Н. М. Бабаян, Об асимптотическом поведении ошибки прогноза,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1983, том 130, 11–24

Н.М.Бабаян

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОШИБКИ ПРОГНОЗА

I. Введение

В данной работе рассматривается задача линейного прогнозирования стационарного в широком смысле случайного процесса с дискретным временем в сингулярном случае. Исследуется асимптотическое поведение ошибки наилучшего линейного прогноза, когда длина интервала, по которому ведется прогнозирование, стремится к бесконечности. Установлена связь между экспоненциальной скоростью убывания к нулю ошибки прогноза и емкостью(трансфинитным диаметром) множества всех тех точек, в которых спектральная плотность процесса строго положительна.

Итак, пусть $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с дискретным временем, т.е. $\{X_n\}$ – последовательность случайных величин с одним и тем же средним m (мы будем полагать что $m=0$) и корреляционной функцией

$$K(n,m)=EX_n\overline{X}_m=K(n-m),$$

зависящей лишь от разности $n-m$ (предполагается, конечно, что $E|X_n|^2<\infty$).

Обозначим через H линейную оболочку величин X_K, $-\infty<K<\infty$, замкнутую относительно сходимости в среднем квадратичном. Введением для величин X и Y из H скалярного произведения $(X,Y)=EX\overline{Y}$ H превращается в гильбертово пространство. Мы предполагаем, что процесс X_n имеет спектральную плотность (с.п.) $f(\lambda)$.

Обозначим через σ_n ошибку наилучшего линейного прогноза величины X_0 по прошлому длины n , т.е. по величинам $X_{-1},X_{-2},\ldots$ $\ldots,X_{-n}$: $\sigma_n^2=\min\limits_{X\in H_{-n}^{-1}}\|X_0-X\|^2=\min\limits_{C_K}\|X_0-\sum C_K X_{-K}\|^2$,
где H_{-n}^{-1} – линейная оболочка величин $X_K, -n\leqslant K\leqslant -1$. Ошибку прогноза по всему прошлому обозначим через σ_∞ :

$$\sigma_\infty^2=\min_{X\in H_{-\infty}^{-1}}\|X_0-X\|^2,$$

где $H_{-\infty}^{-1}$ – замкнутая линейная оболочка величин $X_K,\ K<0$.

Известно (см., например, [8] , стр.62), что

$$\sigma_\infty^2=2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\ln f(\lambda)\,d\lambda\right\}$$

(здесь и далее, где не указаны пределы, интегрирование производится от $-\pi$ до π), и в зависимости от того, сходится интеграл под знаком экспоненты или он равен $-\infty$, ошибка прогноза σ_∞ по всему прошлому будет равна нулю (сингулярный процесс) или больше нуля (регулярный процесс).

Положим $\delta_n = \sigma_n^2 - \sigma_\infty^2$. Очевидно $\delta_n \geqslant 0$ и $\delta_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Нас интересует скорость стремления к нулю величины δ_n. Асимптотическое при n стремящемся к бесконечности поведение δ_n в случае регулярного процесса достаточно хорошо изучено [5] - [8], [12]. В частности, теорема I И.А.Ибрагимова [5] дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$\delta_n = O(n^{-\gamma}),\ \gamma > 1,\ n \longrightarrow \infty.$$

Гренандер и Розенблатт нашли необходимое и достаточное условие, которое, будучи наложено на с.п. $f(\lambda)$, гарантирует, что

$\delta_n = O(e^{-cn}), c > 0,\ n \longrightarrow \infty$ ([7], [8], стр.238).

Все эти результаты относятся к регулярному случаю. Что же касается сингулярного случая, то нам известна лишь одна работа [I] Розенблатта, содержащая следующий результат: если с.п. $f(\lambda)$ непрерывна и строго положительна на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha\right]$ и равна нулю вне него, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(f)} = \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(I)}$$

Таким образом, если с.п. обращается в нуль на целом отрезочке, то ошибка прогноза σ_n убывает к нулю с экспоненциальной скоростью.

Настоящая работа также посвящена изучению асимптотики ошибки прогноза сингулярного процесса.

2. Формулировка основных результатов.

Прежде чем сформулировать наши результаты, напомним коротко определение емкости или трансфинитного диаметра.

Пусть F - ограниченное замкнутое множество на плоскости комплексного переменного z, $T_n(z,F) = z^n + a_1^{(n)} z^{n+1} + \cdots$ - многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля на множестве F в равномерной метрике и $m_n(F) = \max\limits_{z\in F} |T_n(z,F)|$. Тогда, как известно (см., например, [9]), существует предел последовательности чисел $[m_n(F)]^{1/n}$, который называется емкостью или трансфинитным диаметров множества F, $\tau(F) = \lim\limits_{n\to\infty} [m_n(F)]^{1/n}$.

Для произвольного (не обязательно замкнутого) ограниченного множества E вводятся [3] внутренняя емкость $\tau_*(E)$:

$$\tau_*(E) = \sup_{F\subset E} \tau(F),$$

где точная верхняя грань берется по всем замкнутым подмножествам F множества E , и внешняя емкость $\tau^*(E)$:

$$\tau^*(E) = \tau(\bar{E}),$$

где $\bar{E}$ – означает замыкание E .

Очевидно $\tau_*(E) \leqslant \tau^*(E)$ и если в этом неравенстве имеет место равенство, то соответствующее множество E будем называть τ -измеримым.

Обозначим через E спектр с.п. $f(\lambda)$, т.е. множество точек, в которых с.п. $f(\lambda)$ строго положительна, причем в дальнейшем нам удобнее будет считать, что с.п. задана на единичной окружности (отрезке $[-\pi,\pi]$ с отождествленными концами) C и, следовательно, $E\subset C$.

ТЕОРЕМА I. Имеют место следующие утверждения:

а)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \leqslant \tau^*(E),$$

т.е. для того, чтобы ошибка прогноза σ_n сингулярной стационарной последовательности убывала по крайней мере экспоненциально, когда n стремится к бесконечности, достаточно, чтобы внешняя емкость спектра с.п. $f(\lambda)$ была меньше единицы.

б) Если E – является объединением конечного числа дуг единичной окружности, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} = \tau(E) \qquad (2)$$

в) Соотношение (2) остается в силе, если E состоит из объединения счетного числа дуг и τ -измеримо.

Для формулировки теоремы 2 напомним определение точки Лебега.

Пусть $F\subset C$. Точка $x\in F$ называется точкой Лебега множества F , если

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{m(\mathcal{D}_\delta(x)\cap F)}{2\delta} \longrightarrow 1,$$

где $\mathcal{D}_\delta(x)$ – круг радиуса δ с центром в точке x , а $m(e), e\subset C$ – линейная мера множества e .

Пусть E имеет тот же смысл, что и в теореме I, а N – множество точек Лебега множества E .

ТЕОРЕМА 2. Если на окружности C существует такое замкнутое множество F, состоящее из объединения счетного числа дуг, что $E \subset F$ и $\tau(N)=\tau(E)=\tau(F)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} = \tau(E).$$

3. Вспомогательные результаты

Напомним теперь другое определение емкости, эквивалентность которого с предыдущим была установлена Сеге (см.,например, [9], стр.302). Пусть F - замкнутое ограниченное множество плоскости комплексного переменного и $\mathcal{D}$ - та из дополнительных к F областей, которая содержит точку $z=\infty$. Если граница $\Gamma=\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ состоит из конечного числа жордановых кривых, то существует функция Грина $G_{\mathcal{D}}(z,\infty)$ области $\mathcal{D}$, гармоничная всюду в области $\mathcal{D}$, кроме точки $z=\infty$, непрерывная, включая границу Γ, и на Γ равная нулю, а в окрестности же точки $z=\infty$ она имеет представление

$$G(z,\infty)=\ln|z|+\mathcal{U}(z),$$

где $\mathcal{U}(z)$ - гармоническая функция в окрестности точки $z=\infty$, значение которой в этой точке называют постоянной Робэна, $\gamma=\mathcal{U}(\infty)$. Число $\tau(F)=e^{-\gamma}$ называется ёмкостью множества F.

Если граница Γ не удовлетворяет ранее наложенным условиям, то функцию Грина области $\mathcal{D}$ определяют следующим образом: пусть $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_3 \subset \ldots$ - последовательность областей, ограниченных конечным числом жордановых кривых, содержащихся вместе с границами в области $\mathcal{D}$ и исчерпывающих ее. Последнее означает, что $\overline{\mathcal{D}}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$. Пусть $G_n(z,\infty)$ - функция Грина области $\mathcal{D}_n$. Последовательность гармонических функций $G_n(z,\infty)=\ln|z|+\mathcal{U}_n(z)$ монотонно возрастает в области $\mathcal{D}$ и, поэтому, сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве множества $\mathcal{D}$ к $+\infty$ или к гармонической функции $G(z)$. В этом последнем случае функцию

$$G(z)=\ln(|z|)+\mathcal{U}(z),$$

где $\mathcal{U}(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{U}_n(z)$ называют функцией Грина области $\mathcal{D}$, число $\gamma=\mathcal{U}(\infty)$ - постоянной Робэна этой области, а число $\tau(F)=e^{-\gamma}$ емкостью множества F.

Как отмечалось выше, это определение емкости ограниченного замкнутого множества плоскости комплексного переменного эквивалентно предыдущему определению, приведенному в пункте 2.

Таким образом, каждому ограниченному замкнутому множеству F с $\tau(F)>0$ соответствует функция $G_F(z)$ – функция Грина той из дополнительных к F областей $\mathcal{D}_F$, которая содержит бесконечно удаленную точку.

Произвольному (не обязательно замкнутому) ограниченному множеству E с $\tau_*(E)>0$ сопоставим, следуя П.П.Коровкину, функцию

$$G_E(z)=\inf_{F\subset E} G_F(z),\ z\in\mathcal{D}_{\bar{E}}$$

Отметим некоторые свойства емкости.

I. Если $F_1\subset F_2$, то $\tau(F_1)\leqslant\tau(F_2)$, т.е. емкость монотонно возрастает вместе с аргументом (это очевидно).

2. Емкость окружности равна ее радиусу (см. [9], стр.289).

3. Емкость дуги длиной 2α единичной окружности равна $\sin\frac{\alpha}{2}$ (см. [I]).

4. Емкость замкнутого отрезка равна четверти его длины (см. [9], стр.290).

5. Если $F_1\subset F_2$ и $\tau(F_1\cup F)>0$, то

$$\frac{\tau(F_1)}{\tau(F_1\cup F)}\leqslant\frac{\tau(F_2)}{\tau(F_2\cup F)} \qquad \text{(см. [3])}.$$

6. Если F^* – множество всех точек z, таких, что $P_n(z)\in F$, где $P_n(z)=z^n+\ldots+C_n$ – произвольный многочлен степени n, то

$$\tau(F^*)=[\tau(F)]^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(см. [9], стр.290)}.$$

7. Если F_ℓ – проекция множества F на прямую ℓ, то линейная мера множества F_ℓ не превосходит $4\tau(F)$ (см. [9], стр.294).

8. Если множество F_1 получается из множества F линейным преобразованием $z_1=az+b,\ z\in F$, то

$$\tau(F_1)=|a|\tau(F) \qquad \text{(см. [3])}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из свойства 7 емкости следует, что если емкость линейного множества равна нулю, то и мера его также равна нулю. Однако, существуют линейные множества нулевой меры, но положительной емкости (см. [3]).

ЛЕММА I. На единичной окружности существует τ-измеримое множество меры нуль, емкость которого равна емкости окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – подмножество единичной окружности с нулевой мерой и положительной емкостью (см. замечание I). Положим

$$F_n = \{z : z^n \in F\}$$

Тогда в силу свойства 6 емкости

$$\lim_{n\to\infty} \tau(F_n) = \lim_{n\to\infty} [\tau(F)]^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ будет искомым, так как

$$\tau_*(E) = \sup_{F\subset E} \tau(F) \geqslant \lim_{n\to\infty} \tau(F_n) = 1 ,$$

а с другой стороны E является подмножеством окружности, и, следовательно, $\tau^*(E) \leqslant 1$.

ЛЕММА 2 [3] . Если $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ – последовательность замкнутых множеств и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ – ограниченное множество, то

$$\tau_*(E) = \lim_{n\to\infty} \tau(F_n).$$

$n\to\infty$

ЛЕММА 3. Если $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ – последовательность τ -измеримых множеств и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ – ограниченное множество, то

$$\tau_*(E) = \lim_{n\to\infty} \tau(E_n) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$\tau(E_n) \leqslant \tau_*(E) ,$$

(т.к. $E_n \subset E$) и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \tau(E_n) \leqslant \tau_*(E) .$$

Чтобы доказать обратное неравенство для нижнего предела, зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $\tau(F) > \tau_*(E) - \varepsilon$. Положим $F_n = F \cap \overline{E}_n$. Тогда замкнутые множества F_n образуют возрастающую последовательность и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Поэтому согласно лемме 2

$$\lim_{n\to\infty} \tau(F_n) = \tau(F) .$$

Так как множества E_n τ -измеримы, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \tau(E_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \tau(\overline{E}_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \tau(F_n) = \tau(F) > \tau_*(E) - \varepsilon ,$$

откуда, ввиду произвольности ε , вытекает утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точку x будем называть, следуя П.П.Коровкину [3], точкой накопления множества E, если расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \tau_*(E_n),$$

где E_n - общая часть множества E и кольца $\frac{1}{2^n} \leqslant |z-x| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

ЛЕММА 4 [3]. Если каждая точка множества M является точкой накопления множества E, то $\tau_*(E) \geqslant \tau_*(M)$.

Если E состоит из нескольких открытых дуг окружности, то, используя свойство 3 емкости, легко показать, что каждая точка $\bar{E}$ является точкой накопления E и, стало быть $\tau_*(E) \geqslant \tau(\bar{E}) = \tau^*(E)$, т.е. множество E - τ -измеримо.

ЛЕММА 5 [3]. Если каждая точка множества E является его точкой Лебега и $E_n \subset E$, $m(E-E_n) \longrightarrow 0$, то

$$\tau_*(E_n) \longrightarrow \tau_*(E).$$

ЛЕММА 6 [3]. Пусть замкнутое ограниченное множество F состоит из счетного числа спрямляемых кривых. Тогда для любого множества $M \subset F$, для которого существует такая точка $z_M \in F$, что

$$G_M(z_M, \infty) \geqslant \lambda > 0,$$

справедливо неравенство

$$\tau(F) - \tau_*(M) \geqslant \delta = \delta(\lambda) > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть F удовлетворяет условиям леммы 6, $E \subset F$ состоит из точек Лебега, τ -измеримо и $\tau(E) = \tau(F)$. Тогда для любого множества $M \subset E$ для которого существует точка $z \in F$, такая, что

$$G_M(z, \infty) \geqslant \lambda > 0,$$

справедливо неравенство

$$m(E) - m(M) \geqslant \delta = \delta(\lambda) > 0.$$

Действительно, из леммы 6 следует, что

$$\tau(F) - \tau_*(M) = \tau(E) - \tau_*(M) \geqslant \varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0.$$

Но тогда согласно лемме 5

$$m(E \setminus M) \geqslant \delta = \delta(\varepsilon) = \delta(\lambda) > 0.$$

ЛЕММА 7 [10]. Пусть $\mathcal{D}$ - область, содержащая точку

$z=\infty$, а $P_n(z)$ - многочлен степени n . Тогда, если

$$|P_n(x)|\leqslant \mathcal{M},\ x\in\Gamma=\partial\mathcal{D},$$

то

$$|P_n(z)|\leqslant \mathcal{M}\, e^{nG_{\mathcal{D}}(z,\infty)}$$

4. Доказательство теорем I,2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Известно, (см., например, [II]), что соответствие

$$X_n \longleftrightarrow e^{in\lambda}$$

продолжается до изометрии пространств H и $L_f^2=L^2(f\,d\lambda,[-\pi,\pi])$. В силу этой изометрии ошибку прогноза σ_n можно представить в виде:

$$\sigma_n^2=\min_{C_k}\int\Big|1-\sum_{k=1}^{n}C_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 f(\lambda)\,d\lambda=\min_{q_n\in\pi_n}\int|q_n(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\,d\lambda, \qquad (3)$$

где π_n - класс многочленов степени n с единичными старшими коэффициентами.

Введем для удобства меру μ на C :

$$\mu(e)=\int_e f\,dm,\quad e\subset C .$$

Тогда

$$\sigma_n^2=\min_{q_n\in\pi_n}\int_E|q_n(z)|^2d\mu=\int_E|P_n(z,E)|^2\,d\mu, \qquad (4)$$

где $P_n(z,E)$ - сам минимизирующий многочлен, а E множество точек C в которых с.п. $f(\lambda)$ строго положительна.

Из соотношения (4) следует, что

$$\sigma_n^2(E)\leqslant\int_{\overline{E}}|T_n(z,\overline{E})|^2d\mu\leqslant \mathrm{const}\; m_n^2(\overline{E}),$$

откуда, извлекая корень и переходя к пределу при n стремящемся к бесконечности, получаем утверждение а) теоремы I.

Идея доказательства пункта б) принадлежит Я.Л.Геронимусу [2] и опирается на следующий результат Мазуркевича [4] .

ЛЕММА 8 [4] . Всякому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ (зависящее только от ε), что для всякого континуума Γ диаметра d и всякого замкнутого его подмножества F выполняется неравенство

$$M_n=\max_{z\in\Gamma}|q_n(z)|\leqslant(1+\varepsilon)^n\max_{z\in F}|q_n(z)|, \qquad (5)$$

если только $m(\Gamma\setminus F)<\delta d$, а $q_n(z)$ - многочлен степени n.

Из леммы 8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Γ состоит из объединения конечного числа континуумов. Тогда всякому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\delta=\delta(\Gamma,\varepsilon)>0$ (зависящее только от Γ и ε), что для всякого замкнутого множества $F\subset\Gamma$ и всякого многочлена $p_n(z)$ степени n выполняется неравенство (5), если только $m(\Gamma\setminus F)<\delta$.

Перейдем к доказательству пункта б) теоремы I.

В силу неравенства пункта а) достаточно показать, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sigma_n(E)}\geqslant\tau(E). \qquad (6)$$

Для этого рассмотрим те подмножества $e_n\subset E$, для которых выполняются неравенства

$$|p_n(z)|>\sqrt{\sigma_n m_n(E)},\ z\in e_n.$$

Так как

$$\mu(e_n)\leqslant\mu(E)<+\infty,$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu(e_n)}\leqslant 1.$$

Зададим $\lambda>0$ и обозначим через $\{\alpha_i\}$ те значения n, для которых выполняются неравенства

$$\mu(e_n)>(1-\lambda)^n. \qquad (7)$$

Для остальных значений n, которые мы обозначим $\{\beta_j\}$, имеем:

$$\mu(e_n)\leqslant(1-\lambda)^n. \qquad (8)$$

Далее,

$$\sigma_{\alpha_i}^2=\int_E|p_{\alpha_i}(z)|^2d\mu\geqslant\int_{e_{\alpha_i}}|p_{\alpha_i}(z)|^2d\mu\geqslant\sigma_{\alpha_i}m_{\alpha_i}(E)\mu(E_{\alpha_i}),$$

откуда, благодаря (7), получаем

$$\varliminf_{i\to\infty}\sqrt[\alpha_i]{\sigma_{\alpha_i}}\geqslant(1-\lambda)\tau(E). \qquad (9)$$

С другой стороны, при $z \in F_j = E \setminus e_{\beta_j}$ имеем

$$|P_{\beta_j}(z)| \leqslant \sqrt{б_{\beta_j} m_{\beta_j}(E)},$$

причем из неравенства (8) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \mu(e_{\beta_j}) = 0.$$

Отсюда, поскольку с.п. $f(\lambda)$ строго положительна на E и, следовательно, конечная мера m абсолютно непрерывна относительно меры μ , вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} m(e_{\beta_j}) = 0.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(E,\varepsilon)$ из следствия 2. Тогда для достаточно больших номеров j справедливы неравенства

$$m(E \setminus F_j) = m(e_{\beta_j}) < \delta(E,\varepsilon).$$

Поэтому, согласно следствию 2,

$$m_{\beta_j} \leqslant M_{\beta_j} \leqslant (1+\varepsilon)^{\beta_j} \sqrt{б_{\beta_j} m_{\beta_j}(E)} ;$$

$$m_{\beta_j} \leqslant (1+\varepsilon)^{2\beta_j} б_{\beta_j} ;$$

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[\beta_j]{б_{\beta_j}} \geqslant \frac{\lim \sqrt[\beta_j]{m_{\beta_j}}}{(1+\varepsilon)^2} \geqslant \frac{\tau(E)}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с соотношением (9) и учитывая произвольность ε и λ приходим к неравенству (6).

Перейдем к доказательству пункта в).

Пусть E состоит из объединения счетного числа дуг, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и положим $B_K = \bigcup_{n=1}^{K} E_n$. Множества B_K как отмечалось выше (см.лемму 4), $-\tau$ - измеримы, образуют возрастающую последовательность и $\bigcup_{K=1}^{\infty} B_K = E$. Следовательно, согласно лемме 3,

$$\tau_*(E) = \lim_{K\to\infty} \tau(B_K). \qquad (10)$$

Далее, в силу определения минимизирующих многочленов P_n , имеем:

$$б_n^2(E) = \int_E |P_n(z,E)|^2 d\mu \geqslant \int_{B_K} |P_n(z,E)|^2 d\mu \geqslant \int_{B_K} |P_n(z,B_K)|^2 d\mu = б_n^2(B_K),$$

откуда вытекает, что для любого натурального K

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(B_k)}.$$

Последний предел, согласно пункту б) теоремы I, равен $\tau(B_k)$, т.е.

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geq \tau(B_k). \tag{II}$$

Устремляя K в последнем неравенстве к бесконечности и учитывая (I0), получим

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geq \tau_*(E). \tag{I2}$$

Сопоставляя соотношение (I2) с неравенством пункта а) теоремы и учитывая τ -измеримость E получим равенство (2).

Доказательство теоремы I завершено.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для того, чтобы ошибка прогноза стремилась к нулю экспоненциально быстро, необходимо, чтобы с.п. $f(\lambda)$ обращалась в нуль на множестве положительной меры.

Действительно, если с.п. $f(\lambda)$ обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, то можно считать, что $E=C$, а тогда из пункта б) теоремы I вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} = \tau(C) = 1.$$

что противоречит экспоненциальной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Опять же в силу утверждения пункта а) теоремы I достаточно показать справедливость неравенства (6). Для этого, задав произвольное достаточно малое число $\varepsilon>0$, рассмотрим на этот раз те подмножества $e_n\subset F$, для которых выполняются неравенства

$$|p_n(z)|<(\tau-\varepsilon)^n,\ z\in e_n,\ \tau=\tau(E).$$

Пусть z_n – точка, в которой достигается максимум M_n:

$$M_n=\max_{z\in F}|p_n(z)|=|p_n(z_n)|.$$

Согласно лемме 7

$$M_n=|p_n(z_n)|\leq(\tau-\varepsilon)^n e^{n\,G_{e_n}(z_n,\infty)}.$$

Положим $E_n=E\cap e_n$. Тогда $E_n\subset e_n,\ G_{E_n}(z_n,\infty)\geq G_{e_n}(z_n,\infty)$

и, поэтому,

$$M_n \leqslant (\tau-\varepsilon)^n e^{n G_{E_n}(z_n,\infty)}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{E_n}(z_n,\infty) \geqslant \ln \frac{\sqrt[n]{M_n}}{\tau-\varepsilon} \geqslant \ln \frac{\sqrt[n]{m_n(F)}}{(\tau-\varepsilon)}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\tau-\varepsilon} = \ln \frac{\tau}{\tau-\varepsilon} = \lambda > 0,$$

то для всех достаточно больших номеров $n \geqslant N(\lambda)$ выполняются неравенства:

$$G_{E_n}(z_n,\infty) \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

Согласно следствию I для этих номеров справедливы соотношения

$$m(E \setminus E_n) \geqslant \delta = \delta(\lambda) > 0. \tag{I3}$$

На множестве $E \setminus E_n$ имеет место неравенство

$$|P_n(z)| > (\tau-\varepsilon)^n.$$

Следовательно

$$\sigma_n^2 \geqslant \int\limits_{E\setminus E_n} |P_n(z)|^2 d\mu > (\tau-\varepsilon)^{2n} \mu(E\setminus E_n).$$

Так как с.п. $f(\lambda)$ строго положительна на E, то в силу (I3) последовательность чисел $\mu(E\setminus E_n)$ не стремится к нулю и, значит,

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geqslant \tau-\varepsilon. \tag{I4}$$

Учитывая произвольность ε приходим к соотношению (6) и тем самым теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношение (I) Розенблатта является частным случаем пункта б) теоремы I (когда множество $E = E\{f>0\}$ состоит всего лишь из одной дуги длиной 2α), причем отметим, что в теореме I непрерывности с.п. $f(\lambda)$ не требуется.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношение (2) нельзя распространить на произвольные замкнутые множества $E = E\{f>0\}$. Действительно, покажем, что в противном случае соотношение (2) было бы справедливо и для всякого τ-измеримого E, а затем построим пример

τ -измеримого множества E , для которого (2) не выполняется.

Итак, пусть E - τ -измеримо и $F \subset E$ - замкнуто. Тогда легко показать, как это сделано при доказательстве пункта в) теоремы I, что

$$\sigma_n(E) \geq \sigma_n(F).$$

Отсюда, в силу предположения о справедливости соотношения (2) для множества F , имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(F)} = \tau(F)$$

и, значит,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} \geq \sup_{F\subset E} \tau(F) = \tau_*(E).$$

Последнее неравенство вместе с утверждением а) теоремы I и τ -измеримостью E показывает что из справедливости (2) для всех замкнутых множеств E вытекает его справедливость и для всех τ -измеримых множеств E . Теперь построим τ -измеримое множество для которого соотношение (2) не выполняется.

Пусть F - единичная полуокружность, F_2 - дополнительная к F полуокружность, а множество $F_1 \subset F_2$ таково, что

$$\mu(F_1) = 0, \ \tau(F_1) = \tau(F_2) \tag{I5}$$

(оно существует согласно лемме I). Положим $E = F_1 \cup F$ и пусть с.п. $f(\lambda)$ положительна на E и равна нулю на $C \setminus E$.

В силу первого из соотношений (I5) и теоремы I (пункт 6)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(F)} = \tau(F) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В то же время, согласно свойству 5 емкости и второму из соотношений (I5), имеем:

$$\tau(E) = \tau(F_1 \cup F) \geq \frac{\tau(F_1)}{\tau(F_2)} \tau(F_2 \cup F) = \tau(F_2 \cup F) = 1.$$

В заключение автор выражает благодарность И.А.Ибрагимову за постоянное внимание и помощь в работе.

Литература

1. R o s e n b l a t t M. Some purely deterministic processes. -J. of rational mech. and analysis, 1957, v.6, N 6.

2. Г е р о н и м у с Я.Л. О некоторых асимптотических свойст-

вах полиномов.-Матем.сб., 1948, т.23 (65), № I, с.77-88.
3. Коровкин П.П. Емкость множества и полиномы, минимизирующие интеграл. - Ученые зап.Калинингр.пединститута, 1958, вып.5.
4. Mazurkiewicz S. Un théorème sur les polynomes.- Ann. Soc. Pol. Math., 1945, t. 18, p. 113-117.
5. Ибрагимов И.А. Об асимптотическом поведении ошибки прогноза.-Теория вероятн. и ее примен., 1964, т.9, № 4, с. 695-703.
6. Baxter G., An asymptotic result for the finite predictor - Math.Scand., 1962, v.10, N 2, p. 137-144.
7. Grenander U., Rosenblatt M. An extention of a theorem of G.Szegö and its application to the study of stochastic processes.-Trans.Amer.Math.Soc.1954,v.76,N 1,p.112--126.
8. Гренандер Х.,Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения., М., 1961.
9. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
10. Коровкин П.П. О росте функций.- ДАН СССР, 1951, т. 58, № 6, с. 1081-1084.
11. Голинский Б.Л. Об асимптотическом поведении ошибки прогноза,-Теория вероятн. и ее примен., 1974, т.19, № 4, с. 724-739.