

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Белинский, Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов,
В. Д. Чельцова, Дифракция цилиндрической волны на
полубесконечной пластине, расположенной на границе
двух акустических сред,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1970, том 17, 38–59

<https://www.mathnet.ru/zns12356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 мая 2025 г., 07:29:53



ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ,
РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ АКУСТИЧЕСКИХ СРЕД

Рассматриваются стационарные колебания двух соприкасающихся акустических сред. На границе раздела сред, которая предполагается прямолинейной, располагается полубесконечный экран. Строится решение задачи дифракции на кромке экрана цилиндрической волны, возбужденной некоторым "нитевидным" источником, расположенным в одной из сред. Ось цилиндрической волны считается параллельной кромке экрана (двумерная задача).

В качестве экрана рассматривается абсолютно жесткая пластина (задача 1) и пластина, способная к изгибным движениям (задача 2). Во втором случае, таким образом, не учитываются продольные движения пластины. Такое приближение справедливо для случая, когда акустические свойства сред достаточно различны (1), что и предполагается в дальнейшем. Учет симметричных движений пластины, которые вносят существенный вклад в поле в случае близости или совпадения акустических свойств сред (2-4), привел бы к принципиальному усложнению задачи в математическом отношении (матричная задача Римана). Кроме того, пластина считается бесконечно тонкой. Иными словами, не учитываются ни потеря фазы при прохождении волн сквозь пластину, ни эффект отражения волн от плоскости поперечного среза пластины ("торцевой" эффект). Таким образом, толщина пластины не влияет на геометрию задачи, а учитывается лишь как некоторая механическая постоянная при задании акустических свойств пластины. В указанных предположениях относительно второй задачи строится точное математическое решение обеих задач. Решение не исследуется. Аналогичная задача для жесткого экрана и источника поля - нестационарной плоской падающей волны рассматривалась в (5).

падающей волны рассматривалась в (5).

Обозначения

$\rho_{1,2}$ - плотности сред, ω - частота колебаний, $P_{1,2}$ - давления, $k_{1,2}$ - волновые числа.	E_0 - модуль Юнга пластины, h - толщина пластины, ρ_0 - плотность пластины.
---	--

Временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

§ I. Постановка задачи

Первая среда расположена в полуплоскости $0 < z < +\infty$,
 $-\infty < x < +\infty$; вторая - в полуплоскости $-\infty < z < 0$,
 $-\infty < x < +\infty$. Полубесконечный экран расположен при $z=0$,
 $-\infty < x < 0$. Точечный источник находится в точке $(x_0,$
 $z_0 < 0)$ (рис. I).

Состояние сред описывается в терминах давлений P_1 и P_2 ,
 которые подчиняются в соответствующих полуплоскостях уравнениям
 Гельмгольца: $(\Delta + k_1^2) P_1 = 0$,

$$(\Delta + k_2^2) P_2 = \delta(x - x_0; z - z_0). \quad (I.I)$$

Давления удовлетворяют также некоторым граничным условиям,
 определяющим акустический контакт между средами. На положительной
 части оси Ox , где обе среды находятся в непосредственном со-
 прикосновении, имеет место непрерывность давлений

$$P_1 = P_2, \quad (z=0, 0 < x < \infty) \quad (I.2)$$

и нормальных смещений

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z}, \quad (z=0, 0 < x < \infty) \quad (I.3)$$

На отрицательной части оси Ox , где среды разделены пластиной, в случае жесткой пластины предполагается отсутствие нормальных смещений

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} = 0, \quad (z=0, -\infty < x < 0) \quad (I.4)$$

В случае упругой пластины имеют место равенства

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z}, \quad (I.5)$$

$$P_1 - P_2 = m \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} \right), \quad (z=0, -\infty < x < 0) \quad (I.6)$$

Второе из этих равенств задает равновесие сил, действующих на пластину. Здесь положено:

$$m \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) = h \rho_0 - \frac{E_0 h^3}{3\omega^2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 \quad (I.7)$$

Отметим, что равенство (I.3) выполнено в обеих задачах для всей оси Ox , что будет существенно для дальнейших выкладок. Учет симметричных движений пластины привел бы к нарушению соотношения (I.5).

Кроме того, в случае упругой пластины необходимо сформулировать режим на ее конце. Мы потребуем здесь отсутствия сосредоточенного момента и сосредоточенной силы

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) = 0, \quad (I.8)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) = 0, \quad (z=0, x \rightarrow -0)$$

Волновые числа здесь и далее считаются комплексными, так что

$$\operatorname{Re}(\kappa_1, \kappa_2) > 0, \quad \operatorname{Im}(\kappa_1, \kappa_2) > 0$$

Решение ищется в классе функций, обладающих экспоненциальным убыванием на бесконечности. Решение для вещественных κ_1, κ_2 понимается как предел решения при комплексных κ_1, κ_2 при $\Im m(\kappa_1, \kappa_2) \rightarrow +0$ (принцип предельного поглощения).

Решения строятся методом разложения по плоским волнам (6.7), после чего задачи сводятся к неоднородным краевым задачам для аналитических функций (8).

Предварительно (§2) находится специальное представление для поля точечного источника в отсутствии экрана.

§ 2. Поле источника в отсутствии экрана

Рассматриваются гармонические движения пары однородных акустических сред, возбуждаемые источником, сосредоточенным в точке $x = x_0$, $z = z_0 < 0$. Давления подчиняются уравнениям Гельмгольца:

$$(\Delta + \kappa_1^2) P_1 = 0, \quad (z > 0, -\infty < x < +\infty), \quad (2.1)$$

$$(\Delta + \kappa_2^2) P_2 = \delta(x - x_0, z - z_0), \quad (z < 0, -\infty < x < +\infty) \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) должны быть решены при граничных условиях

$$P_1 = P_2, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z}, \quad (2.3)$$

которые сейчас предполагаются выполненными на всей оси Ox .

Решение ищем в виде:

$$P_1(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(\lambda) e^{i\lambda x - s_1(\lambda) z} d\lambda,$$

$$P_2(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_2(\lambda) e^{i\lambda x + s_2(\lambda) z} d\lambda -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_2(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0) - s_2(\lambda)|z-z_0|} d\lambda, \quad (2.4)$$

где положено

$$s_i(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_i^2}, \quad (i=1, 2) \quad (2.5)$$

Ветви радикалов фиксируются требованием

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} [\text{Im } s_{1,2}(\lambda)] = 0, \quad (\text{Im } \lambda = 0) \quad (2.6)$$

Разрезы на плоскости λ соединяют точки:

$$\begin{aligned} \lambda = \kappa_1 \text{ и } \lambda = \kappa_2, \quad \lambda = \kappa_1 \text{ и } \lambda = \infty, \\ \lambda = -\kappa_1 \text{ и } \lambda = -\kappa_2, \quad \lambda = -\kappa_1 \text{ и } \lambda = \infty \end{aligned}$$

Разрезы центрально-симметричны относительно начала координат и не пересекают вещественную ось (рис.2).

Такая форма решений позволяет удовлетворить уравнениям (2.1) и (2.2), а также (для весьма широкого класса функций $r_{1,2}(\lambda)$) условиям на бесконечности.

Граничные условия (2.3) дают два соотношения, выполненные для всех λ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [r_1(\lambda) - r_2(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_2(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0) + s_2(\lambda)z_0} d\lambda, \quad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{s_1(\lambda)}{s_1} r_1(\lambda) - \frac{s_2(\lambda)}{s_2} r_2(\lambda) \right] e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_2} e^{i\lambda(x-x_0) + s_2(\lambda)z_0} d\lambda$$

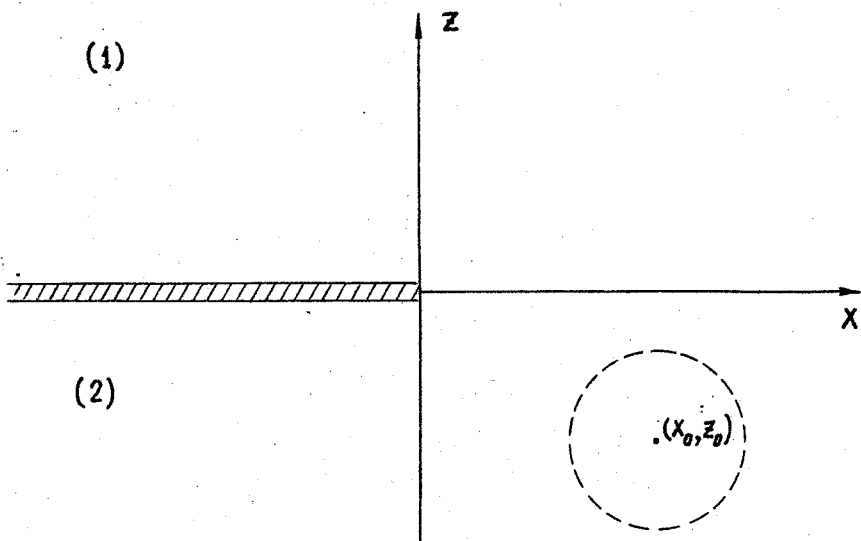


Рис. 1

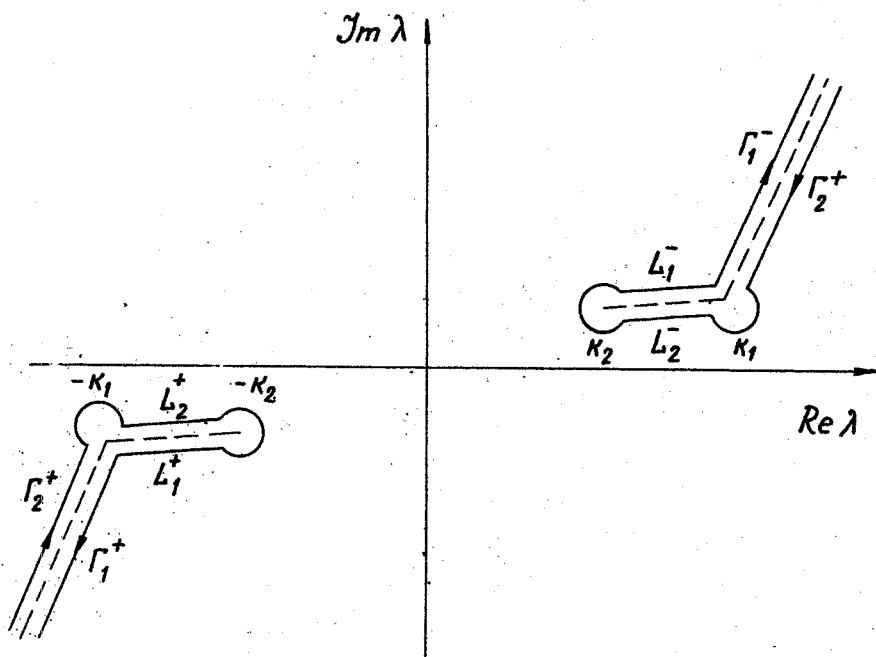


Рис. 2

Для удовлетворения (2.7) достаточно положить

$$\tau_1(\lambda) - \tau_2(\lambda) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0}}{s_2(\lambda)}, \quad (2.8)$$

$$-\frac{s_1(\lambda)}{\rho_1} \tau_1(\lambda) - \frac{s_2(\lambda)}{\rho_2} \tau_2(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0}}{\rho_2}$$

Окончательно имеем:

$$\tau_1(\lambda) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\rho_1 e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0}}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)}, \quad (2.9)$$

$$\tau_2(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \frac{[\rho_2 s_1(\lambda) - \rho_1 s_2(\lambda)] e^{i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0}}{s_2(\lambda) [\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)]},$$

откуда

$$P_1(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\rho_1}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0) - s_1(\lambda)z + s_2(\lambda)z_0} d\lambda, \quad (2.10)$$

$$P_2(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\rho_2 s_1(\lambda) - \rho_1 s_2(\lambda)]}{s_2(\lambda) [\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)]} e^{s_2(\lambda)(z+z_0) + e^{-s_2(\lambda)|z-z_0|}} e^{i\lambda(x-x_0)} d\lambda$$

§ 3. Падение волны на полубесконечный экран

Рассматривается дифракционное поле, возникающее при падении описанной в § 2 волны на полубесконечный экран. Предположения относительно волновых чисел те же, что и выше.

От функций P_1, P_2 требуется экспоненциальное убывание на бесконечности и непрерывность на плоскости (x, z) с разрезом по отрицательной части оси Ox вплоть до разреза. Ниже производится построение решения дифракционной задачи для случая упругой пластины. Выкладки, относящиеся к более простой задаче дифракции на жестком экране, мы в целях краткости опустим. Решение для случая жесткого экрана приводится в конце параграфа.

Найденное в § I поле (формулы (2.10)) обозначим P_1^0, P_2^0 . Введем в рассмотрение дифрагированное поле Q_1, Q_2 , выделив из полного поля P_1, P_2 падающую волну:

$$Q_{1,2} = P_{1,2} - P_{1,2}^0 \quad (3.1)$$

Для дифрагированного поля имеют место однородные уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta + \kappa_1^2) Q_1 = 0, \quad (z > 0, -\infty < x < +\infty), \quad (3.2)$$

$$(\Delta + \kappa_2^2) Q_2 = 0, \quad (z < 0, -\infty < x < +\infty)$$

Граничные условия имеют вид:

$$Q_1 - Q_2 = 0, \quad (z = 0, 0 < x < +\infty), \quad (3.3)$$

$$Q_1 - Q_2 - m \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) =$$

$$= m \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1^0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2^0}{\partial z} \right),$$

$$(z = 0, -\infty < x < 0), \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial Q_2}{\partial z} = 0, \quad (z=0, -\infty < x < +\infty) \quad (3.5)$$

Должны быть выполнены также контактные условия:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1^0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2^0}{\partial z} \right) \quad (z=0, x \rightarrow -0), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1^0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2^0}{\partial z} \right), \quad (z=0, x \rightarrow -0). \quad (3.7)$$

Решение Q_1, Q_2 будем искать в виде:

$$Q_1(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_1(\lambda) e^{i\lambda x - s_1(\lambda)z} d\lambda, \quad (3.8)$$

$$Q_2(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_2(\lambda) e^{i\lambda x + s_2(\lambda)z} d\lambda.$$

Ветви радикалов выбираются так же, как в § 2.

Граничное условие (3.5) приводит к соотношению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{s_1(\lambda)}{\rho_1} q_1(\lambda) - \frac{s_2(\lambda)}{\rho_2} q_2(\lambda) \right] e^{i\lambda x} d\lambda = 0 \quad (3.9)$$

выполненному на всей оси, откуда

$$-\frac{s_1(\lambda)}{\rho_1} q_1(\lambda) = \frac{s_2(\lambda)}{\rho_2} q_2(\lambda) \equiv \Psi(\lambda) \quad (3.10)$$

Для обеспечения непрерывности $Q_{1,2}(x, z)$ при $z=0$ потребуем от $\Psi(\lambda)$ следующего поведения на бесконечности

$$\Psi(\lambda) = o(\lambda^{-\varepsilon}), \quad (\varepsilon > 0),$$

$$\lambda \rightarrow \infty$$

Используя граничные условия (3.3) и (3.4), получаем следующее парное интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{s_1}{s_1(\lambda)} + \frac{s_2}{s_2(\lambda)} \right] \Psi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad (x > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{s_1}{s_1(\lambda)} + \frac{s_2}{s_2(\lambda)} + 2m(\lambda) \right] \Psi(\lambda) + \right. \quad (3.11)$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \frac{m(\lambda) s_1(\lambda)}{s_2 s_1(\lambda) + s_1 s_2(\lambda)} e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0} \right\} e^{i\lambda x} d\lambda = 0,$$

$$(x < 0)$$

где $m(\lambda)$ получается из (1.5) формальной заменой $-i \frac{\partial}{\partial x}$ на λ .

Для выполнения первого из равенств (3.11) положим:

$$\left[\frac{s_1}{s_1(\lambda)} + \frac{s_2}{s_2(\lambda)} \right] \Psi(\lambda) = F^+(\lambda), \quad (3.12)$$

где $F^+(\lambda)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной плоскости λ . Аналогичным образом второе из соотношений (3.11) дает:

$$\left[\frac{s_1}{s_1(\lambda)} + \frac{s_2}{s_2(\lambda)} + 2m(\lambda) \right] \Psi(\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{m(\lambda) s_1(\lambda)}{s_2 s_1(\lambda) + s_1 s_2(\lambda)} e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0} = F^-(\lambda), \quad (3.13)$$

где F^- - функция, аналитическая в нижней полуплоскости. Из (3.12) и (3.13) получается следующая краевая задача Римана (8): найти две функции $F^+(\lambda)$ и $F^-(\lambda)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях. соответственно, по условию на веще-

ственной оси:

$$l_2(\lambda) F^+(\lambda) = F^-(\lambda) + f_2(\lambda), \quad (3.14)$$

где положено:

$$l_2(\lambda) = 1 + 2 \frac{s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda) m(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)}, \quad (3.15)$$

$$f_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{m(\lambda) \cdot s_1(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} e^{-i\lambda x_0 + s_2 z_0}. \quad (3.16)$$

Кроме того, функции $F^+(\lambda)$ и $F^-(\lambda)$ должны иметь на бесконечности следующий порядок:

$$F^+(\lambda) = o(\lambda^{-1-\varepsilon}), \quad F^-(\lambda) = o(\lambda^{4-\varepsilon}), \quad (\varepsilon > 0) \quad (3.17)$$

Для решения задачи (3.14) следует предварительно представить функцию $l_2(\lambda)$ в виде произведения двух функций, одна из которых ($l_2^+(\lambda)$) является аналитической в верхней полуплоскости, а другая ($l_2^-(\lambda)$) в нижней:

$$l_2(\lambda) = l_2^+(\lambda) \cdot l_2^-(\lambda). \quad (3.18)$$

Представление (3.18) (факторизация) будет построено в § 4. Там же будет установлено, что $l_2^\pm(\lambda)$ имеют следующий порядок на бесконечности:

$$l_2^\pm(\lambda) = o(\lambda^{\frac{5}{2}}). \quad (3.19)$$

Уравнение (3.14) с учетом (3.18) преобразуется к виду:

$$l_2^+(\lambda) F^+(\lambda) - \chi_2^+(\lambda) = \frac{F^-(\lambda)}{l_2^-(\lambda)} - \chi_2^-(\lambda), \quad (3.20)$$

где положено:

$$\chi_2(\lambda)$$

=

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi e_2^-(\tau)} \cdot \frac{m(\tau) \cdot s_1(\tau)}{\rho_2 s_1(\tau) + \rho_1 s_2(\tau)} e^{-i\tau x_0 + s_2(\tau) z_0} \frac{d\tau}{\tau - \lambda} = \quad (3.21)$$

$$= \begin{cases} \chi_2^+(\lambda) & \text{при } \text{Im } \lambda > 0, \\ \chi_2^-(\lambda) & \text{при } \text{Im } \lambda < 0, \end{cases}$$

и учтены формулы Сохоцкого (8).

Согласно теореме Римана об аналитическом продолжении через контур, левая и правая части равенства (3.20) задают единую функцию, аналитическую во всей плоскости, λ , а согласно теореме Лиувилля (с учетом формул (3.17), (3.19) и (3.20), эта функция является полиномом первой степени. Тогда из (3.12) имеем:

$$\Psi(\lambda) = \frac{s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda) + a_0 + a_1 i \lambda}{e_2^+(\lambda)}, \quad (3.22)$$

где константы a_0, a_1 пока произвольны.

Формулы (3.8), (3.10) и (3.22) дают дифрагированные поля:

$$Q_1(x, z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\rho_1 s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda) + a_0 + a_1 i \lambda}{e_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x - s_1(\lambda) z} d\lambda,$$

$$Q_2(x, z) = \quad (3.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2 s_1(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda) + a_0 + a_1 i \lambda}{e_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x + s_2(\lambda) z} d\lambda.$$

Формулы (3.1) и (2.10) и (3.23) дают полное поле.

Постоянные a_0, a_1 определяются из гранично-контактных условий (3.6) и (3.7). Однако непосредственное применение гранично-контактных операторов к полю P_1, P_2 порождает расходящиеся интегралы от выражений, имеющих алгебраический рост на бесконечности. В (7) указан способ регуляризации таких интегралов. Легко видеть, что гранично-контактные операторы можно применять к полю во всем пространстве P_1^0, P_2^0 , поскольку после предельного перехода $z=0, x \rightarrow -0$ под интегралами сохраняются экспоненциально убывающие множители $e^{s_2(\lambda)z}$. Регуляризации подлежат, т.о., результаты применения гранично-контактных операторов к дифрагированному полю Q_1, Q_2 .

Имеем:

$$\frac{1}{s_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial Q_1}{\partial z} (z=0, x \rightarrow -0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^2 s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{s_1 s_2(\lambda) + s_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda) + a_0 + a_1 i \lambda}{e_2^+(\lambda)} e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{s_1} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial Q_1}{\partial z} (z=0, x \rightarrow -0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^3 s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{s_1 s_2(\lambda) + s_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda) + a_0 + a_1 i \lambda}{e_2^+(\lambda)} e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad (3.25)$$

где использовано обозначение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda = \lim_{x \rightarrow -0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

Аналогично записываются результаты применения гранично-контактных операторов к полю Q_2 .

Обозначим:

$$T_n(x) = \quad (3.27)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$R_n(x) = \quad (3.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{1}{l_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Тогда из гранично-контактных условий (3.6) и (3.7) имеем:

$$\begin{aligned} T_2(-0) + a_0 R_2(-0) + a_1 R_3(-0) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1(\lambda) \cdot \lambda^2}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0} d\lambda, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} T_3(-0) + a_0 R_3(-0) + a_1 R_4(-0) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1(\lambda) \cdot \lambda^3}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} e^{-i\lambda x_0 + s_2(\lambda) z_0} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Обратимся к регуляризации интегралов (3.27) и (3.28). Имеем:

$$T_n(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n \cdot s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{[\chi_2^+(\lambda) + f_2(\lambda)] \cdot l_2^-(\lambda)}{l_2(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{f_2(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda + \quad (3.31)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^-(\lambda) \cdot \bar{l}_2^-(\lambda)}{l_2(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Первый из интегралов (3.21) сходится в обычном смысле, т.к. $f_2(\lambda)$ обладает экспоненциальным убыванием на бесконечности.

Будем деформировать контур интегрирования во втором из интегралов (3.31) в нижнюю полуплоскость до тех пор, пока он не охватит разрез (рис.2). Учтем, что при деформации контура были пересечены полюса подынтегрального выражения.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^-(\lambda) \cdot \bar{l}_2^-(\lambda)}{l_2(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= -2\pi i \sum_{\text{Im} \lambda < 0} \text{Res} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^-(\lambda) \cdot \bar{l}_2^-(\lambda)}{l_2(\lambda)} e^{i\lambda x} + \quad (3.32)$$

$$+ \int_{L^+ \cup \Gamma^+} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{\chi_2^-(\lambda) \cdot \bar{l}_2^-(\lambda)}{l_2(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

где $L^+ = L_1^+ \cup L_2^+$ и $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ (рис.2). Сведем интеграл по Γ^+ к интегралу по Γ_1^+ , а интеграл по L^+ к интегралу по L_1^+ .

В результате получим:

$$T_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \cdot \frac{f_2(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda -$$

$$- 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im} \lambda < 0} \text{Res} \frac{(i\lambda)^n s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda)}{[\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)] l_2^+(\lambda)} e^{i\lambda x} +$$

$$+ 2 \int_{L_1^+} \frac{S_2 (i\lambda)^n \cdot S_1^2(\lambda) \cdot S_2(\lambda) \cdot \chi_2^-(\lambda) \cdot l_2^-(\lambda)}{S_2^2 S_1^2(\lambda) - [S_1 S_2(\lambda) + 2S_1(\lambda) S_2(\lambda) m(\lambda)]^2} e^{i\lambda x} d\lambda + \quad (3.33)$$

$$+ 2 \int_{\Gamma_1^+} \frac{(i\lambda)^n \cdot S_1(\lambda) \cdot S_2(\lambda) \cdot \chi_2^-(\lambda) \cdot l_2^-(\lambda) \cdot [S_2 S_1(\lambda) + S_1 S_2(\lambda)]}{[S_1 S_2(\lambda) + S_2 S_1(\lambda)]^2 - 4S_1^2(\lambda) S_2^2(\lambda) \cdot m^2(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda$$

Легко проверить, что интегралы по Γ_1^+ сходятся в обычном смысле даже без множителя $e^{i\lambda x}$ при $n \leq 6$, т.к. подынтегральное выражение имеет на бесконечности порядок $O(\lambda^{n-7.5})$. Тем самым достигается регуляризация интегралов $T_n(-0)$.

Интегралы $R_n(-\infty)$ регуляризуются аналогично. Окончательный результат получается по формуле (3.32), где нужно формально положить $f_2(\lambda) \equiv 0$, $\chi_2^-(\lambda) \equiv 1$. В итоге регуляризация $R_n(-0)$ достигается для $n \leq 5$.

Полное поле получается теперь по формулам (3.1), (2.10), (3.23), (3.29) и (3.30).

Аналогично предыдущему рассматривается случай абсолютно жесткой пластины. Полное поле получается по формулам (3.1), (2.10) и (3.23), если положить там $a_0 = a_1 = 0$ и заменить $l_2(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ на $l_1(\lambda)$ и $\chi_1(\lambda)$, где

$$l_1(\lambda) = \frac{S_1 S_1(\lambda) S_2(\lambda)}{S_1 S_2(\lambda) + S_2 S_1(\lambda)} = l_1^+(\lambda) \cdot l_1^-(\lambda),$$

$$\chi_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{l_1^+(z)}{S_2(z)} e^{S_2(z) z_0 - i z x_0} \frac{dz}{z - \lambda} = \quad (3.34)$$

$$= \begin{cases} \chi_1^+(\lambda) & \text{при } \Im m \lambda > 0, \\ \chi_1^-(\lambda) & \text{при } \Im m \lambda < 0, \end{cases}$$

причем функция $l_1^+(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости, а функция $l_1^-(\lambda)$ в нижней. Представление (3.34) будет получено в § 4.

§ 4. Факторизация функций $l_{1,2}(\lambda)$.

Ниже будут получены представления

$$l_{1,2}(\lambda) = l_{1,2}^+(\lambda) l_{1,2}^-(\lambda). \quad (4.1)$$

При этом используется аппарат интегралов Коши (6.7.8). Функции $l_{1,2}(\lambda)$ определены на четырехлистной римановой поверхности и имеют на ней четыре точки ветвления $\lambda = \pm \kappa_1, \pm \kappa_2$. Разрезы, указанные на рис. 2, разделяют листы этой поверхности. При этом предполагается, что разрезы не проходят через корни функции $l_{1,2}(\lambda)$. Сведем факторизацию функции в $l_{1,2}(\lambda)$, факторизации произведения некоторых стандартных функций. Обратимся сначала к $l_2(\lambda)$.

$$l_2(\lambda) = 1 + 2m(\lambda) \frac{s_1(\lambda) s_2(\lambda)}{\rho_1 s_2(\lambda) + \rho_2 s_1(\lambda)} \quad (4.2)$$

Введем функцию

$$\gamma(\lambda) \equiv \frac{s_1(\lambda) + s_2(\lambda)}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \quad (4.3)$$

Тогда, как легко проверить, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} s_1(\lambda) &= \frac{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}{2} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right), \\ s_2(\lambda) &= \frac{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}{2} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \left[\kappa_1^2 \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right)^2 - \kappa_2^2 \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \right].$$

Тогда функция $l_2(\lambda)$ принимает вид:

$$l_2(\lambda) = \frac{1}{48\omega^2\gamma^5(\rho_1 + \rho_2)} \cdot \frac{w(\gamma)}{\gamma^2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (4.5)$$

где положено:

$$w(\gamma) = 48\omega^2\gamma^5 [\rho_1(\gamma^2+1) + \rho_2(\gamma^2-1)] + \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} (\gamma^2-1) \times \\ \times \left\{ 48\omega^2 h \rho_0 \gamma^4 - E_0 h^3 [(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\gamma^4 + 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\gamma^2 + (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)]^2 \right\}. \quad (4.6)$$

Обозначим корни полинома $w(\gamma)$ через γ_j ($j=1, 2, \dots, 12$). В этих обозначениях имеем:

$$l_2(\gamma) = - \frac{E_0 h^3 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^{5/2}}{48\omega^2 \gamma^5 (\rho_1 + \rho_2) \left(\gamma^2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)} \prod_{j=1}^{12} (\gamma - \gamma_j). \quad (4.7)$$

Введем функцию:

$$E(\lambda, a) \equiv s_1(\lambda) + s_2(\lambda) - a \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} \quad (4.8)$$

Тогда для $l_2(\lambda)$ имеем:

$$l_2(\lambda) = - \frac{E_0 h^3}{48\omega^2(\rho_1 + \rho_2)} \times \quad (4.9)$$

$$\times \frac{E\left(\lambda, \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}}\right) E\left(\lambda, -\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}}\right) [E(\lambda, 0)]^5}{}$$

Вопрос о факторизации $l_2(\lambda)$ сводится, т.о., к нахождению чисел γ_j и факторизации $E(\lambda, a)$ при различных a .

При заданных параметрах сред и пластины и частоте колебаний γ_j могут быть найдены либо численно, либо методом последователь-

ных приближений в виде ряда по степеням некоторого малого параметра (обычно в качестве такого параметра берется безразмерная толщина пластины).

Легко проверить, что при вещественных волновых числах $K_{1,2}$ функция $\ell_2(\lambda)$ имеет только пару вещественных нулей, которые по абсолютной величине превосходят $\max(K_1, K_2)$ и различаются знаком. Эти корни — волновые числа поверхностных волн. Остальные II пар корней $\ell_2(\lambda)$ соответствуют неоднородным волнам.

Факторизация $E(\lambda, a)$ проводится различными способами в зависимости от того, имеет ли эта функция нули на основном листе или нет, что, в свою очередь, определяется величиной a .

Функция $E(\lambda, a)$ имеет 2 корня в точках

$$\lambda_a = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + K_1^2 + K_2^2)^2 - 4K_1^2 K_2^2}}{2a}, \quad (4.10)$$

причем, ввиду четности $E(\lambda, a)$, оба эти корня одновременно расположены на одном из ее четырех листов.

Допустим сначала, что пара корней $E(\lambda, a)$ располагается на дневном листе. Тогда функция

$$\varphi_1(\lambda, a) = 2 \frac{E(\lambda, a) \cdot S_2(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_a^2} \quad (4.11)$$

на основном листе не имеет корней и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(\lambda, a) = 1. \quad (4.12)$$

Следовательно, на основном листе можно определить однозначную функцию $\ln \varphi_1(\lambda, a)$, причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \varphi_1(\lambda, a) = 0. \quad (4.13)$$

По теореме Коши,

$$\ln \varphi_1(\lambda, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln \varphi_1(\tau, a)}{\tau - \lambda} d\tau \quad (4.14)$$

где C - произвольный контур на основном листе, не задевающий разрезы и обходящий точку $\tau = \lambda$ в положительном направлении. Растягивая этот контур, можно получить:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln \varphi_1(\tau, a)}{\tau - \lambda} d\tau = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\ln \varphi_1(\tau, a)}{\tau - \lambda} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\ln \varphi_1(\tau, a)}{\tau - \lambda} d\tau, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где контуры $C_{\pm} = \Gamma_{\pm} \cup L_{\pm}$. Окончательно, факторизация $E(\lambda, a)$ дается формулой:

$$E^{\pm}(\lambda, a) = \frac{\lambda \mp \lambda a}{\sqrt{2} \sqrt{\lambda \pm \kappa_2}} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{\ln \varphi_1(\tau, a)}{\tau - \lambda} d\tau \right], \quad (4.16)$$

где через λ_a обозначен тот из корней $E(\lambda, a)$, у которого $\text{Im} \lambda_a < 0$

Факторизация для случая, когда на дневном листе нет корней $E(\lambda, a)$ производится аналогично. Имеем:

$$E(\lambda, a) = 2s_2(\lambda) \varphi_2(\lambda, a), \quad (4.17)$$

где функция $\varphi_2(\lambda, a)$ на основном листе обладает теми же свойствами, что и $\varphi_1(\lambda, a)$ и факторизуется так же.

Итак, получена факторизация $l_2(\lambda)$:

$$l_2(\lambda) = \sqrt{\frac{E_0 h^3}{48 \omega^2 (s_1 + s_2)}} \times \frac{\prod_{j=1}^{12} E^{\pm}(\lambda, \gamma_j)}{E^{\pm}(\lambda, \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1}}) E^{\pm}(\lambda, -\sqrt{\frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1}}) [E^{\pm}(\lambda, 0)]^5} \quad (4.18)$$

Легко видеть, что для всех a

$$E^{\pm}(\lambda, a) = o(\lambda^{1/2}), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

откуда следует, что

$$l_2^\pm(\lambda) = 0 \quad (\lambda^{5/2}) \quad (4.20)$$

$\lambda \rightarrow 0$

Аналогично предыдущему, получается представление для $l_1(\lambda)$. В этом случае

$$l_1^\pm(\lambda) = \frac{2\rho_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} (\rho_1 + \rho_2)} \frac{s_1(\lambda) \cdot s_2(\lambda) \gamma}{\gamma^2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (4.21)$$

$$l_1^\pm(\lambda) = \sqrt{\frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda \pm \kappa_1} \sqrt{\lambda \pm \kappa_2} E^\pm(\lambda, 0)}{E^\pm(\lambda, \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}}) E^\pm(\lambda, -\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}})} \quad (4.22)$$

Литература

1. Коузов Д.П. "О низкочастотных движениях тонкого упругого слоя, разделяющего две жидкости". Сб. "Проблемы дифракции и распространения волн." Вып. 6, 1966, ЛГУ.
2. Молотков Л.А. "О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим тонким слоем". Сб. "Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн", вып. 5, 281-302, 1961, ЛГУ.
3. Ивакин Б.Н. "Головные проходящие и другие волны в случае твердого слоя в жидкости." Тр. Геофиз. ин-та, № 35, 1956.
4. Лямшев Л.М. "Отражение звука тонкими оболочками пластинками в жидкости". Изд. АН СССР, 1955.
5. Papadopolulos. Diffraction of pulses. Proc. of the Roy. Soc. A. 252, № 1271, 1959.
6. Maue A.W. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene., ZAMM., 33, Nr 1/2., 1953.

7. Коузов Д.П. "Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин". ПММ, 33, вып. 2, 1969.

8. Гахов Ф.Д. "Краевые задачи", ГИФМЛ, 1963.