Дж. Э. Аллахвердиев, О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра, *Докл. АН СССР*, 1964, том 159, номер 5, 951–954

Доклады Академии наук СССР
1964. Том 159, № 5

МАТЕМАТИКА

Дж. Э. АЛЛАХВЕРДИЕВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 VI 1964)

Пусть H — вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а A_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — вполне непрерывные операторы.

Рассмотрим оператор $L = L_1 + L_2 + A$, где $L_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i A_i H^i + \lambda^n H^n$, а A и L_2— вполне непрерывные операторы, причем L_2 зависит от комплексного параметра λ.

В настоящей статье устанавливаются некоторые достаточные условия кратной полноты системы собственных и присоединенных (с.п.) элементов оператора L.

Определение. Будем говорить, что функция $\Phi(\lambda)$ имеет **конечный порядок роста в точке** λ_0, если существуют числа $R > 0$ и ρ и такие функции $D(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$, что $\Phi(\lambda) = D(\lambda)/\Delta(\lambda)$ и при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant R$ удовлетворяются неравенства:

$$|D(\lambda)| \leqslant e^{|\lambda-\lambda_0|^{-\rho}}, \quad |\Delta(\lambda)| \leqslant e^{|\lambda-\lambda_0|^{-\rho}}.$$

Число $\rho = \inf \rho'$ (инфимум берется по всем ρ', удовлетворяющим последним неравенствам) будем называть **порядком роста функции** $\Phi(\lambda)$ **в точке** λ_0. Если можно подобрать $a(\lambda)$ так, чтобы

$$|D(\lambda)| \leqslant e^{a(\lambda)|\lambda-\lambda_0|^{-\rho}}, \quad |\Delta(\lambda)| \leqslant e^{a(\lambda)|\lambda-\lambda_0|^{-\rho}}$$

и $\lim\limits_{|\lambda|\to|\lambda_0|} |a(\lambda)| = 0$ при $\lambda \to \lambda_0$, то функцию $\Phi(\lambda)$ будем называть **функцией минимального типа**. Соответствующим образом можно ввести понятия функций максимального и нормального типов.

Если $\Phi(\lambda)$ — операторная функция, то $D(\lambda)$ также предполагается операторной функцией и в соответствующем неравенстве для $D(\lambda)$ модуль заменяется нормой.

Справедлива следующая теорема (теорема типа Фрагмена — Линделефа для окрестности точки).

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(\lambda)$ — *аналитическая функция, имеющая в точке* λ_0 *изолированную особенность и удовлетворяющая следующим условиям*: 1) *в окрестности точки* λ_0 *функция* $\Phi(\lambda)$ *имеет конечный порядок* ρ; 2) *существует система лучей, выходящих из точки* λ_0, *такая, что угол* α *между соседними лучами системы меньше* π/ρ $(\alpha < \pi/\rho)$ *и на всех лучах этой системы функция* $\Phi(\lambda)$ *ограничена по модулю.*

Тогда функция $\Phi(\lambda)$ *ограничена по модулю в некоторой окрестности точки* λ_0.

Если $\Phi(\lambda)$ имеет минимальный тип, то теорема остается в силе и тогда, когда угол между соседними лучами равняется π/ρ $(\alpha = \pi/\rho)$.

Лемма 1. *Если $M(\lambda)$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию $\| M(\lambda) \| \leqslant M$ при всех $|\lambda| \geqslant R \geqslant 0$, а оператор A имеет конечный порядок ρ, то резольвента оператора $\lambda M(\lambda) A$ есть операторная функция минимального типа и порядок ее роста в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит ρ.*

Наметим вкратце идею доказательства.

Рассмотрим оператор $\lambda M(\mu) A$. По теореме М. В. Келдыша (см. [2,3])

$$R(\lambda, \mu) = [E - \lambda M(\mu) A]^{-1} = \frac{D_\mu(A)}{\Delta_\mu(A)},$$

где $D_\mu(A)$ и $\Delta_\mu(A)$ — функции от λ, порядки роста которых не превосходят числа ρ. Несложными вычислениями доказывается, что оценки М. В. Келдыша для $D_\mu(\lambda)$ и $\Delta_\mu(\lambda)$ равномерны относительно μ при $|\mu| \geqslant R$.

Поэтому, полагая $\mu = \lambda$ при $|\lambda| \geqslant R$, получаем, что порядок роста резольвенты оператора $\lambda M(\lambda) A$ в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит ρ. Аналогичные рассуждения приводят к утверждению леммы относительно типа резольвенты $(E - \lambda M(\lambda) A)^{-1}$.

Лемма 2. *Если $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \| L_2(\lambda) \| = 0$ и H — оператор конечного порядка ρ, то порядок роста резольвенты оператора $L = L_1 + L_2 + A$ в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит ρ.*

Доказательство. Имеем неравенство

$$\| (E - L_1 - A - L_2)^{-1} \| \leqslant \| (E - A)^{-1} \| \cdot \| (E - (E - A)^{-1} L_2)^{-1} \| \times$$
$$\times \| (E - (E - (E - A)^{-1} L_2)(E - A)^{-1} L_1)^{-1} \|.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что оператор $(E - A)^{-1}$ существует и ограничен. Тогда оператор $(E - (E - A)^{-1} L_2)^{-1}$ будет ограниченным для достаточно больших $|\lambda|$, и поэтому достаточно исследовать оператор $(E - (E - (E - A)^{-1} L_2)^{-1} (E - A)^{-1} L_1)^{-1}$. С этой целью рассмотрим уравнение $y = M(\lambda) L_1(y) + f$, где $M(\lambda) = (E - (E - A)^{-1} L_2)^{-1} (E - A)^{-1}$.

Перепишем это уравнение в виде системы

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \lambda M(\lambda) H y_1 + M(\lambda) \sum_{k=n-1}^{2} A_k H y_{n-k+1} + \lambda M(\lambda) A_1 H y_0 + f_0,\\
y_1 &= \lambda H y_2 + f_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= \lambda H y_0 + f_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Следуя М. В. Келдышу, введем пространство $\mathfrak{H}^n$ следующим образом: элементами $\mathfrak{H}^n$ будут $\tilde{x} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, где x_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ — всевозможные упорядоченные системы из n элементов, принадлежащих $\mathcal{H}$. Скалярное произведение $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ элементов $\tilde{x} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, $\tilde{y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ в $\mathfrak{H}^n$ определяется следующим образом: $[\tilde{x}, \tilde{y}] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (x_i, y_i)$, где (x_i, y_i) $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$.

Систему (1) в пространстве $\mathfrak{H}^n$ можно переписать в виде

$$\tilde{y} = \lambda \tilde{K} \tilde{H} \tilde{y} + \tilde{f},$$

где $\tilde{K}$ и $\tilde{H}$ имеют вид:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} M(\lambda) A_1 & M(\lambda) & M(\lambda) A_{n-1} & \ldots & M(\lambda) A_2 \\ & & & & E \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & E & & & \\ E & & & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & H \end{pmatrix}.$$

Нетрудно доказать, что $\widetilde{K}(\lambda)$ ограничен при всех $|\lambda| > c$, где c — некоторое число. $\widetilde{H}$ — оператор порядка ρ, поэтому, по лемме 1, в окрестности бесконечно удаленной точки резольвента $(\widetilde{E} - \lambda\widetilde{K}(\lambda)\widetilde{H})^{-1}$ имеет порядок роста не выше ρ и минимальный тип. Но так как

$$\left\|(E - \sum \lambda^i M(\lambda) A_i H^i - \lambda^n M(\lambda) H^n)^{-1}\right\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|(\widetilde{E} - \lambda\widetilde{K}(\lambda)\widetilde{H})^{-1}\|_{\mathfrak{H}^n},$$

то нетрудно показать справедливость утверждения леммы.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 в окрестности бесконечно удаленной точки резольвенту оператора $L(\lambda)$ можно представить в виде*

$$(E - L(\lambda))^{-1} = (E + B(\lambda))(E - \lambda^n H^n)^{-1},$$

причем $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \|B(\lambda)\| = 0$ *равномерно относительно аргумента* λ *внутри углов*

$$\frac{\pi k}{n} + \varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{\pi(k+1)}{n} - \varepsilon \tag{2}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y = (L_1(\lambda) + A + L_2(\lambda))\, y + f.$$

Имеем

$$(E - \lambda^n H^n)\, y = (L_1(\lambda) + A + L_2(\lambda) - \lambda^n H^n)\, y + f.$$

Отсюда получим

$$y = (E - \lambda^n H^n)^{-1}(L_1(\lambda) + A - \lambda^n H^n)\, y + (E - \lambda^n H^n)^{-1} L_2(\lambda)\, y + \\ + (E - \lambda^n H^n)\, f.$$

Так как $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \|L_2(\lambda)\| = 0$ и оператор $(E - \lambda^n H^n)^{-1}$ ограничен на углах (2) равномерно относительно аргумента λ, то $\|(E - \lambda^n H^n)^{-1} L_2\| \to 0$ на углах (2) при $|\lambda| \to \infty$ равномерно относительно аргумента λ. Известно ([2]), что при $|\lambda| \to \infty$ $[\|(E - \lambda^n H^n)^{-1}(L_1(\lambda) + A - \lambda^n H^n)\| \to 0$ на углах (2). Следовательно, при $|\lambda| \to \infty$ $\|(E - \lambda^n H^n)^{-1}(L(\lambda) - \lambda^n H^n)\| \to 0$ внутри углов (2). Поэтому, если полагать $c(\lambda) = (E - \lambda^n H^n)^{-1}(L(\lambda) - \lambda^n H^n)$, то для достаточно больших $|\lambda|$ оператор $(E - c(\lambda))^{-1}$ существует и определяется равенством

$$(E - c(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c^k(\lambda) = E + B(\lambda),$$

причем $\|B(\lambda)\| \leqslant \frac{\|c(\lambda)\|}{1 - \|c(\lambda)\|}$ на лучах из (2). Этим лемма доказана.

Замечание 1. Изучение поведения резольвенты оператора в окрестности конечной точки плоскости с помощью дробно-линейного преобразования можно свести к изучению ее в окрестности бесконечно удаленной точки. Поэтому аналоги лемм 1, 2, 3, где бесконечно удаленная точка заменяется конечной точкой плоскости, справедливы при соответствующих условиях.

Теорема 2. *Пусть H и T — полные самосопряженные операторы конечных порядков ρ и r соответственно; A, A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, B_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ — вполне непрерывные операторы. $(E-A)^{-1}$ ограничен. Тогда система с. п. элементов оператора*

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i A_i H^i + \lambda^n H^n + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^i} B_i T^i + \frac{1}{\lambda^m} T^m + A$$

$(n+m)$-кратно полна в пространстве $\mathscr{H}$.

Доказательство. Используя лемму 2 и замечание 1, находим, что резольвента оператора L имеет конечные порядки, не превышающие ρ и r в бесконечно удаленной точке и в нуле соответственно. Далее, применяя лемму 3, получим, что при $|\lambda| \to \infty$ резольвента оператора $L(\lambda)$ остается ограниченной на лучах из (2), а при $|\lambda| \to 0$ на лучах, лежащих внутри углов

$$\frac{\pi k}{m} + \varepsilon \leqslant \arg \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{\pi(k+1)}{m} - \varepsilon \tag{2'}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Теперь предположим, что теорема неверна. Тогда существуют $n+m$ элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ таких, что

$$y(\lambda) = (E - L^*(\lambda))^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i f_{i+1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-i}\varphi_i\right) \tag{3}$$

не имеет в конечной части плоскости особенностей, кроме, может быть, в нуле. При $|\lambda| \to \infty$ на лучах из (2) $y(\lambda)$ растет не быстрее, чем $|\lambda|^{n-1}$, а при $|\lambda| \to 0$ на лучах из (2') $y(\lambda)$ растет не быстрее, чем $|\lambda|^{1-m}$.

Используя теорему 1, нетрудно доказать, что точка нуль может быть полюсом функции $y(\lambda)$ порядка не выше $m-1$, а бесконечно удаленная точка полюсом порядка не выше $n-1$. Следовательно, ряд Лорана для $y(\lambda)$ имеет вид

$$y(\lambda) = \sum_{i=-m}^{n-1} \lambda^i y_i. \tag{4}$$

Из (3) имеем

$$y(\lambda) = L(\lambda)\, y(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-i}\varphi_i + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i f_{i+1}. \tag{5}$$

Подставив в (5) выражение для $y(\lambda)$ из (4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, нетрудно показать, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda^{-i}\varphi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i f_{i+1} \equiv 0$, поэтому $\varphi_i = 0$, $f_j = 0$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$. Этим теорема доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что она остается справедливой и в случае, когда оператор L_2 имеет вид $L_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda - \lambda_0)^{-i} A_i T^i + (\lambda - \lambda_0)^{-m} T^m$, где λ_0 — любое комплексное число, а условия на операторы A_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и T такие же, как и в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть оператор*

$$L_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{B_{i,k_i}}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}},$$

где B_{i,k_i} $(i = 1, \ldots, m;\ k_i = 1, \ldots, n_i)$ — конечномерные операторы, а операторы H, A, A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда система с. п. элементов оператора $L = L_1(\lambda) + L_2(\lambda) + A$ n-кратно полна в пространстве $\mathcal{H}$.

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству теоремы 2.

Приношу благодарность акад. М. В. Келдышу и проф. М. А. Наймарку за внимание к этой работе и ценные замечания при обсуждении результатов статьи.

Поступило
15 VI 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] Дж. Э. Аллахвердиев, ДАН, 115, № 2 (1957). [3] В. Б. Лидский, Тр. Моск. матем. общ., 11, 3 (1962).