А. В. Кравченко, О решеточной сложности квазимногообразий графов и эндографов, *Алгебра и логика*, 1997, том 36, номер 3, 273–281

Алгебра и логика, 36, N 3 (1997), 273—281

УДК 512.57

О РЕШЕТОЧНОЙ СЛОЖНОСТИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ГРАФОВ И ЭНДОГРАФОВ

А. В. КРАВЧЕНКО

Для произвольного квазимногообразия $\mathcal{K}$ через $L_q(\mathcal{K})$ обозначим решетку квазимногообразий, содержащихся в $\mathcal{K}$. Квазимногообразие $\mathcal{K}$ конечной сигнатуры называется *$\mathcal{Q}$-универсальным*, если для любого квазимногообразия $\mathcal{V}$ конечной сигнатуры решетка $L_q(\mathcal{V})$ изоморфна гомоморфному образу некоторой подрешетки в $L_q(\mathcal{K})$. Это понятие в случае квазимногообразий алгебр ввел М. Сапир в [1], где он дал критерий $\mathcal{Q}$-универсальности и привел первые примеры $\mathcal{Q}$-универсальных квазимногообразий. С. В. Сизый [2] обобщил этот критерий на случай систем предикатной сигнатуры и с его помощью доказал, что квазимногообразие $\mathcal{D}$ двудольных антирефлексивных антисимметричных графов является $\mathcal{Q}$-универсальным.

В настоящей работе строится бесконечная убывающая цепь $\mathcal{Q}$-универсальных квазимногообразий, начинающаяся с $\mathcal{D}$, пересечение которой имеет счетную дистрибутивную решетку квазимногообразий. Доказывается также $\mathcal{Q}$-универсальность квазимногообразия симметричных эндографов.

1. Под *графом* мы понимаем систему $\langle G, R\rangle$, где G — непустое множество и R — бинарное отношение на G. Для сокращения записей вместо $R(x,y)$ мы будем писать просто xy. *Эндографом* называется алгебраическая система $\langle G, R, f\rangle$, где $\langle G, R\rangle$ — граф и f — эндоморфизм графа $\langle G, R\rangle$. Класс всех эндографов определяется квазитождеством $(\forall x)\,(\forall y)\,[xy \to f(x)f(y)]$. Понятие эндографа, как и более общее понятие эндомодели, ввел Ю. М. Важенин в совместной с С. В. Сизым работе [3], в которой приведены соответствующие мотивировки и получены первые результаты. Дальнейшее развитие эти результаты получили в [4, 5].

Граф (эндограф) называется *антирефлексивным* (*антисимметричным*, *неориентированным*), если отношение R антирефлексивно (соответственно антисимметрично, симметрично).

Пусть $\langle G, R\rangle$ — произвольный граф и $C(G) = P(G \times G) \times P(G \times G)$, где $P(G\times G)$ — булева решетка подмножеств множества $G\times G$. Следуя [6], элемент $\theta = \langle\theta(\approx), \theta(R)\rangle \in C(G)$ назовем *конгруэнцией на графе* $\langle G, R\rangle$, если выполняются следующие условия:

1) $\theta(\approx)$ является отношением эквивалентности на G.

2) Если xy, то $\langle x, y\rangle \in \theta(R)$.

3) Если $\langle x, y\rangle \in \theta(R)$, $\langle x, u\rangle \in \theta(\approx)$ и $\langle y, v\rangle \in \theta(\approx)$, то $\langle u, v\rangle \in \theta(R)$.

Элемент $\theta = \langle\theta(\approx), \theta(R)\rangle \in C(G)$ называется *конгруэнцией на эндографе* $\langle G, R, f\rangle$, если дополнительно выполняется ещё и условие:

4) Если $\langle x, y\rangle \in \theta(\approx)$, то $\langle f(x), f(y)\rangle \in \theta(\approx)$.

Пусть $\langle G, R\rangle$ — граф. На фактор-множестве $G/\theta = \{g/\theta(\approx) : g \in G\}$ по эквивалентности $\theta(\approx)$ определим предикат $R^{G/\theta}$, положив $R^{G/\theta}(u/\theta(\approx), v/\theta(\approx))$ тогда и только тогда, когда $\langle u, v\rangle \in \theta(R)$. Граф $\langle G/\theta, R^{G/\theta}\rangle$ называется *фактор-графом* графа G по конгруэнции θ. Если $\langle G, R, f\rangle$ — эндограф, то определим на G/θ функцию $f^{G/\theta}$, положив $f^{G/\theta}(u/\theta(\approx)) = f(u)/\theta(\approx)$. Эндограф $\langle G/\theta, R^{G/\theta}, f^{G/\theta}\rangle$ будем называть *фактор-эндографом* эндографа G по конгруэнции θ.

Пусть G — граф (эндограф) и $\mathcal{K}$ — произвольное квазимногообразие графов (соответственно эндографов). Через $\mathrm{Con}_{\mathcal{K}} G$ мы будем обозначать множество таких конгруэнций θ на G, что фактор-граф (фактор-эндограф) G/θ принадлежит $\mathcal{K}$. Согласно [6], для любого графа (эндографа) G множество $\mathrm{Con}_{\mathcal{K}} G$ является алгебраической решеткой относительно порядка, индуцированного решеткой $C(G)$.

Пусть G и H — графы (эндографы) и φ — гомоморфизм из G в H. Определим *ядро* $\ker\varphi$ как пару $\langle(\ker\varphi)(\approx), (\ker\varphi)(R)\rangle$, где $(\ker\varphi)(\approx) = \{\langle a, b\rangle : \varphi(a) = \varphi(b)\}$, $(\ker\varphi)(R) = \{\langle a, b\rangle : \varphi(a)\varphi(b)\}$. Нетрудно убедиться (см. [6]), что для любого гомоморфизма φ графа (эндографа) G ядро $\ker\varphi$ является конгруэнцией на G и справедлива теорема о гомоморфизме, т.е. имеет место взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на G и гомоморфизмами.

В основе нашего подхода лежит критерий $\mathcal{Q}$-универсальности В. А. Горбунова.

ТЕОРЕМА 1 [7]. *Квазимногообразие $\mathcal{K}$ алгебраических систем конечной сигнатуры является $\mathcal{Q}$-универсальным, если существует семейство G_n, $n < \omega$, конечных систем в $\mathcal{K}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathcal{Q}1$) $\mathbf{H}(G_n) \cap \mathbf{SH}(G_m) \cap \mathcal{K} = \{E\}$ *для всех* $n \neq m$.

($\mathcal{Q}2$) *Для любого n и любых конгруэнций $\theta, \theta' \in \mathrm{Con}_{\mathcal{K}} G_n$ если G_n/θ' вложима в G_n/θ, то $\theta' = \theta$ или $\theta' = 1$.*

($\mathcal{Q}3$) *Для любого n решетка $\mathrm{Con}_{\mathcal{K}} G_n$ содержит нижнюю подполурешетку, изоморфную булевой полурешетке $\langle \mathbf{2}^n, \cap\rangle$.*

Здесь $\mathbf{H}(\mathcal{V})$ и $\mathbf{S}(\mathcal{V})$ обозначают соответственно классы всех гомоморфных образов и всех подсистем систем из класса $\mathcal{V}$, а E — единичную систему.

2. Пусть P и N обозначают соответственно множества простых и натуральных чисел, a — конечное подмножество в P и $p_a = \prod_{\eta\in a} \eta$ (если $a = \varnothing$, то полагаем $p_a = 1$). Пусть $P(a) = P \setminus a$, $N_a = N \setminus (\{kp_a : k > 1\} \cup \cup\{1\})$ и $\mathcal{N}_a$ — квазимногообразие антирефлексивных графов, определенное следующими квазитождествами:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[xy \,\&\, xz \to y = z], \tag{1}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[yx \,\&\, zx \to y = z], \tag{2}$$

$$K_n \rightleftharpoons (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\mathop{\&}_{1\le i\le n-1} x_i x_{i+1} \,\&\, x_n x_1 \to x_1 = x_2], \ n \in N_a. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого конечного подмножества $a \subseteq P$ квазимногообразие $\mathcal{N}_a$ является $\mathcal{Q}$-универсальным.*

В частности, при $a = \{2\}$ получаем один из основных результатов работы С. В. Сизого [2].

Граф C_k, заданный системами порождающих $x_1, \ldots, x_k$, где $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, и определяющих соотношений $x_i x_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$, и $x_k x_1$ для $k \geq 2$, называется *направленным циклом длины* k. Пусть $C_1 = E$ и $\mathcal{C} = \{C_k : k \geq 1\}$. Для $k \geq 0$ граф L_k, заданный порождающими $x_1, \ldots, x_{k+1}$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, и определяющими соотношениями $x_i x_{i+1}$, $1 \leq i \leq k$, называется *направленной цепью длины* k. Все направленные циклы и цепи являются антирефлексивными графами и удовлетворяют квазитождествам (1) и (2).

ЛЕММА 1. *Для любого* $m \geq 2$ *имеет место равенство* $\mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{C} = \{C_k : k$ *делит* $m\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 2$ и k — делитель числа m. Отображение φ графа C_m в C_k, определенное формулой $\varphi(c_i^m) = c_j^k$, где $i \equiv j \pmod k$, является гомоморфизмом "на" (здесь и далее c_i^m, $1 \leq i \leq m$, обозначают элементы C_m, а c_j^k, $1 \leq j \leq k$, — элементы C_k). Таким образом, $\{C_k : k \text{ делит } m\} \subseteq \mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{C}$.

Обратно, пусть $C_k \in \mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{C}$, $k \neq m$, и $\varphi : C_m \to C_k$ — гомоморфизм "на". Выберем наименьшее положительное число a такое, что $\langle c_1^m, c_{1+a}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$. Поскольку φ — гомоморфизм и графы из $\mathcal{C}$ удовлетворяют квазитождествам (1), (2), то $\langle c_2^m, c_{2+a}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$, $\langle c_3^m, c_{3+a}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$ и т.д. Аналогично, $\langle c_m^m, c_a^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$, $\langle c_{m-1}^m, c_{a-1}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$ и т.д. (коэффициенты берутся по модулю m). Поэтому $\{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : t \equiv s \pmod a\} \subseteq (\ker \varphi)(\approx)$. Если найдется пара $\langle c_i^m, c_j^m \rangle$ такая, что $j - i = qa + r$ для некоторых $q \geq 0$ и $0 < r < a$, то по доказанному выше $\langle c_i^m, c_{i+r}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$. Тогда $\langle c_1^m, c_{1+r}^m \rangle \in (\ker \varphi)(\approx)$, что противоречит выбору a. Таким образом, $\{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : t \equiv s \pmod a\} = (\ker \varphi)(\approx)$. Поскольку $\varphi(C_m) = C_k$, имеем $(\ker \varphi)(\approx) = \{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : s \equiv t \pmod k\}$. Тогда по определению графа C_k получаем $(\ker \varphi)(R) = \{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : s + 1 \equiv t \pmod k\}$. С другой стороны, в C_m выполняется $c_m^m c_1^m$, следовательно, $\langle c_m^m, c_1^m \rangle \in (\ker \varphi)(R)$ и $m + 1 \equiv 1 \pmod k$, т.е. k делит m. □

Теперь мы можем дать более точное описание квазимногообразий вида $\mathcal{N}_a$. Очевидно, для любого $m \in N_a$ квазитождество K_m ложно в C_m, а для любого $m \notin N_a$ по лемме 1 все квазитождества K_n,

$n \in \mathcal{N}_a$, выполняются в C_m в силу ложности посылки. Рассмотрим теперь класс $\mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{N}_a$, где $m \geq 2$. В графе C_m выполняются $\forall\exists$-формулы $(\forall x)\,(\exists y)\,[xy]$ и $(\forall x)\,(\exists z)\,[zx]$, ложные в любой направленной цепи конечной длины. Таким образом, справедливы следующие два утверждения:

ЛЕММА 2. *Для любого нееденичного графа $G \in \mathcal{N}_a$ каждая конечная компонента связности изоморфна либо графу C_{kp_a} для некоторого $k > 1$, либо графу L_m для некоторого $m > 1$.*

ЛЕММА 3. *Имеет место включение $\mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{N}_a \subseteq \mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{C}$ для всех $m \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Рассмотрим произвольное стандартное разбиение множества $P(a)$, т.е. такое разбиение $P(a) = \bigcup_{n \in N} P_n$, что $P_n \cap P_m = \varnothing$ при $n \neq m$ и $|P_n| = n$ для всех n, и обозначим $k_n = \prod_{\eta \in P_n} \eta$. Положим теперь $G_n = C_{p_a k_n}$ для всех $n \in N$. Очевидно, $\{G_n : n \in N\} \subseteq \mathcal{N}_a$ и все системы этого семейства конечны.

Из лемм 1 и 3 имеем $\mathbf{H}(G_n) \cap \mathcal{N}_a = \{C_{p_a t} : t$ делит $k_n, t \neq 1\} \cup \{E\}$. Кроме того, направленные циклы разной длины не вложимы друг в друга, следовательно, для семейства G_n, $n < \omega$, условия $(Q1)$ и $(Q2)$ теоремы 1 выполняются.

Наконец, пусть $\{\varphi_t : G_n \to C_{p_a t} : t$ делит $k_n, t \neq 1\}$ — семейство всевозможных гомоморфизмов графа G_n на нееденичные системы из $\mathcal{N}_a$. По определению числа k_n, t делит k_n в том и только том случае, если $t = \prod_{\eta \in c} \eta$ для некоторого подмножества $c \subseteq P_n$, $c \neq \varnothing$. Следовательно, $|\{\ker \varphi_t : t$ делит $k_n\}| = 2^n - 1$. Рассмотрим пересечение $\ker \varphi_t \cap \ker \varphi_s$ для различных делителей s и t числа k_n. Из доказательства леммы 1 следует, что $(\ker \varphi)(\approx) = \{\langle c_i, c_j \rangle : i \equiv j \pmod{tp_a}\}$, $(\ker \varphi)(R) = \{\langle c_i, c_j \rangle : i+1 \equiv j \pmod{tp_a}\}$ и аналогично для φ_s. Отсюда $\ker \varphi_t \cap \ker \varphi_s = \ker \varphi_x$, где x — наименьшее общее кратное чисел s и t. Таким образом, нижняя подполурешетка решетки $\mathrm{Con}_{\mathcal{N}_a} G_n$, порожденная ядрами гомоморфизмов φ_t, где t делит k_n, и ядром гомоморфизма на единичную систему, антиизоморфна верхней полурешетке всех подмножеств n-элементного множества по объединению, т.е. изоморфна булевой полурешетке $\langle \mathbf{2}^n, \cap \rangle$.

Таким образом, все условия теоремы 1 для семейства G_n, $n < \omega$, выполняются, поэтому все квазимногообразия вида $\mathcal{N}_a$ являются $\mathcal{Q}$-универсальными. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого конечного подмножества a в P существует бесконечная убывающая цепь $\mathcal{V}_n$, $n < \omega$, $\mathcal{Q}$-универсальных квазимногообразий в $L_q(\mathcal{N}_a)$ такая, что пересечение $\mathcal{V} = \bigcap_{n<\omega} \mathcal{V}_n$ имеет дистрибутивную счетную решетку квазимногообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку a — конечное подмножество в P, найдется элемент $p \in P(a)$; пусть $b = a \cup \{p\}$. Очевидно, $\mathcal{N}_b \subseteq \mathcal{N}_a$, причем включение строгое. Занумеруем числа из $P(a)$ по возрастанию $p_1 < p_2 < \ldots$ и построим возрастающую цепь $a \subseteq a \cup \{p_1\} \subseteq a \cup \{p_1, p_2\} \ldots$ конечных подмножеств в P. Пусть $\mathcal{V}_n = \mathcal{N}_{a\cup\{p_1,\ldots,p_n\}}$. Тогда $\mathcal{V}_n$, $n < \omega$, образуют бесконечную убывающую цепь в $L_q(\mathcal{N}_a)$ и по теореме 2 все квазимногообразия $\mathcal{Q}$-универсальны. В пересечении $\mathcal{V}$ этой цепи выполняются все квазитождества K_n, $n \geq 2$, поэтому в силу леммы 2 для любого графа из $\mathcal{V}$ любая его конечная компонента связности является направленной цепью.

Очевидно, $\mathbf{Q}(L_k) \subseteq \mathbf{Q}(L_{k+1})$ для любого $k \geq 0$, причем все включения строгие. (Через $\mathbf{Q}(G)$ здесь и далее мы будем обозначать квазимногообразие, порожденное графом G.) Рассмотрим граф L_k^*, $k \geq 0$, состоящий из двух компонент связности, изоморфных графу L_k. Тогда $\mathbf{Q}(L_k) \subseteq \mathbf{Q}(L_k^*)$ и, поскольку в L_k выполняется квазитождество

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_{k+1})(\forall y_1)\ldots(\forall y_{k+1})[\mathop{\&}_{1\leq i\leq k} x_i x_{i+1} \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1\leq j\leq k} y_j y_{j+1} \to x_1 = y_1],$$

ложное в L_k^*, это включение строгое.

Пусть $a_1, \ldots, a_{k+1}$ — элементы одной компоненты связности графа L_k^*, $b_1, \ldots, b_{k+1}$ — элементы другой его компоненты и $c_1, \ldots, c_{k+2}$ — элементы графа L_{k+1}. Тогда отображение φ из L_k^* в прямое произведение $L_{k+1} \times L_{k+1}$, для которого $\varphi(a_i) = \langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $\varphi(b_i) = \langle c_{i+1}, c_i\rangle$, $1 \leq i \leq k+1$, является вложением, поэтому $\mathbf{Q}(L_k^*) \subseteq \mathbf{Q}(L_{k+1})$. Поскольку в L_k^* выполняется квазитождество $(\forall x_1)\ldots(\forall x_{k+2})[\mathop{\&}_{1\leq i\leq k+1} x_i x_{i+1} \to x_1 = x_2]$, ложное в L_{k+1}, это включение строгое. Таким образом, в $\mathcal{V}$ существует счетная строго возрастающая цепь подквазимногообразий

$$\mathbf{Q}(L_0) \subsetneq \mathbf{Q}(L_0^*) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{Q}(L_k) \subsetneq \mathbf{Q}(L_k^*) \subsetneq \mathbf{Q}(L_{k+1}) \ldots .$$

Пусть G — произвольный конечный граф из $\mathcal{V}$ и длина его наибольшей компоненты связности равна k. Такой граф имеет гомоморфизм в L_k. Пусть a, b — два различных элемента из G. Если они принадлежат одной компоненте связности графа G, то $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ при любом гомоморфизме φ из G в L_k. Если G_1 — компонента связности, содержащая a, $G_2 = G \backslash G_1$ и $b \in G_2$, то для любого гомоморфизма φ из G в L_k^*, при котором G_1 и G_2 отображаются в разные компоненты связности, имеем $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Аналогично показывается, что для любой пары элементов $a, b \in G$, где $\neg ab$, существует гомоморфизм из G в L_k^*, при котором $\varphi(a)\varphi(b)$ ложно в L_k^*. Поэтому G аппроксимируется подсистемами графа L_k^*, и, следовательно, $\mathbf{Q}(L_k) \subseteq \mathbf{Q}(G) \subseteq \mathbf{Q}(L_k^*)$.

Если теперь граф L_k^* вложим в G, то $\mathbf{Q}(G) = \mathbf{Q}(L_k^*)$. Если же L_k^* не вложим в G, то только одна компонента связности графа G имеет длину k и в этом случае G аппроксимируется подсистемами графа L_k, следовательно, $\mathbf{Q}(G) = \mathbf{Q}(L_k)$. Таким образом, любое подквазимногообразие в $\mathcal{V}$ совпадает с $\mathbf{Q}(L_k)$ или с $\mathbf{Q}(L_k^*)$ для подходящего $k \geq 0$. Следовательно, $L_q(\mathcal{V})$ является счетной цепью. □

Для любого конечного подмножества $a \subseteq P$ через $\mathcal{N}_a'$ обозначим квазимногообразие антирефлексивных эндографов, определенное квазитождествами (1)—(3) и тождеством $(\forall x)[f(x) = x]$. Решетки $L_q(\mathcal{N}_a)$ и $L_q(\mathcal{N}_a')$ изоморфны, поэтому из теоремы 2 и следствия 1 сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого конечного подмножества $a \subseteq P$ квазимногообразие $\mathcal{N}_a'$ является Q-универсальным и в $L_q(\mathcal{N}_a')$ существует бесконечная убывающая цепь $\mathcal{W}_n$, $n < \omega$, Q-универсальных квазимногообразий такая, что пересечение $\mathcal{W} = \bigcap_{n<\omega} \mathcal{W}_n$ имеет дистрибутивную счетную решетку квазимногообразий.*

3. Пусть $\mathcal{N}$ обозначает квазимногообразие антирефлексивных симметричных эндографов, определенное квазитождеством

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[f(y) = x \,\&\, f(z) = x \to y = z]. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 3. *Квазимногообразие $\mathcal{N}$ является $\mathcal{Q}$-универсальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подкласс $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ эндографов C_k, заданных в $\mathcal{N}$ порождающими $x_1, \ldots, x_k$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, и определяющими соотношениями $x_i x_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$, $x_k x_1$, и $f(x_i) = x_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$, $f(x_k) = x_1$, для $k \geq 2$, и пусть $C_1 = E$. Для таких эндографов справедлив аналог леммы 1, т.е. $\mathbf{H}(C_m) \cap \mathcal{C} = \{C_k : k \text{ делит } m\}$ для любого $m \geq 2$.

Действительно, так же, как и при доказательстве леммы 1, легко строится гомоморфизм эндографа C_m на C_k, где k — делитель m. Обратно, пусть $k \neq m$ и $\varphi : C_m \to C_k$ — гомоморфизм "на". Для произвольной пары $\langle c_i, c_j \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$ имеем $f(c_i^m) = c_{i+1}^m$, $f(c_j^m) = c_{j+1}^m$ (коэффициенты берутся по модулю m), следовательно, по определению конгруэнции $\langle c_{i+1}^m, c_{j+1}^m \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$. Аналогично $\langle c_{i+2}^m, c_{j+2}^m \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$, $\langle c_{i+3}^m, c_{j+3}^m \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$ и т.д. Используя квазитождество (4), получим $\langle c_{i-1}^m, c_{j-1}^m \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$, $\langle c_{i-2}^m, c_{j-2}^m \rangle \in (\ker\varphi)(\approx)$ и т.д. Как при доказательстве леммы 1, получаем $(\ker\varphi)(\approx) = \{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : s \equiv t \pmod{k}\}$ и без ограничения общности предполагаем справедливость равенства $\varphi(c_1^m) = c_1^k$. Тогда из равенств $f(c_m^m) = c_1^m$ и $f(c_k^k) = c_1^k$ ввиду (4) имеем $\varphi(c_m^m) = c_k^k$, следовательно, $m \equiv k \pmod{k}$, т.е. k делит m. Отсюда, в частности, следует, что если φ — гомоморфизм из C_m, $m \geq 2$, на эндограф $G \in \mathcal{N}$, то $(\ker\varphi)(\approx) = \{\langle c_s^m, c_t^m \rangle : s \equiv t \pmod{k}\}$ для подходящего делителя k числа m.

Пусть теперь $P = \bigcup_{n \in N} P_n$ — произвольное стандартное разбиение множества простых чисел, $k_n = \prod_{\eta \in P_n} \eta$ и $G_n = C_{k_n}$ для всех $n \in N$. Как и при доказательстве теоремы 2, легко показать выполнимость всех условий теоремы 1 для семейства G_n, $n \in N$. Следовательно, $\mathcal{N}$ — $\mathcal{Q}$-универсальное квазимногообразие. □

Из теорем 2 и 3 следует $\mathcal{Q}$-универсальность квазимногообразий антирефлексивных графов и антирефлексивных симметричных эндографов. Остается открытым вопрос о $\mathcal{Q}$-универсальности квазимногообразия $\mathcal{S}$ обыкновенных (т.е. антирефлексивных, симметричных) графов.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Горбунову за постановку проблем и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Sapir*, The lattice of quasivarieties of semigroups, Algebra univers., 21 (1985), 172—180.
2. *С. В. Сизый*, Квазимногообразия графов, Сиб. матем. ж., 35, N 4 (1994), 879—892.
3. *Ю. М. Важенин, С. В. Сизый*, Квазимногообразия эндомоделей, Изв. вузов, Матем., N 2 (1988), 66—67.
4. *С. В. Сизый*, Решетки квазимногообразий эндомоделей. Алгебраические системы и их многообразия, Свердловск, 1988, 120—137.
5. *С. В. Сизый*, О минимальных квазимногообразиях эндографов, Матем. заметки, 51, N 6 (1992), 59—68.
6. *В. А. Горбунов, В. И. Туманов*, Строение решеток квазимногообразий, в кн. "Математическая логика и теория алгоритмов" (Тр. ИМ СО АН СССР, 2), Новосибирск, 1982, 12—44.
7. *В. А. Горбунов*, Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. II, Алгебра и логика, 34, N 4 (1995), 369—397.

КРАВЧЕНКО А.В. Получено 23 января 1996 года

РОССИЯ,
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,
Новосибирский государственный университет.