М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов, О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей,
Изв. вузов. Матем., 1962, номер 5, 12–21

https://www.mathnet.ru/ivm2094

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1962 МАТЕМАТИКА № 5 (30)

М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов

О КВАДРАТИЧНОЙ СУММИРУЕМОСТИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

Оценки старших производных решений эллиптических краевых задач через свободный член имеют в настоящее время многочисленные приложения. Особенно часто используются оценки старших производных в норме пространства L_2. Такого рода оценки установлены лишь для областей с достаточно гладкой границей. В настоящей работе на примере задачи Дирихле для эллиптического оператора второго порядка с вещественными коэффициентами показано, что в областях с кусочно гладкой границей вопрос осложняется и его решение зависит от геометрических свойств области. Основное внимание уделено случаю двух независимых переменных. В конце работы приведены некоторые результаты для многомерных краевых задач.

1°. Пусть Ω — ограниченная область на плоскости переменных $x=(x_1, x_2)$ и пусть граница Γ области Ω состоит из конечного числа трижды непрерывно дифференцируемых дуг, встречающихся под ненулевыми углами. Ниже мы будем рассматривать следующие классы функций, определенных в Ω.

$C_k(\overline{\Omega})$ — множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

$C_{k,0}(\overline{\Omega})$ — множество функций из $C_k(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль на Γ.

$L_2(\Omega)$ — пространство квадратично суммируемых по Ω функций. Скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$ будем обозначать как обычно: $(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

$W_2^{(k)}(\Omega)$, $k \geqslant 1$ — множество функций, имеющих все квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные до порядка k включительно.

$W_{2,0}^{(k)}(\Omega)$ — множество функций из $W_2^{(k)}(\Omega)$, обращающихся в нуль на Γ.

Класс $W_2^{(k)}(\Omega)$ является, как известно [1], полным пространством относительно нормы

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} = \sum_{s=0}^{k} \|D^s u\|.$$

Здесь $D^s u$ означает любую обобщенную производную от $u(x)$ порядка s. Класс $W_{2,0}^{(k)}(\Omega)$ является подпространством в $W_2^{(k)}(\Omega)$.

---

[1] Результаты работы явились предметом сообщения авторов на IV Всесоюзном математическом съезде в июле 1961 г.

Ниже через c будем обозначать различные постоянные, конкретное значение которых нам безразлично.

Рассмотрим в Ω эллиптический оператор второго порядка

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + au\ ^{1)}. \tag{1}$$

Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega})$ и имеют в Ω ограниченные первые обобщенные производные; коэффициенты $a_i(x)$ и $a(x)$ измеримы и ограничены в Ω. Уравнение

$$Lu = f(x), \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

во всяком случае разрешимо для любого $f \in L_2(\Omega)$, если $a(x)$ достаточно велико. Решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению в смысле интегрального тождества (слабое решение). Слабое решение единственно. Дополнительно можно показать, что $u \in W_2^{(2)}$ в любой внутренней подобласти Ω, и уравнение (2) удовлетворяется в Ω почти везде. Если граница Γ дважды непрерывно дифференцируема, то слабое решение оказывается принадлежащим $W_2^{(2)}(\Omega)$, причем имеет место оценка [2]

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3}$$

Возникает вопрос о справедливости этой важной оценки для областей с кусочно гладкой границей. Известно, что для оператора Лапласа в прямоугольнике слабое решение удовлетворяет неравенству (3), что устанавливается совсем просто рядами Фурье [3]. С другой стороны, О. В. Гусева привела контрпример для задачи

$$-\Delta u = f, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

в секторе Ω_β единичного круга с углом $\pi\beta^{-1}$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Действительно, положим $u_\beta(x) = \zeta(r) r^\beta \sin\beta\varphi$, где r, φ — полярные координаты, а $\zeta(r)$ — гладкая функция, равная единице при $r \leqslant \frac{1}{3}$ и нулю при $r \geqslant \frac{2}{3}$. Функция $u_\beta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_\beta)$, $\Delta u_\beta \in L_2(\Omega_\beta)$ и u_β является слабым решением задачи вида (4). В то же время $u_\beta(x) \overline{\in} W_2^{(2)}(\Omega_\beta)$ из-за особенности в начале координат.

Вместе с тем, для областей с кусочно гладкой границей оценка (3) всегда сохраняет силу как априорная. Именно, для всех функций класса $C_{3,0}(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5}$$

Отметим здесь же, что, как указал П. Е. Соболевский [6], имеет место несколько более общее неравенство. Пусть L и M — два эл-

---

1) По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

2) Это утверждение установлено О. А. Ладыженской [2], [3], [4] в многомерном случае. Для двух независимых переменных оценка (3) была установлена еще С. Н. Бернштейном [5], но только как априорная.

3) Аналогичное утверждение справедливо и в многомерном случае.

липтических оператора вида (1), причем $a(x)$ достаточно велико. Тогда для функций класса $C_{3,0}(\overline{\Omega})$ справедлива оценка[1])

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant c(Lu, Mu). \tag{6}$$

Ниже будет показано, что оценка (3) всегда справедлива, если граница области не имеет входящих углов (углов больших π). В то же время наличие хотя бы одного входящего угла всегда нарушает неравенство (3). Более того, мы установим, что каждый входящий угол порождает ровно одну функцию (разумеется, с точностью до постоянного множителя и достаточно гладкого слагаемого), обладающую теми же свойствами, что и функция $u_\beta(x)$ в примере О. В. Гусевой.

2°. Нам будет удобно рассматривать (2) как операторное уравнение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Начнем со случая формально самосопряженного оператора

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au. \tag{7}$$

Дифференциальное выражение (7), рассматриваемое на множестве $C_{3,0}(\overline{\Omega})$, порождает в $L_2(\Omega)$ симметричный оператор, который мы обозначим через A_0. Замыкание оператора A_0 обозначим через A, сопряженный к A оператор — через A^*. Индексы дефекта [8] оператора A, очевидно, равны. Их общее значение (дефектное число) обозначим через m. Нашей основной целью будет вычисление дефектного числа. Мы покажем, что *дефектное число оператора A равно числу углов бóльших π на границе Γ области Ω.*

Остановимся на связи поставленного в п. 1° вопроса с задачей вычисления дефектного числа. Прибавляя, если нужно, к $a(x)$ постоянную, превратим оператор A_0 в положительно определенный. Функции из его области определения удовлетворяют неравенству (5). Область определения оператора A получается при замыкании множества $C_{3,0}(\overline{\Omega})$ в метрике $W_2^{(2)}(\Omega)$. Она, очевидно, не зависит от оператора L, и мы обозначим ее через $D(\Omega)$, чтобы подчеркнуть зависимость от области Ω. Очевидно, $D(\Omega) \subseteq \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{(2)}(\Omega)$. Рассмотрим теперь самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A по Фридрихсу [8], [9]. Решение уравнения $\tilde{A}u = f$, как известно, равносильно нахождению слабого решения уравнения (2). Область определения оператора $\tilde{A}$ (т. е. совокупность слабых решений) обозначим $\tilde{D}(L, \Omega)$. Очевидно,

$$D(\Omega) \leqslant W_{2,0}^{(2)}(\Omega) \leqslant \tilde{D}(L, \Omega). \tag{8}$$

Далее, размерность множества $\tilde{D}(L, \Omega)$ по модулю $D(\Omega)$ равна дефектному числу оператора A:

$$m = \dim \tilde{D}(L, \Omega) \ (\operatorname{mod} D(\Omega)). \tag{9}$$

Нам понадобится еще одна формула для дефектного числа. Пусть V — подпространство решений уравнения $A^*u = 0$, или, что то же, ортогональное дополнение в $L_2(\Omega)$ к множеству значений оператора A. Дефектное число равно размерности V:

$$m = \dim V. \tag{10}$$

---

1) См., например, [4], [7]. Приведенные там доказательства неравенств (5), (6) сохраняют силу и для рассматриваемого нами класса кусочно гладких областей.

Так как на $D(\Omega)$ заведомо справедлива оценка (5), а $\tilde{D}(L, \Omega)$ — множество всех слабых решений задачи (2), то формула (9), очевидно, дает количественную характеристику „невыполнения" неравенства (3). Аналогичное толкование можно дать формуле (10) в терминах правых частей уравнения (2). В частности, если $m=0$, то оператор A самосопряженный и $D(\Omega)=W_{2,0}^{(2)}(\Omega)=\tilde{D}(L, \Omega)$, т. е. неравенство (3) справедливо для любой правой части из $L_2(\Omega)$. Именно такая ситуация имеет место в случае гладкой границы.

Отметим еще, что неравенство (6), которое также справедливо на $D(\Omega)$, влечет „неравенство острого угла"

$$\|Lu\| \; \|Mu\| \leqslant c(Lu, Mu). \tag{11}$$

Такое же неравенство справедливо и для операторов вида (1), если $a(x)$ достаточно велико. П. Е. Соболевский [6] показал, что (11) гарантирует совпадение дефектных чисел обратимых операторов L и M, если дефектные числа определить формулой (10). Заметим, что для операторов вида (1) сохранит смысл и формула (9), если под $\tilde{D}(L, \Omega)$ понимать совокупность слабых решений задачи (2). Таким образом, дефектное число m не зависит от вида оператора (1). Это позволит нам в основном ограничиться рассмотрением операторов вида (7) и в дальнейшем специализировать выбор оператора удобным образом.

3°. Мы установим прежде всего несколько простых вспомогательных утверждений, которые позволят убедиться в локальном характере рассматриваемого вопроса (см. лемму 4).

Ниже без оговорок будем предполагать, что все вводимые в рассмотрение области имеют кусочно трижды непрерывно дифференцируемую границу с углами, отличными от 0 и 2π. Если в некоторой точке границы касательная непрерывна, а кривизна или ее первые производные по дуге терпят разрыв первого рода, мы считаем эту точку угловой точкой с углом π.

Пусть область $\omega \subseteq \Omega$, причем граница γ области ω может иметь непустое пересечение с Γ. Множество $\gamma - \Gamma$ будем называть *дополнительной* (относительно Ω) *частью границы* γ. Заданную в области ω функцию $v(x)$ будем называть *финитной* вблизи части γ_1 границы γ, если $v(x)$ равна нулю в пересечении некоторой окрестности γ_1 с ω.

Лемма 1. *Если $u(x)\in D(\omega)$ и финитна вблизи части γ_1 границы γ области ω, то функцию $u(x)$ можно аппроксимировать в $W_2^{(2)}(\omega)$ функциями из $C_{3,0}(\bar{\omega})$, которые также финитны вблизи γ_1.*

Доказательство. Если $\varphi_n(x)\in C_{3,0}(\bar{\omega})$ и $\varphi_n \to u(x)$ в $W_2^{(2)}(\omega)$, то тем же свойством обладают функции $\eta(x)\varphi_n$, где $\eta(x)\in C_\infty(\bar{\Omega})$ финитна вблизи γ_1 и отлична от единицы лишь в полосе финитности функции $u(x)$.

Лемма 2[1]. *Пусть ω — достаточно малая подобласть Ω, отстоящая на положительное расстояние от угловых точек границы Γ, имеющих углы не меньше π. Пусть функция $\zeta(x)\in C_\infty(\bar{\Omega})$, равна нулю в $\Omega-\omega$ и финитна вблизи дополнительной части границы подобласти ω. Тогда для всякой функции $u(x)\in\tilde{D}(L, \Omega)$*

$$v(x)=\zeta(x)u(x)\in D(\Omega).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда граница γ области ω содержит угловую точку P границы Γ (угол при точке P меньше π).

[1] Лемма является некоторым уточнением известных фактов.

Трижды непрерывно дифференцируемым преобразованием координат $y=y(x)$, определенным в окрестности точки P, можно превратить угол в прямой, а его стороны сделать прямолинейными. При этом ω перейдет в область ω', а несколько более широкая подобласть — в прямоугольник $\delta\supseteq\omega'$, примыкающий к границе двумя сторонами. Очевидно, $v(x)\in\tilde{\tilde{D}}(L,\ \omega)$, а преобразованная функция $\breve{v}(y)\in\tilde{\tilde{D}}(L',\ \delta)$, где L' — преобразованный оператор вида (1).

Как мы отмечали в п. 1°, для оператора $L'=-\Delta$ в прямоугольнике $D(\delta)=\tilde{\tilde{D}}(-\Delta,\ \delta)$. Но тогда $m=0$, и, следовательно, для любого оператора L' вида (1) $D(\delta)=\tilde{\tilde{D}}(L',\ \delta)$. Таким образом, $\breve{v}(y)\in D(\delta)$ и, в силу леммы 1, $\breve{v}(y)\in D(\omega')$. Отсюда $v(x)\in D(\omega)$ и, снова в силу леммы 1, $v(x)\in D(\Omega)$. Случай внутренней подобласти и подобласти, примыкающей к гладкому участку границы Γ, рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 2 следует, что всякая функция $u(x)$ из $\tilde{\tilde{D}}(L,\ \Omega)$ принадлежит классу $W_2^{(2)}$ всюду в Ω за исключением, быть может, сколь угодно малых окрестностей угловых точек с углами, не меньшими π. В окрестности угла, равного π, однако, также $u(x)\in W_2^{(2)}$. Выпрямление границы в этом случае возможно с помощью один раз непрерывно дифференцируемого преобразования, вторые производные которого могут иметь разрыв первого рода. В прямоугольнике δ $\breve{v}(y)\in D(\delta)$ и обратным преобразованием координат можно найти, что $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{(2)}(\omega)$. При этом, однако, не ясно, будет ли $v(x)$ принадлежать классу $D(\omega)$. Этот вопрос решается положительно ниже (см. п. 5°).

Лемма 3. *Если граница Γ области Ω не имеет углов, больших или равных π, то $\tilde{\tilde{D}}(L,\ \Omega)=D(\Omega)$, то-есть дефектное число равно нулю*[1].

Доказательство. Очевидно, можно указать конечное число (вообще говоря, перекрывающихся) подобластей $\omega_k\subset\Omega$, $k=1,\dots,r$, удовлетворяющих условию леммы 2 и таких, что $\sum\limits_{k=1}^{r}\bar{\omega}_k=\bar{\Omega}$. Рассмотрим соответствующее „разложение единицы", т. е. совокупность функций $\zeta_k(x)\in C_\infty(\bar{\Omega})$, $k=1,\dots,r$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{r}\zeta_k(x)=1$ в $\bar{\Omega}$, каждая из функций $\zeta_k(x)$ равна нулю в $\Omega-\omega_k$ и финитна вблизи дополнительной части границы ω_k[2]. Пусть $u\in\tilde{\tilde{D}}(L,\ \Omega)$. Тогда, в силу леммы 2, $u\zeta_k\in D(\Omega)$, $k=1,\dots,r$, и, следовательно, $u=\sum\limits_{k=1}^{r}u\zeta_k\in D(\Omega)$. Лемма доказана.

Угловые точки границы Γ, в которых угол больше или равен π, ниже будем называть особыми. Мы видели, что дефектное число зависит только от области. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы будем иногда писать $m=m(\Omega)$.

Лемма 4. *Пусть граница Γ области Ω имеет l особых точек $P_1,\dots,P_l$ и пусть ω_k, $k=1,\dots,l$ — подобласти Ω, каждая из кото-*

---

1) Ниже мы убедимся, что утверждение леммы справедливо и при наличии углов равных π (см. п. 5°).

2) См. например, [10], где описана соответствующая конструкция.

рых примыкает к участку границы Γ, *содержащему точку* P_k. *Если* P_k — *единственная особая точка границы* γ_k *области* ω_k, *то*

$$m(\Omega)=\sum_{k=1}^{l} m(\omega_k).$$

Доказательство. Ограничимся для простоты письма случаем двух особых точек и обозначим $m(\omega_1)=m_1$, $m(\omega_2)=m_2$. Пусть функции $u_k(x)$, $k=1,\ldots,m_1$, образуют в $\tilde{D}(L,\ \omega_1)$ базис по модулю $D(\omega_1)$, и пусть $\eta(x)\in C_\infty(\bar{\Omega})$, $\eta(x)=0$ в $\Omega-\omega_1$ и вблизи дополнительной части границы ω_1 и $\eta(x)=1$ вблизи точки P_1. Функции $\eta u_1,\ldots,\eta u_{m_1}$ также образуют в $\tilde{D}(L,\ \omega_1)$ базис по модулю $D(\omega_1)$. Действительно, иначе для некоторой ненулевой линейной комбинации $u(x)$ функций $u_1,\ldots,u_{m_1}$ $\eta u\in D(\omega_1)$. Поскольку $(1-\eta)u\in D(\omega_1)$, в силу лемм 3 и 1, то $u\in D(\omega_1)$, что невозможно. Продолжая функции ηu_k, $k=1,\ldots,m_1$ нулем на все Ω, найдем, что они линейно независимы в $\tilde{D}(L,\ \Omega)$ по модулю $D(\Omega)$. Аналогичным образом в ω_2 строим базис вида $\zeta v_1,\ldots,\zeta v_{m_2}$, где $\zeta(x)$ — функция того же типа, что и $\eta(x)$, причем носители $\zeta(x)$ и $\eta(x)$ можно считать непересекающимися. Функции $\eta u_1,\ldots,\eta u_{m_1}$, $\zeta v_1,\ldots,\zeta v_{m_2}$ линейно независимы в $\tilde{D}(L,\ \Omega)$ по модулю $D(\Omega)$. В то же время они составляют в $\tilde{D}(L,\ \Omega)$ базис по модулю $D(\Omega)$. В этом легко убедиться, представляя функцию $u(x)\in\tilde{D}(L,\ \Omega)$ в виде $u=\eta u+\zeta u+(1-\eta-\zeta)u$ и используя леммы 3 и 1. Отсюда следует, что $m(\Omega)=m_1+m_2$. Лемма доказана.

4°. Перейдем теперь к доказательству основного утверждения. Лемма 4 позволяет ограничиться случаем подобласти $\omega\subset\Omega$, лежащей в достаточно малой окрестности особой точки P. Форму дополнительной части границы γ области ω можно менять по произволу, если при этом не появятся новые особые точки.

Случай угла, большего π. Трижды непрерывно дифференцируемое преобразование координат позволяет выпрямить прилегающие к точке P участки γ, а угол при точке P сделать равным $\frac{3\pi}{2}$. Оператор L перейдет при этом в оператор того же вида. Возьмем в качестве ω круговой сектор с углом $\frac{3\pi}{2}$ и положим $Lu=-\Delta u$. Пример О. В. Гусевой показывает, что размерность $\tilde{D}(-\Delta,\ \omega)$ по модулю $D(\omega)$ не меньше единицы. В силу сказанного выше, мы можем утверждать, что и в общем случае особой точки с углом, большим π, дефектное число $m(\omega)\geqslant 1$.

Покажем, что $m(\omega)=1$. Пусть ω теперь представляет собой шестиугольник, угол которого при точке P равен $\frac{3\pi}{2}$, а остальные углы равны $\frac{\pi}{2}$. По-прежнему положим $Lu=-\Delta u$ и воспользуемся для вычисления $m(\omega)$ формулой (10). Принадлежность $u(x)$ к множеству V означает, что $u(x)\in L_2(\omega)$ и для любой функции $\varphi(x)\in C_{3,0}(\bar{\omega})$

$$\int_\omega u\Delta\varphi\,dx=0. \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что $u(x)$ — гармоническая в ω функция. Покажем, что $u(x)$ непрерывна в ω вплоть до γ, исключая точку P, и

$u(x)=0$ на $\gamma-P$. Пусть $\delta_0\subset\omega$ — прямоугольник, примыкающий одной, двумя или тремя сторонами к γ и отстоящий от точки P на положительное расстояние, и пусть $\delta\subset\omega$ — другой прямоугольник того же типа, содержащий внутри себя δ_0 вместе с дополнительной частью границы. Предположим, далее, что функция $\eta(x)\in C_\infty(\overline{\omega})$ равна единице в δ_0 и нулю в $\omega-\delta$, а $\psi(x)$ — любая функция из $C_{3,0}(\overline{\delta})$. В (12) можно теперь положить $\varphi(x)=\eta\psi\in C_{3,0}(\overline{\omega})$. Равенство (12) примет тогда вид

$$-\int_\delta \eta u\Delta\psi dx=2\int_\delta u\nabla\eta\nabla\psi dx+\int_\delta u\Delta\eta\psi dx. \tag{13}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что δ — квадрат со стороной π. Полагая в (13) $\psi=\sin kx_1\sin lx_2\equiv\psi_{kl}$, найдем, что

$$(k^2+l^2)\int_\delta \eta u\psi_{kl}dx=2k\int_\delta u\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\cos kx_1\sin lx_2dx+$$
$$+2l\int_\delta u\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\sin kx_1\cos lx_2dx+\int_\delta u\Delta\eta\psi_{kl}dx,$$

или

$$(k^2+l^2)\alpha_{kl}=2k\beta_{kl}+2l\gamma_{kl}+\delta_{kl}, \tag{14}$$

где α_{kl} — коэффициенты Фурье функции ηu по системе ψ_{kl}, β_{kl} коэффициенты Фурье функции $u\frac{\partial\eta}{\partial x_1}$ по системе $\cos kx_1\sin lx_2$ и т. д. Поскольку $\sum\limits_{k,l}(|\alpha_{kl}|^2+|\beta_{kl}|^2+|\gamma_{kl}|^2+|\delta_{kl}|^2)<+\infty$, из (14) следует, что

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}(k^2+l^2)|\alpha_{kl}|^2<+\infty.$$

Последнее неравенство означает, что $\eta u\in W_{2,0}^{(1)}(\delta)$ и $u\in W_2^{(1)}(\delta_0)$.

Рассматривая несколько более широкий прямоугольник, мы таким же путем нашли бы, что $u\in W_2^{(1)}(\delta)$. Вернемся к соотношению (13), которое мы теперь можем представить в виде

$$-\int_\delta \eta u\Delta\psi dx=\int_\delta f\psi dx, \tag{15}$$

где $f=-(u\Delta\eta+2\nabla u\Delta\eta)\in L_2(\delta)$. Соотношение (15) означает, что функция ηu принадлежит области определения оператора, сопряженного к оператору $A_0=-\Delta$, определенному на $C_{3,0}(\overline{\delta})$. Поскольку в прямоугольнике дефектное число равно нулю, оператор A_0^* совпадает с замыканием оператора A_0, и, следовательно, $u\eta\in W_{2,0}^{(2)}(\delta)$, $u\in W_2^{(2)}(\delta_0)$ и $u(x)=0$ на сторонах δ_0, примыкающих к γ. Непрерывность $u(x)$ в δ_0 следует из теорем вложения [1].

Нам остается показать, что в ω может существовать лишь одна (с точностью до постоянного множителя) ненулевая гармоническая функция $u(x)\in L_2(\omega)$, непрерывная вплоть до γ (исключая точку P) и равная нулю на $\gamma-P$. Это легко сделать с помощью конформного отображения[1]. Действительно, пусть функция $w=g(z)$, $z=x_1+ix_2$, $w=y_1+iy_2$, конформно отображает ω на верхнюю полуплоскость $\tilde{\omega}$,

[1] См., например, работу [11], где, в частности, рассматривается близкий вопрос.

причем точка P переходит в начало координат. Функция $\tilde{u}(y_1, y_2) = u(x_1, x_2)$ гармонична в $\tilde{\omega}$, непрерывна вплоть до вещественной оси, исключая начало координат, и равна нулю при $y_2=0$, $y_1 \neq 0$ и в бесконечности. Условие $u(x) \in L_2(\omega)$ переходит в условие

$$\int_{\tilde{\omega}} |\tilde{u}|^2 |h'(w)|^2 dy < +\infty, \tag{16}$$

где $h(w)$ — функция, обратная функции $g(z)$. Продолжая $\tilde{u}(y)$ нечетным образом в нижнюю полуплоскость, найдем, что начало координат является единственной особой точкой гармонической во всей плоскости функции $\hat{u}(y)$, обращающейся в нуль в бесконечности. Отсюда следует, что $\hat{u}(y)$ должна иметь (в полярных координатах) представление

$$\hat{u}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \tag{17}$$

Из явного вида функции $h'(w)$ следует, что вблизи точки $w=0$ справедливо представление $|h'(w)|^2 = r\lambda(y_1, y_2)$, где $\lambda(y_1, y_2)$ непрерывна и $\lambda(0, 0) \neq 0$. Из (16) теперь вытекает, что в (17) $\alpha_k = \beta_k = 0$ при $k \neq 1$. Далее, из условия обращения $\tilde{u}$ в нуль на вещественной оси, вытекает, что $\alpha_1 = 0$. Таким образом, необходимо $\hat{u}(y) = \beta_1 r^{-1} \sin \varphi$. Сопоставляя это с доказанным ранее неравенством $m(\omega) \geqslant 1$, находим, что $m(\omega) = 1$.

5°. Рассмотрим теперь *случай угла, равного* π. Как и раньше достаточно вычислить дефектное число для оператора $-\Delta$ в какой-либо односвязной подобласти $\omega \subset \Omega$, примыкающей к малому участку границы, содержащему особую точку P. Воспользуемся снова формулой (10). Если $u(x) \in V$, то для любой функции $\varphi(x) \in C_{3,0}(\bar{\omega})$ выполнено соотношение (12), откуда следует, что $u(x)$ гармонична в ω. Если доказать, сверх того, что $u(x)$ непрерывна вплоть до границы γ области ω (исключая точку P) и равна нулю на $\gamma - P$, то легко показать, что $u(x) \equiv 0$ и, следовательно, $m(\omega) = 0$. В самом деле, отображая ω на верхнюю полуплоскость $\hat{\omega}$, мы снова получим для $\tilde{u}(y)$ разложение (17). Однако теперь $h'(0) \neq 0$ и потому условие (16) приводит к тому, что $u(x) = \tilde{u}(y)$ есть нуль.

Исследуем граничные свойства функции $u(x)$. Пусть точка $P_0 \in \gamma$ переходит при конформном отображении в бесконечность, и пусть дуга $\lambda_0 \subset \gamma$ отстоит на положительное расстояние от точек P и P_0. При отображении λ_0 перейдет в конечный отрезок λ_0' вещественной оси, не содержащий начала координат. Пусть δ_0 — прообраз прямоугольника $\delta_0' \subset \tilde{\omega}$, одной из сторон которого является отрезок λ_0', и пусть δ' — другой прямоугольник того же типа, содержащий внутри себя δ_0' вместе с дополнительной частью границы. Пусть, наконец, $\delta \subset \omega$ — прообраз δ'. В силу конформности преобразования граница δ не имеет особых точек. Положим в (12) $\varphi(x) = \eta\psi$, где $\eta(x) \in C_\infty(\bar{\omega})$, $\eta(x) = 1$ в δ_0, $\eta(x) = 0$ в $\omega - \delta$ и $\psi(x) \in C_{3,0}(\bar{\delta})$. В силу леммы 3 множество $C_{3,0}(\bar{\delta})$ плотно в $W_{2,0}^{(2)}(\delta) = \tilde{D}(L, \delta) = D(\delta)$ по метрике $W_2^{(2)}(\delta)$. Мы можем поэтому записать (12) в виде (13) и распространить последнее равенство во всяком случае на все функции $\psi(x) \in C_{2,0}(\bar{\delta})$, Преобразование координат, определяемое отображающей функцией, во всяком случае из класса $C_2(\bar{\delta})$, а потому при преобразовании класс $C_{2,0}(\bar{\delta})$ перейдет в класс $C_{2,0}(\bar{\delta}')$. Соотношение (13), очевидно, сохранит в новых переменных свой вид:

$$-\int_{\delta'} \tilde{\eta}\,\tilde{u}\Delta\tilde{\psi}\,dy = 2\int_{\delta'} \tilde{u}\nabla\tilde{\eta}\,\nabla\tilde{\psi}dy + \int_{\delta'} \tilde{u}\Delta\tilde{\eta}\,\tilde{\psi}\,dy$$

для всякой функции $\tilde{\psi}(y) \in C_{2,0}(\bar{\delta}')$. Повторяя теперь рассуждения п·4°, мы убедимся, что $\tilde{u}(y)$ непрерывна вплоть до λ_0' и обращается на λ_0' в нуль. Остается заметить, что непрерывность $u(x)$ в точке P_0 можно установить, если при отображении перевести в бесконечность какую-либо другую точку границы.

6°. Вернемся теперь к рассмотрению общего случая и покажем, что

$$D(\Omega) = W^{(2)}_{2,0}(\Omega). \tag{18}$$

Предположим, что это не так, и существует функция $u_0(x)$, принадлежащая $W^{(2)}_{2,0}(\Omega)$, но не $D(\Omega)$. Пусть $P_1, \ldots, P_l$ — угловые точки границы с углами, большими π, $\omega_k \subset \Omega$, $k = 1, \ldots, l$, — достаточно малая подобласть, примыкающая к точке P_k, функция $\zeta_k(x) \in C_\infty(\bar{\Omega})$ равна единице вблизи P_k и нулю в $\Omega - \omega_k$ и вблизи дополнительной части границы области ω_k. Представляя $u_0(x)$ в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x)\,u_0(x) + \left(1 - \sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x)\right) u_0(x), \tag{19}$$

замечаем, что последнее слагаемое в правой части (19) принадлежит $D(\Omega)$. Тогда хотя бы одна из функций $\zeta_k u_0 \bar{\in} D(\Omega)$. Пусть, например, $v_0 = \zeta_1 u_0 \bar{\in} D(\Omega)$ и, следовательно, $v_0 \bar{\in} D(\omega_1)$. Выполняя, если нужно, преобразование координат, можем считать ω_1 круговым сектором. В силу включений (8) и доказанного выше соотношения $\dim \tilde{\tilde{D}}(L, \omega_1)$ $(\mathrm{mod}\, D(\omega_1)) = 1$, должно быть $\tilde{D}(L, \omega_1) = W^{(2)}_{2,0}(\omega_1)$ для любого оператора L вида (1). Но в случае $L = -\Delta$ последнему равенству противоречит пример О. В. Гусевой (см. п. 1°). Таким образом, равенство (18) доказано.

7°. Суммируя все доказанное в п.п. 4°, 5°, 6°, мы можем утверждать, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть Ω — ограниченная плоская область с кусочно трижды непрерывно дифференцируемой границей, и L — эллиптический в Ω оператор вида* (1). *Пусть $\tilde{D}(L, \Omega)$ — множество слабых решений граничной задачи* (2), *когда $f(x)$ пробегает всё $L_2(\Omega)$. Тогда*

1) *Класс $W^{(2)}_{2,0}(\Omega)$ совпадает с замыканием в $W^{(2)}_2(\Omega)$ множества $C_{3,0}(\bar{\Omega})$. На функциях класса $W^{(2)}_{2,0}(\Omega)$ выполняется априорная оценка* (5).

2) *Размерность множества $\tilde{\tilde{D}}(L, \Omega)$ по модулю $W^{(2)}_{2,0}(\Omega)$ равна числу угловых точек границы области Ω с углами, большими π.*

8°. Сделаем в заключение некоторые замечания относительно n-мерного случая. Пусть граница Γ области Ω—кусочно гладкая, причем окрестность $\gamma \subset \Gamma$ каждой нерегулярной точки границы преобразованием класса C_3 может быть переведена в часть поверхности n-мерного куба, а прилегающая к γ часть Ω тем же преобразованием может быть переведена в часть n-мерного куба. Тогда, очевидно, метод доказательства лемм 2 и 3 сохраняет силу и мы можем утверждать, что *всякое слабое решение задачи* (2) *принадлежит замыканию в* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *множества* $C_{3,0}(\overline{\Omega})$. Более того, если сформулированные выше условия выполнены лишь на части Γ_1 границы Γ, то слабое решение принадлежит классу $W_2^{(2)}$ в некоторой подобласти, примыкающей к Γ_1. Вместе с тем, наличие „входящих ребер" уже в трехмерном случае приводит к бесконечному дефектному числу. Действительно, пусть Ω — прямой цилиндр конечной высоты, основанием которого служит круговой сектор, рассмотренный в примере О. В. Гусевой. Рассмотрим функцию $v_\beta(x_1, x_2, x_3) = u_\beta(x_1, x_2)\eta(x_3)$, где $u_\beta(x_1, x_2) = r^\beta \sin\beta\varphi$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$, а $\eta(x_3)$ — обычная „срезающая" функция. Легко видеть, что $v_\beta(x) \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ и является слабым решением задачи вида (4) при некотором $f(x) \in L_2(\Omega)$. В то же время $v_\beta(x) \overline{\in} W_2^{(2)}(\Omega)$. За счет сдвига и преобразования подобия можно построить в цилиндре последовательность функций вида $v_\beta(x)$ с непересекающимися носителями. Таким образом, в рассматриваемом случае дефектное число бесконечно.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 2 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

2. О. А. Ладыженская. О замыкании эллиптического оператора. ДАН СССР, т. 79, № 5, стр. 723—725, 1951.

3. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболических уравнений. ГТТИ, М., 1953.

4. О. А. Ладыженская. Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Вестник ЛГУ, № 11, стр. 23—29, 1955.

5. С. Н. Бернштейн. О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле. ДАН СССР, т. 124, № 4, стр. 735—738, 1959.

6. П. Е. Соболевский. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол. ДАН СССР, т. 116, № 5, стр. 754—757, 1957.

7. О. А. Ладыженская. Об интегральных оценках сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. Вестник ЛГУ, № 7, стр. 60—69, 1958.

8. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. V. Изд. 2, Физматгиз, М., 1959.

9. С. Г. Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала. ГТТИ, М.—Л., 1952.

10. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. ГТТИ, М.—Л., 1947.

11. Н. Е. Товмасян. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области. Сибирск. матем. журнал, т. II, № 2, стр. 290—312, 1961.