О. М. Киселев, Асимптотика решения задачи Коши для возмущенного уравнения Клейна–Фока–Гордона, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 165, 115–121

О.М.Киселев

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ФОКА-ГОРДОНА

I. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается задача Коши для возмущенного уравнения Клейна-Фока-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + b u = \varepsilon f(u),$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,\xi), \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,\xi), \tag{I}$$

где $\varphi(x,\xi)$ и $\psi(x,\xi)$ – 2π-периодические функции по x и ξ, ряды Фурье которых по ξ быстро сходятся. ε – малый параметр; $\xi = \varepsilon x$ и $\tau = \varepsilon t$ – "медленные" переменные, $b > 0$. Для простоты изложения будем считать, что $f(u)$ – целая функция, ряд Тейлора которой имеет вид: $f(u) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n u^n$. Требуется построить главный член асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (I), равномерно для $\forall t \leqslant O(\varepsilon^{-1})$.

Задача (I) рассматривалась в [I], стр.193 с начальными условиями специального вида, там же приведена формула для главного члена асимптотики в одноволновом случае $u = a\cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)$. В [2] дано обоснование этой формулы для $\forall t \leqslant O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$.

В отличие от случая описанного в [I], [2] здесь рассматривается общая ситуация, когда в главном решение не одноволновое. При этом оказывается, что в общем случае в главном члене происходит увеличение числа гармоник независимо от их количества в начальных условиях. Кроме того возникают трудности при обосновании а.р., так как не удается построить следующий по степени ε член а.р., в случае трансцендентного b.

2. Построение главного члена а.р. Будем искать а.р. решения задачи (I) в виде:

$$u = \overset{0}{u}(x,\xi,t,\tau) + \varepsilon \overset{1}{u}(x,\xi,t,\tau) + O(\varepsilon^2). \tag{2}$$

Подставим (2) в (I), учитывая при дифференцировании зависимость $\overset{0}{u}$ и $\overset{1}{u}$ от "медленных" переменных. Подставим $\overset{0}{u}$ и $\overset{1}{u}$ в виде рядов Фурье по x и ξ, коэффициенты которых зависят от t и τ:

$$\hat{u}_{k\lambda}(t,\tau) \equiv U_{k\lambda}(t,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\xi,t,\tau)\exp(-i(kx+\lambda\xi))\,dx\,d\xi .$$

Для $\overset{0}{U}_{k\lambda}(t,\tau)$ получается задача Коши:

$$\partial_t^2 \overset{1}{U}_{k\lambda} + \omega_k^2 \overset{\circ}{U}_{k\lambda} = 0 ,$$

$$\overset{\circ}{U}_{k\lambda}\Big|_{t=\tau=0} = \varphi_{k\lambda} , \quad \partial_t \overset{\circ}{U}_{k\lambda}\Big|_{t=\tau=0} = \Psi_{k\lambda} , \tag{3}$$

где $\omega_k^2 = k^2 + b$; $\varphi_{k\lambda}$ и $\Psi_{k\lambda}$ – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x,\xi)$ и $\Psi(x,\xi)$. Задача (3) допускает решения вида:

$$\overset{\circ}{U}_{k\lambda} = \sum_{(\pm)} A^{\pm}_{k\lambda}(\tau) \exp(\pm \omega_k t) . \tag{4}$$

Зависимость от τ включается в амплитуду: $A_{k\lambda}(\tau) = \{A^+_{k\lambda}(\tau), A^-_{k\lambda}(\tau)\}$ значения которой при $\tau > 0$ предстоит определить.

Уравнение для $\overset{1}{U}_{k\lambda}$:

$$\partial_t^2 \overset{1}{U}_{k\lambda} + \omega_k^2 \overset{1}{U}_{k\lambda} = f(*\overset{\circ}{U})_{k\lambda} - 2i\omega_k \sum_{(\pm)} \pm \exp(\pm i\omega_k t) \times$$
$$\times \partial_\tau A^{\pm}_{k\lambda} - 2k\lambda \sum_{(\pm)} \exp(\pm i\omega_k t) A^{\pm}_{k\lambda} . \tag{5}$$

Под $f(*\overset{\circ}{U})_{k\lambda}$ понимается оператор, определенный следующим образом:

$$f(*\overset{\circ}{U})_{k\lambda} = \widehat{f(\overset{\circ}{u})} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (*\overset{\circ}{U}(t,\tau))^n_{k\lambda} . \tag{6}$$

Здесь $*$ означает свертку по k , λ . Степень свертки определяется так: $(*U)^1_{k\lambda} = U_{k\lambda}$, $(*U)^{n+1}_{k\lambda} = (U * (*U)^n_{k\lambda})_{k\lambda}$.

Для равномерной ограниченности по t частного решения уравнения (5) необходимо исключить решения однородного уравнения из правой части. Это приводит к системе уравнений для амплитуд главного члена:

$$\partial_\tau A^{\pm}_{k\lambda} = \frac{1}{2i\omega_k} \widetilde{\Phi}^{\pm}(A)_{k\lambda} \mp \frac{k\lambda}{i\omega_k} A^{\pm}_{k\lambda} , \tag{7}$$

где

$$\widetilde{\Phi}^{\pm}(*A)_{k\lambda} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(*\overset{\circ}{U})_{k\lambda} \exp(\mp i\omega_k t)\, dt . \tag{8}$$

Заменой $A^{\pm}_{k\lambda} = B^{\pm}_{k\lambda}(\tau) \exp(\pm \frac{ik\lambda}{\omega_k} \tau)$ система (7) приводится к виду:

$$\partial_\tau B_{k\lambda} = \frac{1}{2i\omega_k} \Phi(*B, \tau, k, \lambda) , \tag{9}$$

где $B_{k\lambda} = \{B^+_{k\lambda}, B^-_{k\lambda}\}$, $\Phi(*B,\tau,k,\lambda) = \{\Phi^+, \Phi^-\}$,

причем $\Phi^{\pm}(*B,\tau,k,\lambda) = \widetilde{\Phi}^{\pm}(*B \exp(\pm \frac{ik\lambda}{\omega_k}\tau))_{k\lambda} \exp(\mp \frac{ik\lambda}{\omega_k} \tau)$.

К (9) добавляются начальные условия

$$B_{k\lambda}\Big|_{\tau=0} = \chi_{k\lambda} , \tag{10}$$

где $\chi_{k\lambda}$ выражаются через $\varphi_{k\lambda}$ и $\psi_{k\lambda}$. Тогда для $B_{k\lambda}$ получается задача Коши (9), (10).

Для выяснения вопроса о существовании и единственности решения задачи (9), (10) введем банахово пространство $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$ с нормой: $\|W_{k\lambda}\| = \sup\limits_{k,\lambda} (1+|k|^{\tau})(1+|\lambda|^{p})|W_{k\lambda}| \exp(\sigma(1+|\lambda|))$, где $\sigma \geq 0$, $p,\tau \geq 2$. Справедлива следующая

ЛЕММА I. Пусть $f(u)$ – целая функция, тогда оператор $f(*\overset{\circ}{U})_{k\lambda}$, определенный в (6), действует из $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$ в $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\| f(*U)_{k\lambda} - f(*u)_{k\lambda} \| \leq \mathcal{U} \| U_{k\lambda} - u_{k\lambda} \| ,$$

где $\mathcal{U} = const$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(M,p,\tau,\sigma)$, $\forall u, U : \|u\|, \|U\| \leq M$.

Из леммы I и свойств оператора усреднения следует

ЛЕММА 2. При условии леммы I операторы $\widetilde{\Phi}^{\pm}(*A)_{k\lambda}$ и $\Phi(*B,\tau,k,\lambda)$ действуют из $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$ в $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$ непрерывно и равномерно по τ, удовлетворяют условию Липшица:

$$\| \Phi(*B,\tau,k,\lambda) - \Phi(*\mathcal{D},\tau,k,\lambda) \| \leq \mathcal{U} \| B_{k\lambda} - \mathcal{D}_{k\lambda} \| ,$$

$$\| \widetilde{\Phi}^{\pm}(*A)_{k\lambda} - \widetilde{\Phi}^{\pm}(*\mathcal{D})_{k\lambda} \| \leq \mathcal{U} \| A_{k\lambda} - \mathcal{D}_{k\lambda} \| .$$

ЛЕММА 3. Если $\varphi(x,\xi)$ и $\psi(x,\xi)$ таковы, что их коэффициенты Фурье $\{\varphi_{k\lambda}, \psi_{k\lambda}\} \subset \mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$, $f(u)$ – целая функция, тогда при $\tau \in [0,\tau_0)$, где $\tau_0 = \frac{1}{\mathcal{U}}$ решение задачи Коши (9), (10) существует и единственно в $\mathfrak{M}_{\sigma,p,\tau}$.

Доказательство вытекает из теоремы о существовании решения задачи Коши в банаховом пространстве [4] стр.397 и леммы 2.

Полученные результаты решают вопрос о построении главного члена а.р. в виде (2).

3. Обоснование асимптотики. Пусть $u = \overset{\circ}{u}(x,\xi,t,\tau) + z(x,\xi,t,\varepsilon)$, тогда задача Коши для остатка z выглядит следующим образом

$$\begin{gathered} z_{tt} - z_{xx} + bz = \varepsilon P(\overset{\circ}{u}) + \varepsilon h(\overset{\circ}{u}, z) z + 2\varepsilon z_{x\xi} + \varepsilon^2 z_{\xi\xi} - \\ - \varepsilon^2 \overset{\circ}{u}_{\tau\tau} + \varepsilon^2 \overset{\circ}{u}_{\xi\xi} , \\ z\Big|_{t=0} = 0 , \qquad \partial_t z\Big|_{t=0} = \varepsilon \overset{1}{\psi} , \end{gathered} \tag{11}$$

где $h(\overset{\circ}{u},z)z = f(\overset{\circ}{u}+z) - f(\overset{\circ}{u})$, $\quad h(\overset{\circ}{u},z)$ – целая функция по $\overset{\circ}{u}$, z.

$$P(\overset{\circ}{u}) = f(\overset{\circ}{u}) - \sum_{(\pm)} \sum_{k,\lambda=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Phi}^{\pm}(*A)_{k\lambda}\, exp(i(kx+\lambda\xi)),$$

$$\overset{1}{\psi} = -\partial_\tau \overset{\circ}{u}(x,\xi,0,0). \tag{I2}$$

Обоснование асимптотики, изложенное ниже, содержит доказательство существования решения задачи (II) и равномерную по ε и $t \leqslant O(\varepsilon^{-1})$ оценку величины остатка z.

Перейдем от задачи (II) к задаче Коши для соответствующей системы уравнений. Введем обозначения

$$g_1 = \partial_t z - \partial_x z, \qquad g_2 = \partial_t z + \partial_x z, \qquad g_3 = z, \qquad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда задача Коши для системы уравнений первого порядка примет вид

$$(\partial_t - A\partial_x)G = \varepsilon P(\overset{\circ}{u})C + \varepsilon \mathcal{H}(\overset{\circ}{u},g_3)G + BG - \varepsilon^2(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2)\overset{\circ}{u}C,$$

$$G(x,\xi,t,\varepsilon)\Big|_{t=0} = \varepsilon G_0, \tag{I3}$$

где A, B и C матрицы и вектор с постоянными коэффициентами, $\mathcal{H}(\overset{\circ}{u},g_3)$ – матрица с коэффициентами, зависящими от $h(\overset{\circ}{u},g_3)$. Представим G в виде ряда Фурье с коэффициентами $\hat{G}(k,\lambda,t,\varepsilon)$, $\{k,\lambda\}\subset\mathbb{Z}$. Система уравнений для $\hat{G}$ примет вид:

$$\partial_t \hat{G} - (Aik+B)\hat{G} = \varepsilon P(*\overset{\circ}{U})C + \varepsilon\mathcal{H}(*\overset{\circ}{U},*\hat{g}_3)*\hat{G} +$$

$$+\varepsilon i\lambda A\hat{G} - \varepsilon^2(\lambda^2 + \partial_\tau^2)\overset{\circ}{U}C. \tag{I4}$$

Сделаем замену $\hat{G}(k,\lambda,t,\varepsilon) = R(k,t)\,Y(k,\lambda,t,\varepsilon)$, где матрица $R(k,t) = [R_j(k)\,exp(i\omega_j(k)t)]$, $j = 1,2,3$ представляет собой фундаментальную систему решений однородных уравнений (I4). Тогда после интегрирования получается система уравнений для Y :

$$Y(k,\lambda,t,\varepsilon)=\varepsilon R^{-1}\hat{G}_0+\varepsilon\int_0^t P(*\overset{\circ}{U})R^{-1}C\,d\zeta+\varepsilon\int_0^t (R^{-1}(\mathcal{H}*$$

$$*(RY))+i\lambda R^{-1}ARY-\varepsilon(\lambda^2+\partial_\tau^2)\overset{\circ}{U}R^{-1}C)\,d\zeta,\quad Y\in\mathbb{C}^3. \qquad (15)$$

Для анализа разрешимости системы (I5) введем аналогично [2,5] банахово пространство $\mathcal{M}_{\sigma(t),p,\imath}$ с нормой, зависящей от времени:

$$\|Y(k,\lambda,t,\varepsilon)\|=\sup_{k,\lambda}(1+|k|^{\imath})(1+|\lambda|^{p})|Y(k,\lambda,t,\varepsilon)|\exp(\sigma(1-\theta\varepsilon t)(1+|\lambda|)).$$

Наличие множителя ε перед интегралами обеспечивает разрешимость (I5) для $t\leqslant O(\varepsilon)$. Однако, требуется доказать, что остаток Y мал и хотя бы $Y=o(1)$ при $\varepsilon\to 0$. При этом основная трудность состоит в оценке первого интеграла (от известных функций):

$$\mathcal{J}=\varepsilon\int_0^t P(*\overset{\circ}{U})(k,\lambda,\zeta,\varepsilon\zeta)R^{-1}(k,\zeta)C\,d\zeta. \qquad (16)$$

Функция $P(*\overset{\circ}{U})(k,\lambda,t,\varepsilon t)$ – почти периодическая по t получается после применения оператора P к $\overset{\circ}{U}$. Подынтегральные выражения первой и второй компонент вектора $P(*\overset{\circ}{U})R^{-1}C$ можно разложить в ряд по экспонентам $exp(i(\nu_n(k)-\omega_j(k))t),\ j=1,2$ причем $|\nu_n(k)|\neq|\omega_j(k)|,\ j=1,2$, т.к. резонансные члены выделены при а.р., а третья компонента вектора $R^{-1}C$ равна нулю. Если $f(\overset{\circ}{u})$ – полином, $\overset{\circ}{u}$ – тригонометрический полином по x, тогда разность $|\nu_n(k)-\omega_j(k)|\geqslant\mathcal{D}>0,\ j=1,2$ для $\forall n,k$.
Однако, в общем случае число частот $\nu_n(k)$ неограничено, и в случае трансцендентного b, нельзя гарантировать оценку:

$$|\nu_n(k)-\omega_j(k)|\geqslant n^{-\beta},\ \forall\beta>0,\quad j=1,2$$

([3] стр.9I). Тогда при разложении компонент вектора $P(*\overset{\circ}{U})R^{-1}C$ в ряд по $exp(i(\nu_n(k)-\omega_j(k))t),\ j=1,2$ и после его почленного интегрирования появляются малые знаменатели. Значение интеграла не удается оценить путем суммирования такого ряда. Для получения оценки интеграла (I6) приходится вместо функции $f(u)$ и ряда Фурье $\overset{\circ}{u}$ рассматривать отрезки рядов Тейлора и Фурье – соответствующие полиномы степени не выше N, и отдельно остаток $S(N,k,\lambda)$. Пусть $\overline{\overset{\circ}{U}}_{k\lambda}=\overset{\circ}{U}_{k\lambda}$ при $|k|\leqslant N$ и $\overline{\overset{\circ}{U}}_{k\lambda}=0$ при

$|\kappa|>N$. Определив $P_N(*\overset{\circ}{\bar{v}})_{\kappa\lambda}$ аналогично (6), (I2), но уже как полином степени N получим для (I6):

$$\mathcal{J}=\varepsilon\int_0^t P_N(*\overset{\circ}{\bar{v}})R^{-1}C\,d\zeta+\varepsilon\int_0^t S(N,\kappa,\lambda)R^{-1}C\,d\zeta\ .$$

В первом интеграле стоит конечная сумма почти периодических по ζ компонент вектора $P_N(*\overset{\circ}{v})C$. Тогда значение первого интеграла зависит от величин $(\nu_n(\kappa)-\omega_j(\kappa))^{-1}$, $j=1,2$, появляющихся после интегрирования. Причем: для $\forall\varepsilon^{\gamma}$, где $0<\gamma<1$, $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $(|\nu_n(\kappa)-\omega_j(\kappa)|)^{-1}\leqslant\varepsilon^{-\gamma}$ для $\forall n$, $|\kappa|\leqslant N(\varepsilon)$; и $N(\varepsilon)\to\infty$, $S(N,\kappa,\lambda)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Таким образом справедлива оценка $\|\mathcal{J}\|\leqslant\delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по $t\in[0,\tau_0\varepsilon^{-1})$. Примем $Y(\kappa,\lambda,t,\varepsilon)=\delta(\varepsilon)W(\kappa,\lambda,t,\varepsilon)$, тогда система интегральных уравнений для $W(\kappa,\lambda,t,\varepsilon)$ приобретает вид:

$$W(\kappa,\lambda,t,\varepsilon)=\varepsilon\delta^{-1}R^{-1}\hat{G}_0+\delta^{-1}\mathcal{J}+\varepsilon\int_0^t(R^{-1}(\mathcal{H}*(RW))+$$
$$+i\lambda R^{-1}ARW-\varepsilon\delta^{-1}(\lambda^2+\partial_\tau^2)\overset{\circ}{v}R^{-1}C)\,d\zeta\ . \qquad (I7)$$

Пусть в определении нормы в $\mathfrak{M}_{\sigma(t),p,\imath}$ выполняется неравенство $(\sigma\theta)^{-1}<1$, тогда в силу лемм I–3 и аналогично [2] получается, что оператор правой части (I7) $Q(W,\overset{\circ}{v},\kappa,\lambda,t,\varepsilon)$ является липшицевым в $\mathfrak{M}_{\sigma(t),p,\imath}$ равномерно по t и ε . Причем решение системы (I7) существует и единственно в $\mathfrak{M}_{\sigma(t),p,\imath}$ при $t\in[0,T\varepsilon^{-1})$ с некоторым значением $T\leqslant\min\{\tau_0,\theta^{-1}\}$. Следовательно, решение задачи (II) существует и $|z|\leqslant M\delta(\varepsilon)$, где $M=const$. Таким образом получена

ТЕОРЕМА. Пусть $f(u)$ – целая функция, $u|_{t=0}=\varphi(x,\xi)$, $u_t|_{t=0}=\psi(x,\xi)$ – 2π -периодические по x и ξ , коэффициенты $\varphi_{\kappa\lambda}$ и $\psi_{\kappa\lambda}$ рядов Фурье которых удовлетворяют для некоторого $\sigma>0$ условию: $\sup\limits_{\kappa,\lambda}(1+|\kappa|^2)(1+|\lambda|^2)|\varphi_{\kappa\lambda}|\exp(\sigma(1+|\lambda|))\leqslant const$. Тогда $\exists T$, $\varepsilon_0>0$, такие, что при $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ существует точное решение задачи (I) в слое $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-1}$ и для решения справедлива асимптотика $u(x,\xi,t,\tau,\varepsilon)=\overset{\circ}{u}(x,\xi,t,\tau)+o(1)$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по $x\in\mathbb{R}^1$, $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-1}$ ($\xi=\varepsilon x$, $\tau=\varepsilon t$).

Уточним результаты для некоторых частных случаев: I) Пусть b – трансцендентное число, тогда система уравнений для амплитуд $A^{\pm}_{\kappa\lambda}$ распадается на пары уравнений, которые после перехода к переменным модуль-фаза интегрируются. 2) Если b – рациональное, то система уравнений для $A^{\pm}_{\kappa\lambda}$ не распадается, но можно улучшить оценку остатка $|z| \leqslant O(\varepsilon)$. 3) Если b – алгебраическое, то система уравнений для $A^{\pm}_{k\lambda}$ распадается; в случае гладких φ, ψ – оценка $|z| \leqslant O(\varepsilon)$.

Литература

1. Н а й ф э А. Методы возмущений. М., 1976.
2. В а к у л е н к о С.А. Обоснование асимптотической формулы для решений возмущенного уравнения Клейна-Фока-Гордона. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн 11.Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1981, т.104, с.84-92.
3. Ш и д л о в с к и й А.Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М., МГУ, 1982.
4. Т р е н о г и н В.А. Функциональный анализ. М., 1980.
5. О в с я н н и к о в Л.В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985.