

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. M. Ponomarev, О расчете сверхзвукового течения в канале МГД-генератора,  
*TVT*, 1974, Volume 12, Issue 3, 619–625

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt9385>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 12:39:48



УДК 621.313.12:538.4

## О РАСЧЕТЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ МГД-ГЕНЕРАТОРА

*В. М. Пономарев*

Рассматривается влияние концевых эффектов и неоднородности электромагнитного поля на структуру потока в каналах МГД-генератора и его характеристики. Предполагается, что индуцированным магнитным полем и влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь. Проводится сравнение результатов численных расчетов в двумерном и гидравлическом приближениях.

1. Влияние пространственных эффектов, таких как: концевой эффект, изменение проводимости по сечению канала и других, на характеристики МГДГ достаточно полно исследованы при различных упрощающих предположениях. В основном эти предположения сводятся к тому, что распределение проводимости и скорости считается известным и не меняющимся под действием протекающего в канале тока. Достаточно полный обзор работ такого типа имеется в монографии [1]. Задача значительно усложняется при существенном взаимном влиянии электромагнитных и гидродинамических полей, и решение ее возможно лишь с использованием численных методов. Численное решение задачи о течении в канале МГДГ с одной парой электродов рассматривалось в [2], где отмечалась сильная неоднородность потока при больших значениях параметра МГД-взаимодействия и параметра Холла.

Неоднородные расчеты довольно сложны и требуют много машинного времени, поэтому инженерные методы расчета течений в каналах МГДГ основываются в настоящее время на использовании гидравлического приближения. Представляет интерес сравнение результатов гидравлического и неоднородного расчетов, что может служить одним из критериев выбора модели квазиодномерного потока.

В данной работе рассматривается влияние концевых эффектов и неоднородности электромагнитного поля на структуру потока в каналах МГДГ. Проводится сравнение результатов двумерных и квазиодномерных расчетов для каналов постоянного сечения с различной конструкцией электродов и различной нагрузкой.

2. Стационарное течение проводящей невязкой и нетеплопроводной жидкости в двумерном приближении описывается системой уравнений ( $Re_m \ll 1$ ) [1]

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -(\partial p / \partial x) + S j_y B, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{v}) = -(\partial p / \partial y) - S j_x B, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} (e + \mathbf{u}^2/2)) = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + S j E. \quad (4)$$

Распределение электрического поля и плотности тока определяется из уравнений

$$(\partial E_x / \partial y) - (\partial E_y / \partial x) = 0, \quad (5)$$

$$(\partial j_x / \partial x) + (\partial j_y / \partial y) = 0 \quad (6)$$

и закона Ома

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\beta} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (7)$$

Распределение магнитного поля  $\mathbf{B} = \{0, 0, B(x)\}$  предполагается заданным.

Все величины в (1)–(7) приведены к безразмерному виду. Значения плотности  $\rho$ , скорости  $u$  ( $u$  и  $v$  – составляющие вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно) и проводимости  $\sigma$  отнесены к соответствующим значениям  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $\sigma_0$  на входе в канал; давление  $p$  – к  $\rho_0 u_0^2$ , удельная внутренняя энергия  $e$  – к  $u_0^2$ , плотность тока  $\mathbf{j}$  – к  $\sigma_0 u_0 \mathbf{B}_0$ , где  $\mathbf{B}_0$  – характерное значение магнитного поля, электрическое поле  $\mathbf{E}$  – к  $u_0 \mathbf{B}_0$ , линейные размеры  $x$  и  $y$  – к  $H$  – высоте канала;  $\beta$  – параметр Холла;  $S = \sigma_0 B_0^2 H / \rho_0 u_0$  – параметр МГД-взаимодействия.

Система уравнений (1)–(7) замыкается уравнением состояния  $e = e(p, \rho)$  и заданием зависимостей  $\sigma = \sigma(p, \rho)$ ,  $\beta = \beta(p, \rho) \mathbf{B}$ .

Граничные условия для газодинамической части системы уравнений для сверхзвукового течения во всем канале ставятся следующим образом: на входе полагается  $u=1$ ,  $\rho=1$ ,  $v=0$  и задается число Маха  $M$ , на стенках выполняются условия непротекания  $v_n=0$ . При заданных таким образом граничных условиях возможны случаи, когда на выходе или внутри канала появляются дозвуковые зоны и тогда вопрос о граничных условиях нуждается в дополнительном исследовании. В некоторых случаях решения поставленной задачи вообще не существуют, что определяется в процессе решения задачи. Для уравнений (5)–(7) ставятся граничные условия  $j_n=0$  на входе, выходе канала и изоляторе и  $E_\tau=0$  – на электродной поверхности. При расчете идеально секционированного канала задавалась плотность тока на поверхности электрода.

Уравнения (5)–(7) преобразуются к уравнению для функции тока  $\psi$

$$\begin{aligned} j_x &= \partial\psi/\partial y, \quad j_y = -\partial\psi/\partial x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{\partial(uB)}{\partial x} + \frac{\partial(vB)}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

с граничными условиями  $\psi = \text{const}$  на изоляторе и  $\partial\psi/\partial y = \beta \cdot \partial\psi/\partial x$  – на электродной поверхности, для идеально секционированного канала  $\psi = \psi_0(x)$  – на электроде.

3. При расчете МГД-устройств на основе гидравлического приближения важны выбор гидродинамического канонического потока и соотношений, определяющих силовое и энергетическое воздействия на поток [1]. Наиболее простой формой канонического потока является поток с однородным распределением всех газодинамических параметров в плоскости поперечного сечения канала (однородный канонический поток). Учет трения и теплообмена может быть произведен обычными методами в рамках теории пограничного слоя, сохраняя однородный канонический поток для ядра потока. Известно, что в обычной газодинамике такой подход дает хорошие результаты. Сравнение расчетов в гидравлическом приближении с двумерными позволит определить влияние неоднородности распределения электрического поля.

Течение в канале постоянного сечения без учета трения и теплообмена описывается системой уравнений

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \quad (9)$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + f, \quad (10)$$

$$\rho u \frac{d}{dx} \left( e + \frac{u^2}{2} \right) = - \frac{d}{dx} (pu) + q, \quad (11)$$

где

$$f = S \int_0^1 j_y B dy, \quad q = S \int_0^1 j E dy. \quad (12)$$

Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $e$  имеют тот же смысл, что и выше, но предполагается, что они описывают определенным образом осредненные параметры потока. Величины  $f$  и  $q$  определяются полем токов в поперечном сечении канала и распределением электромагнитного поля, которые в свою очередь зависят от распределения газодинамических параметров.

Вычисление  $f$  и  $q$  представляет собой самостоятельную задачу. Одив из методов их определения заключается в использовании точных решений для распределения электрических полей и токов. Так, в [3] использовалось точное решение для распределения электрического поля, полученное в нулевом приближении по параметру МГД-взаимодействия. Второй, наиболее часто используемый подход, основан на использовании модельных распределений электродинамических параметров [4–6].

В данной работе при построении гидравлической модели для сравнения рассматриваются оба метода. В первом случае распределение тока в канале находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial (uB)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

в котором распределение  $\sigma$ ,  $\beta$  и  $u$  определяется из уравнений (9)–(11). При этом учитываются концевые эффекты и изменение газодинамических параметров вдоль канала. Во втором случае использовались уравнения, следующие из закона Ома, с учетом однородности канонического потока

$$j_y = \frac{\sigma}{1+\beta^2} [E_y + \beta E_x - uB], \quad (14)$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} [E_x - \beta E_y + \beta uB]. \quad (15)$$

Система (14)–(15) замыкается следующим образом: для сплошного электрода принимается, что напряженность электрического поля  $E_y$  совпадает со средней напряженностью электрического поля  $\langle E_y \rangle = \int_0^1 E_y dy$  и  $E_x = 0$ ; для идеально секционированного канала полагается  $j_x = 0$ ,  $j_y = j_y(x)$ , что соответствует постановке задачи, принятой в двумерном приближении. С учетом этого для  $f$  и  $q$  получаются конечные соотношения

$$f = S j_y B, \quad q = S j_y E_y. \quad (16)$$

4. Интегрирование системы (1)–(4) проводилось по нестационарной схеме [7] с решением уравнения (8) методом продольно-поперечных прогонок [8].

Оценка точности численного метода расчета распределения тока производилась на основе сравнения с аналитическими решениями [1] и дру-

гими численными решениями [1, 2]. Отличие в локальных и интегральных характеристиках не превышало 1–2% (в зависимости от выбранной сетки). Например, величина внутреннего сопротивления канала с одной парой электродов длиной 3 при  $u=1$ ,  $\sigma=1$ ,  $\beta=1$ ,  $B=1$ , полученная численно, равна  $\sim 0,50$  (см. рис. 1, кривая 4). Аналитическое решение [9] дает для нее значение 0,507.

При проведении расчетов предполагалась, что для газа справедливо уравнение состояния  $e=p/(\gamma-1)\rho$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты и  $p=\rho T$ . Припималась следующая зависимость  $\sigma$  и  $\beta$  от параметров газа  $\sigma = \sqrt{\gamma T^{\mu}} \exp(-J/T)/\rho^{1/2}$ ,  $\beta = \mu T^{\mu} B/p$  (или  $\beta = \text{const}$ ),  $\nu$ ,  $\mu$  и  $J$  — постоянные.

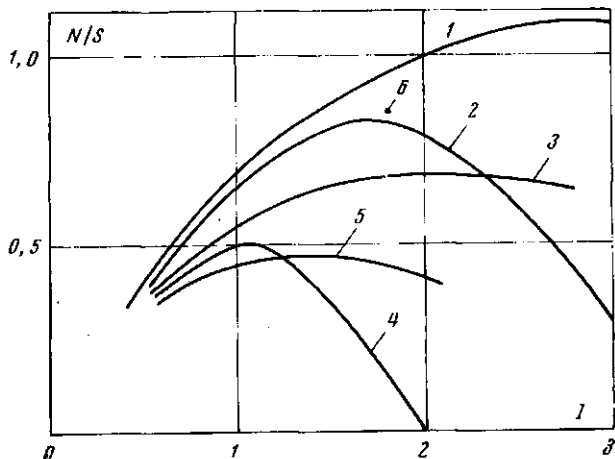


Рис. 1. Зависимость интегральной мощности МГДГ от величины полного тока.

Идеально секционированный генератор: 1 — двумерное приближение, 2 — нулевое приближение по параметру МГД-взаимодействия. Генератор с одной парой электродов: 3 — двумерное приближение, 4 — нулевое приближение по параметру МГД-взаимодействия, 5 — гидравлическое приближение без учета концевых эффектов. Генератор с шестью парами электродов: 6 — двумерное приближение

На рис. 1 приведена величина мощности, снимаемой с каналов постоянного сечения с длиной электродной зоны равной трем, полученная в двумерном приближении. Число Маха на входе в канал  $M=2,5$ ,  $\gamma=1,44$ ,  $S^* = 0,1$ ,  $\beta=1$ ,  $J/T_0=10$ , где  $T_0$  — температура газа на входе в канал. Расчеты проводились для идеально секционированного канала (кривая 1), канала со сплошным электродом (кривая 3), канала с шестью парами электродов, с длиной электродов равной 0,4 и межэлектродным расстоянием 0,1 (точка б). Для идеально секционированного канала предполагается, что нагрузка подобрана так, чтобы выполнялось условие  $j_n = \text{const}$  на электроде. В канале с конечным числом электродов через каждую электродную пару протекает одинаковый ток. Для иллюстрации на рис. 1 приведены характеристики, полученные в нулевом приближении по параметру МГД-взаимодействия. (Кривая 2 соответствует идеально секционированному каналу, 4 — каналу со сплошным электродом). Хорошее соответствие между ними существует лишь в области слабого взаимодействия потока и протекающих в канале токов. При большой плотности тока становится существенным изменение проводимости вдоль канала, которое не учитывается в линейной постановке. Торможение потока и связанное с ним повышение температуры приводит к сильному росту проводимости, в результате чего увеличивается величина мощности. Во всех случаях максимальная мощность снимается при числах Маха на выходе, близких к единице. При полном токе  $I=3,2$  для идеально секционированного канала и  $I=2,8$  для канала со сплошным электродом на выходе появляются дозвуковые зоны.

Полученное решение показывает, что наиболее сильное нарушение однородности в поперечном сечении канала наблюдается для давления и плотности. Линии равного давления для идеально секционированного канала показаны на рис. 2, для канала со сплошным электродом — на рис. 3 и для канала с шестью электродными парами — на рис. 4. Начало координат совпадает с началом электрода. Исходные данные для расчетов соответствуют приведенным выше, величина тока, протекающего через электрод,  $I=1,8$ . Рис. 2 показывает, что в идеально секционированном фарадеевском канале значительные нарушения неоднородности потока имеют место лишь в концевых зонах, вне этих зон поток оказывается близким

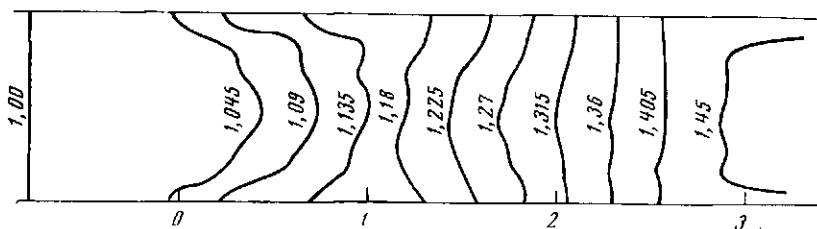


Рис. 2. Распределение давления в канале идеально секционированного генератора

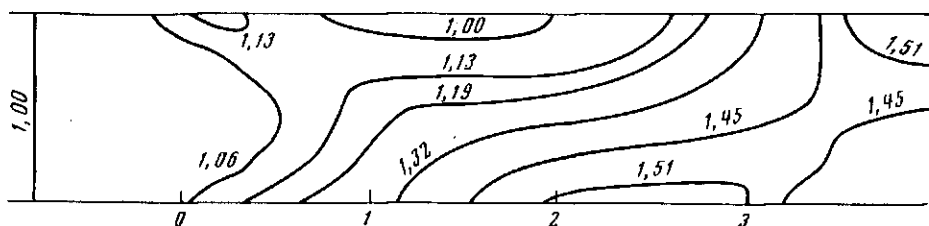


Рис. 3. Распределение давления в канале генератора с одной парой электродов

к однородному по всем параметрам. Для канала со сплошным электродом нарушение однородности потока при величинах параметра Холла  $\beta$  порядка единицы становится значительным во всем канале. Относительная величина неоднородности плотности примерно такая же, как и давления.

Взаимодействие поперечного градиента давления и проекции силы на ось  $y$  приводит к тому, что поток периодически отклоняется от одного электрода к другому [2]. Можно ожидать, что в области постоянного магнитного поля деформация профиля скорости будет не очень сильной, так как в ней сила  $j \times B$  потенциальна. Это подтверждается расчетами. На рис. 5 показано распределение скорости в поперечном сечении канала, отнесенное к ее значению на оси, для некоторых сечений канала со сплошным электродом ( $S=0,2, I=0,9$ ). Аналогичные кривые для энтальпии приведены на рис. 6. Секционирование канала приводит к сглаживанию всех неоднородностей.

Для определения интегральных характеристик МГДГ наиболее важное значение имеют распределение скорости и энтальпии. Рис. 5 и 6 показывают, что их неоднородность в поперечном сечении канала не очень сильная. Во всех проведенных вариантах расчетов величина отклонения скорости и энтальпии по отношению к их средним по сечению значениям не превышает 5 и 2% соответственно, что является основанием для использования однородного канонического потока при построении гидравлического приближения.

Расчеты, проведенные в гидравлическом приближении, показали хорошее соответствие интегральных характеристик и средних величин (до 1%)

для идеально секционированного канала при определении распределения токов с помощью уравнения (13). Использование модельных распределений токов незначительно ухудшает это соответствие. Наиболее сильное отличие наблюдается для генератора с одной парой электродов. Влияние неоднородности газодинамического потока на распределение электродинамических величин осуществляется через коэффициенты уравнения (8) и его граничные условия. Чтобы разделить эти эффекты, проводились расчеты с  $\beta = \text{const}$ . Во всех вариантах расчета различие в интегральных характеристиках и распределении средних по сечению величин вдоль канала не

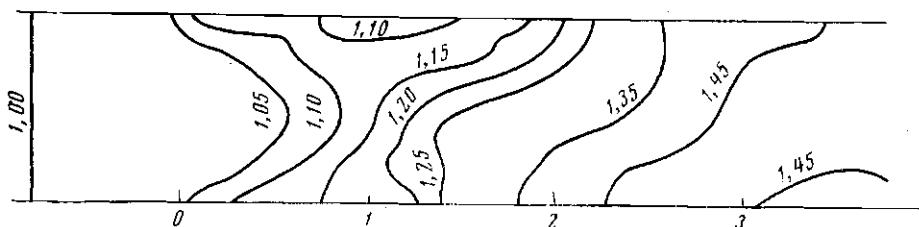


Рис. 4. Распределение давления в канале генератора с шестью парами электродов

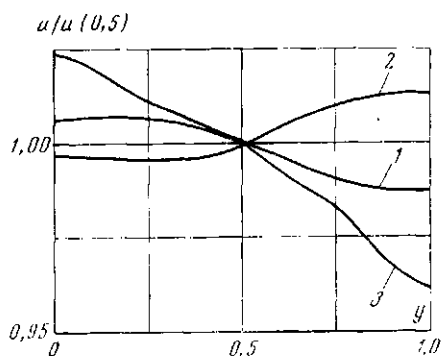


Рис. 5. Распределение скорости в поперечном сечении канала:  
1 —  $x=0,2$ ; 2 —  $1,6$ ; 3 —  $3,2$

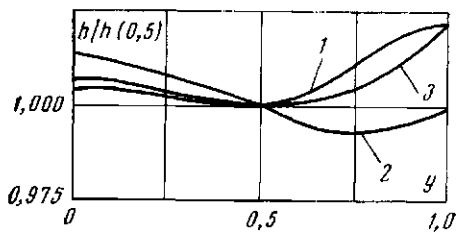


Рис. 6. Распределение энтальпии в поперечном сечении канала:  
1 —  $x=0,6$ ; 2 —  $2,4$ ; 3 —  $3,2$

превышает 1%. Такое же хорошее совпадение наблюдается и при увеличении параметра МГД-взаимодействия до 0,3 при полном токе, при котором существует сверхзвуковой поток.

При расчетах с постоянной величиной параметра Холла распределение газодинамических параметров вдоль электродов не влияет на граничные условия уравнения (13). Если  $\beta$  зависит от параметров газа, то при нарушении однородности потока граничные условия для сплошного электрода различны для анода и катода. Для оценки этого влияния проводились расчеты для режимов течения с  $S=0,1-0,3$ , в которых величина параметра Холла определялась по формуле  $\beta=0,375 T^{1/2}/p$ , что соответствует  $\beta=1$  на входе (величины  $T$  и  $p$  безразмерные). При этом наблюдалось большее различие в результатах расчетов. Так, например, величина мощности, рассчитанная в квазиодномерном приближении, оказывается завышенной на 2% при  $S=0,1$  и до 6% при  $S=0,3$ .

Проведенные расчеты показывают, что наиболее сильные возмущения в поперечном сечении канала в двумерном потоке испытывают величины  $p$  и  $\rho$ . Относительная величина отклонения скорости и энтальпии от их среднего значения по сечению малы. Гидравлическое приближение для течения псевдогаза и неэлектропроводного газа, построенное на основе однородного по скорости и энтальпии канонического потока, дает описание средних по сечению и интегральных характеристик МГДГ с достаточной для

инженерных расчетов точно, при определении распределения электродинамических величин на основе этого канонического потока (значительное различие между кривой 5, описывающей зависимость мощности от полного тока, полученной с использованием модельных представлений, и кривой 3 на рис. 1 объясняется неучетом концевых эффектов в (16)). Очевидно, это несправедливо, если поток сильно неоднородный на входе в канал.

Для сверхзвуковых течений при наличии значительного продольного тока учет неоднородности распределения давления может быть необходим как для определения электрических граничных условий, так и при расчете характеристик пограничного слоя.

В заключение автор выражает благодарность Г. А. Любимову, С. А. Медину и В. А. Битюрину за ценные советы и помощь в работе.

Институт высоких температур  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
10 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Резирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. «Наука», 1970.
2. А. В. Губарев, Л. М. Деггарев, А. А. Самарский, А. П. Фагорский. Численный расчет некоторых двумерных магнитогидродинамических течений в каналах. Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова, 1971.
3. Л. Ф. Лобанова. ПМТФ, № 6, 31, 1964.
4. R. G. Reseck, R. H. Eustis, C. H. Kruger. Electricity from MHD. 3, IAEA, Vienna, 1966.
5. В. А. Битюрин, Г. А. Любимов. Теплофизика высоких температур, 7, № 5, 1969.
6. O. K. Sonju, J. Teno, T. R. Brogan. Proceed. 11th Symp. on Eng. Aspects of MHD. Pasadena, 1970.
7. O. M. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. Ж. выч. матем. и матем. физ., 11, № 1, 182, 1971.
8. Н. Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. «Наука». Новосибирск, 1967.
9. А. Б. Ватажин. ПМТФ, № 2, 39, 1963.