
[9] Гурарий Н. И., О последовательностях коэффициентов разложений по базисам в гильбертовом и банаховом пространствах, Изв. АН СССР, Сер. матем., **35**, № 1 (1970), 216—223.