З. Пресдорф, Б. Зильберман, О сходимости методов редукции и коллокации для систем сингулярных интегральных уравнений, *Докл. АН СССР*, 1976, том 226, номер 3, 516–519

https://www.mathnet.ru/dan39723

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 226, № 3

УДК 517.948.324 МАТЕМАТИКА

З. ПРЕСДОРФ, Б. ЗИЛЬБЕРМАН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕДУКЦИИ И КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 19 VII 1975)

В заметке исследуется применимость и скорость сходимости методов редукции и коллокации для систем сингулярных интегральных уравнений по единичной окружности как нормального, так и ненормального типа (1).

1°. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: C^m ($m\geqslant 0$ — целое число) — пространство (комплекснозначных) функций, непрерывных на единичной окружности Γ_0 вместе с производными до порядка m включительно; $C^{m,\mu}$, $0<\mu\leqslant 1$,— пространство всех функций из C^m, для которых m-я производная на Γ_0 удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ; $W_p{}^m$, $1<p<\infty$,— пространство 2π-периодических функций на вещественной оси, абсолютно непрерывных вместе с производными до порядка $m-1$, для которых m-я производная абсолютно суммируема в p-й степени; при $m=0$ будем писать $C=C^0$, $H^\mu=C^{0,\mu}$, $L^0=W_p{}^0$. Все перечисленные пространства являются банаховыми в своей естественной норме (см., например, (2)).

Через $W_p^{m,\mu}$ будем обозначать совокупность всех функций из $W_p{}^m$, m-я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ, если оценивать ее приращение в норме L^p (см. (7)). При $\mu=0$ положим $W_p^{m,0}=W_p{}^m$, $C^{m,0}=C^m$.

Пусть, наконец, R — класс 2π-периодических функций, ограниченных и интегрируемых по Риману.

Если X — линейное пространство, то всюду в дальнейшем через $X_{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$, будем обозначать совокупность всех n-мерных векторов с компонентами из X, а через $X_{(n\times n)}$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n с элементами из X. Если X — банахово пространство, то $X_{(n)}$ становится банаховым пространством, если за норму принять сумму норм компонент.

2°. Рассмотрим теперь систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$A\varphi\equiv c(t)\varphi(t)+\frac{d(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+T\varphi=f(t)\quad (t\in\Gamma_0)\tag{1}$$

в пространствах $L^p_{(m)}$, $1<p<\infty$, $m\geqslant 1$, и $H^\mu_{(m)}$, $0<\mu<1$, где $a(t)=c(t)+d(t)$, $b(t)=c(t)-d(t)$ — матрицы-функции из класса $H^\mu_{(m\times m)}$, а T — линейный вполне непрерывный оператор.

Для метода редукции решения системы (1) в нормальном случае имеют место следующие две теоремы, в которых через f_j и a_j, b_j, c_{jk} (j, $k=0, \pm 1, \ldots$) обозначены соответственно коэффициенты Фурье вектор-функции $f(t)$ и матриц-функций $a(t)$, $b(t)$, Tt^k.

Теорема 1. *Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — матрицы-функции из класса $H^\mu_{(m\times m)}$; $0<\mu<1$, для которых выполнены следующие условия:*

1) $\det a(t)\neq 0, \det b(t)\neq 0$ $(t\in\Gamma_0)$;

2) *левые частные индексы** $a(t)$ *равны нулю;*

3) *правые частные индексы матриц-функций* $b(t)$ *и* $b^{-1}(t)a(t)$ *равны нулю.*

Если T — *вполне непрерывный оператор в пространстве* $L^p_{(m)}$, $1<p<\infty$, *и* $\dim\ker A=0$, *тогда система*

$$\sum_{k=0}^{n} a_{j-k}\xi_k + \sum_{k=-n}^{-1} b_{j-k}\xi_k + \sum_{k=-n}^{n} c_{jk}\xi_k = f_j, \qquad j=0,\pm 1,\ldots,\pm n, \tag{2}$$

начиная с некоторого n, *имеет единственное решение* $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=-n}^{n}$, *а вектор-функции*

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} t^k\xi_k^{(n)} \tag{3}$$

сходятся при $n\to\infty$ *по норме* $L^p_{(m)}$ *к решению* $\varphi\in L^p_{(m)}$ *системы* (1), *какова бы ни была вектор-функция* $f\in L^p_{(m)}$.

Если $a(t), b(t)\in C^{r,\mu}_{(m\times m)}$, $f\in W^{r,\nu}_{p(m)}$ и T: $L^p_{(m)}\to W^{r,\nu}_{p(m)}$ $(r\geqslant 0, 0\leqslant\nu<1)$ *тогда справедлива оценка*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^p_{(m)}}=O(n^{-r-\lambda}), \quad \lambda=\min(\mu,\nu). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* T — *вполне непрерывный оператор из* $H^\nu_{(m)}$ *в* $H^\mu_{(m)}$, $0<\nu<\mu<1$, *и* $\dim\ker A=0$, *тогда система* (2), *начиная с некоторого* n, *имеет единственное решение, а функции* (3) *сходятся при* $n\to\infty$ *по норме* $H^\nu_{(m)}$ *к решению* $\varphi\in H^\nu_{(m)}$ *системы* (1), *какова бы ни была вектор-функция* $f\in H^\mu_{(m)}$. *При этом*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{H^\nu_{(m)}}=O(\ln n/n^{\mu-\nu}). \tag{5}$$

Если $a(t), b(t)\in C^{r,\mu}_{(m\times m)}$, $f\in C^{r,\mu}_{(m)}$ $(r\geqslant 0)$ *и* T: $H^\nu_{(m)}\to C^{r,\mu}_{(m)}$, *тогда справедлива оценка*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{H^\nu_{(m)}}=O(\ln n/n^{r+\mu-\nu}). \tag{6}$$

Замечание. При более ограничительных условиях и без оценки (4) теорема 1 была получена в ([3]). В ([4б, в]) была установлена теорема 2 с более грубыми оценками погрешности ($\ln^4 n$ вместо $\ln n$).

Обратимся теперь к коллокационному методу для системы (1) с узлами

$$t_j=\exp(2\pi ij/(2n+1)),\ j=0, \pm 1,\ldots, \pm n. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $a(t)$ *и* $b(t)$ — *матрицы-функции класса* $H^\mu_{(m\times m)}$, $0<\mu<1$, *и выполнены следующие условия:*

1) $\det a(t)\neq 0, \det b(t)\neq 0$, $t\in\Gamma_0$;

2) *левые и правые частные индексы матрицы-функции* $b^{-1}(t)$, $a(t)$ *равны нулю.*

Если T — *вполне непрерывный оператор из* $L^p_{(m)}$, $1/\mu<p<\infty$, *в пространство* $C_{(m)}$ *и* $\dim\ker A=0$, *тогда система*

$$a(t_j)\sum_{k=0}^{n} t_j^k\xi_k+b(t_j)\sum_{k=-n}^{-1} t_j^k\xi_k+\sum_{k=-n}^{n} d_{jk}\xi_k=f(t_j), \tag{8}$$

$$j=0, \pm 1,\ldots, \pm n,$$

* Определение частных индексов см. в ([1], [3]).

где $d_{jk}=(Tt^k)(t_j)$, j, $k=0, \pm 1, \ldots$, *начиная с некоторого* n, *имеет единственное решение* $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=-n}^{n}$ *и вектор-функции* (3) *сходятся при* $n\to\infty$ *по норме* $L^p_{(m)}$ *к решению* $\varphi\in L^p_{(m)}$ *системы* (1), *какова бы ни была вектор-функция* $f\in R_{(m)}$.

Если $a(t), b(t)\in C^{r,\mu}_{(m\times m)}$, $f\in C^{r,\nu}_{(m)}$ *и* T: $L^p_{(m)}\to C^{r,\nu}_{(m)}$ $(r\geqslant 0,\ 0\leqslant\nu<1)$, *тогда справедлива оценка* (4).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 2 *относительно системы* (8) (*вместо системы* (2)).

Замечание 1. В ([4а,в]) доказана теорема 4 с более грубыми оценками погрешности ($\ln^3 n$ вместо $\ln n$). В случае $m=1$ результаты, близкие к теореме 4, получены в ([5], [6]).

Замечание 2. Теоремы 3 и 4 остаются в силе, если вместо узлов (7) рассматривать узлы $t_j=\exp(\pi i j/n)$, $j=0, 1, \ldots, 2n-1$.

3°. Рассмотрим теперь систему (1) в ненормальном случае, когда определитель $\det a(t)$ имеет на Γ_0 конечное число нулей α_j, $j=1,\ldots, r$, целых кратностей m_j, а функция $\det b(t)$ имеет на Γ_0 нули β_k, $k=1,\ldots, s$, целых кратностей n_k. Если матрицы-функции $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют некоторым условиям гладкости в точках α_j и β_k, то их можно представить в виде (см. ([2]), гл. 8)

$$a(t)=A(t)D_-(t)R_-(t),\qquad b(t)=B(t)D_+(t)R_+(t). \tag{9}$$

Здесь $D_\pm(t)$ означают диагональные матрицы вида

$$D_-(t)=\left\{\prod_{k=1}^{r}(t^{-1}-\alpha_k^{-1})^{\mu_j^{(k)}}\delta_{jl}\right\},\qquad D_+(t)=\left\{\prod_{k=1}^{s}(t-\beta_k)^{\nu_j^{(k)}}\delta_{jl}\right\}_{j,l=1}^{m};$$

$\mu_1^{(k)}\geqslant\mu_2^{(k)}\geqslant\ldots\geqslant\mu_m^{(k)}\geqslant 0$, $k=1,\ldots,r$, $\nu_1^{(k)}\geqslant\nu_2^{(k)}\geqslant\ldots\geqslant\nu_m^{(k)}\geqslant 0$, $k=1,\ldots,s$,

целые числа, $R_\pm(t)$ — матрицы, полиномиальные относительно $t^{\pm1}$, с постоянным и отличным от нуля определителем, а $A(t)$, $B(t)$ — матрицы-функции, определители которых всюду на Γ_0 отличны от нуля. Положим

$$\varkappa=\max(\mu_1^{(1)},\ldots,\mu_1^{(r)},\nu_1^{(1)},\ldots,\nu_1^{(s)}).$$

Очевидно, что $\varkappa\leqslant\rho\equiv\max(m_1,\ldots,m_r,n_1,\ldots,n_s)$.

Теорема 5. *Пусть заданы представления* (9), *причем* $A(t)$ *и* $B(t)$ *из класса* $C^{\varkappa,\mu}_{(m\times m)}$, $0<\mu<1$ *, *левые частные индексы матрицы-функции* $A(t)$ *равны нулю и правые частные индексы матрицы-функции* $B(t)$ *равны нулю. Пусть далее* T — *вполне непрерывный оператор из* $L^p_{(m)}$, $1<p<\infty$, *в* $W^\varkappa_{p(m)}$ *и* $\dim\ker A=\dim\ker A_0=0$ **.

Тогда система (2), *начиная с некоторого* n, *имеет единственное решение и вектор-функции* (3) *сходятся при* $n\to\infty$ *по норме* $L^p_{(m)}$ *к решению* $\varphi\in L^p_{(m)}$ *системы* (1), *какова бы ни была вектор-функция* $f\in W^\varkappa_{p(m)}$.

Если $A(t), B(t)\in C^{\varkappa+r,\mu}_{(m\times m)}$, $f\in W^{\varkappa+r}_{p(m)}$, $r>0$, *и* T: $L^p_{(m)}\to W^{\varkappa+r}_{p(m)}$, *тогда справедлива оценка*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^p_{(m)}}=O(n^{-r}).$$

Теорема 6. *Пусть заданы представления* (9), *причем* $A(t)$ *и* $B(t)$ *из класса* $C^{\varkappa+1}_{(m\times m)}$ *и левые частные индексы матрицы-функции* $B^{-1}(t)A(t)$

* Для этого достаточно, например, чтобы $a(t)$, $b(t)\in C^{\varkappa+\rho,\mu}_{(m\times m)}$.

** Через A_0 обозначим характеристическую часть оператора A (т. е. $A_0=A$ при $T=0$).

равны нулю. Пусть T — *вполне непрерывный оператор из* $L^p_{(m)}$, $1<p<\infty$, *в* $C^{\varkappa,\mu}_{(m)}$, $0<\mu<1$, *и* $\dim\ker A=\dim\ker A_0=0$.

Тогда система (8), *начиная с некоторого* n, *имеет единственное решение и вектор-функции* (3) *сходятся при* $n\to\infty$ *по норме* $L^p_{(m)}$ *к решению* $\varphi\in L^p_{(m)}$ *системы* (1), *какова бы ни была вектор-функция* $f\in C^{\varkappa,\mu}_{(m)}$. *При этом*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^p_{(m)}}=O(n^{-\mu}).$$

Если $A(t)$, $B(t)\in C^{\varkappa+r,\mu}_{(m\times m)}$, $f\in C^{\varkappa+r,\mu}_{(m)}$, $r>0$, *и* T: $L^p_{(m)}\to C^{\varkappa+r,\mu}_{(m)}$, *тогда справедлива оценка* (4) *при* $\lambda=\mu$.

Все результаты настоящей заметки можно вывести из общих теорем сходимости проекционных методов. Для метода редукции и метода Галеркина решения уравнений в свертках (см. [3]) могут быть сформулированы результаты, аналогичные теоремам 1 и 5.

Политехнический институт
Карл-Маркс-Штадт, ГДР

Поступило
30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [2] *S. Prößdorf,* Einige Klassen singulärer Gleichungen, Berlin, 1974. [3] *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман,* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971. [4] *В. А. Золотаревский,* Математич. иссл., а) т. 9, в. 1, 56 (1974); б) т. 9, в. 2, 38 (1974); в) т. 9, в. 3, 82 (1974). [5] *В. В. Иванов,* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. [6] *Б. Г. Габдулхаев,* ДАН, т. 179, № 2, 260 (1968). [7] *P. L. Butzer, R. J. Nessel,* Fourier Analysis and Approximation, v. 1, Basel und Stuttgart, 1971.