

ется вверх, разворачивая векторы намагниченности в сторону, противоположную исходной полярности доменной границы. В результате у поверхности $z = L_2/2$ создается напряженное состояние — вектор намагниченности на малом участке разворачивается на угол $\sim 2\pi$. Обычно в литературе структуры называют горизонтальными блоховскими линиями (ГБЛ). В дальнейшем вектор намагниченности у поверхности $z = L_2/2$ "мгновенно" проворачивается на угол $\sim 2\pi$ ("прорыв"), и сразу же образуется волна возмущения угла скрученности, продвигающаяся вниз.

На рис. 3 показаны распределения компонент $v_x(x, z)$ и $v_z(x, z)$, характерные для движения ГБЛ вверх и вниз. Сравнивая эти рисунки, можно видеть, что структура доменной границы по оси X испытывает значительные искажения. Важной особенностью, проявившейся при счете с различными параметрами Q и L_2 , является излучение спиновых волн из области локализации ГБЛ (см. рис. 3). Средняя скорость доменной границы за несколько циклов прохождения ГБЛ от одной поверхности до другой составила 0,41 (условных единиц длины l , деленных на единицу безразмерного времени t). Отметим, что предельная скорость Уокера [5] для данных параметров пленки составила 0,785. Движение ГБЛ от поверхности к поверхности происходит за время $\Delta t \approx 1,43$, "прорыв" — за $\Delta t \approx 0,01$.

Таким образом, непосредственное численное интегрирование уравнения Ландау—Лифшица с учетом размагничивающего поля свидетельствует о периодическом характере внутренних процессов в доменной границе. При этом скрученность в центре изменяется по модели "прорыв ГБЛ" и структура доменной границы испытывает колебания в направлении движения.

Авторы благодарят М.Л. Корчагину за системную поддержку вычислительных работ.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
21 IV 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. думка, 1983.
2. Visintin A. — Jap. J. Appl. Math., 1985, vol. 2, p. 69–84.
3. Маслов В.П., Четвериков В.М. — ТМФ, 1988, т. 77, с. 253–265.
4. Барьяхтар В.Г., Богданов А.Н., Яблонский Д.А. — УФН, 1988, т. 156, вып. 1, с. 47–92.
5. Малоземов А., Слонзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982.
6. Осипов С.Г. — Вестн. МГУ. Вычисл. математика и кибернетика, 1983, № 4, с. 33–37.

УДК 517.946:535.42

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© Ю.А. ТУЧКИН, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Задача дифракции плоской волны на волнистой периодической поверхности, решением которой занимался еще Рэлей [1], до сих пор не получила удовлетворительного решения [2, 3]. В данном сообщении предлагается обобщение процедуры регуляризации [4, 5] для волнистой периодической поверхности с граничным условием Дирихле. Исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в l_2 вида $(I + R)x = b$

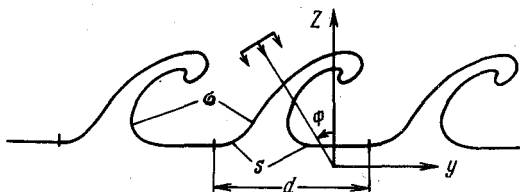


Рис. 1

с вполне непрерывным оператором R . Эта система допускает эффективное по сравнению с известными методами [2, 3, 14, 15] численное решение.

1. На рис. 1. приведено сечение волнистой поверхности плоскостью, перпендикулярной ее образующей. Изображенный в сечении периодический контур (профиль) σ будем считать принадлежащим классу C^∞ . Предположим, что рассматриваемая волнистая поверхность облучается сверху плоской волной

$$u^0(y, z) = \exp \{ (2\pi i/d) \kappa [y \sin \varphi - z \cos \varphi] \},$$

распространяющейся в плоскости рис. 1, где $\kappa = d/\lambda$, d — период периодической структуры, λ — длина волны, φ — угол падения, отсчитываемый против часовой стрелки от оси OZ , опущенная зависимость от времени t взята в виде $\exp(-i\omega t)$.

Хорошо известная [6, 7, 9] постановка задачи состоит в необходимости определения рассеянного квазипериодического по y поля $u^s(y, z) = e^{2\pi i \kappa \alpha} u^s(y-d, z)$, где $\alpha = \sin \varphi$. Можно показать [6–10], что каждое решение рассматриваемой задачи, если оно существует, сводится к интегральному уравнению

$$(1) \quad \int_S M(y, z) G \left[\frac{2\pi}{d} (y_0 - y), \frac{2\pi}{d} (z_0 - z) \right] ds = u^0(y_0, z_0), \quad (y_0, z_0) \in S,$$

относительно некоторой неизвестной функции $M(y)$, $p \in S$, где S — произвольно выбранный и фиксированный контур, совпадающий с одним периодом контура σ , причем $M(y, z)$ продолжается с S непрерывно на σ как квазипериодическая по y функция, $G(y, z)$ — каноническая функция Грина (фундаментальное решение) вида [6, 7, 9, 10]

$$(2) \quad G(y, z) = -\frac{i}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n^{-1} e^{iy\varphi_n + iz|\Gamma_n},$$

$$\varphi_n = n + \kappa\alpha, \quad \Gamma_n = (\kappa^2 - \varphi_n^2)^{1/2},$$

и выбор ветви корня в Γ_n осуществляется стандартным образом [7, 10].

2. Пусть заданы непрерывные функции $y(\vartheta)$, $z(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, параметризующие S т.е. устанавливающие непрерывное взаимно однозначное соответствие между S и $[-\pi, \pi]$. Продолжив $y(\vartheta)$, $z(\vartheta)$ на $(-\infty, \infty)$, по формулам $z(\vartheta + 2\pi n) = z(\vartheta)$, $y(\vartheta + 2\pi n) = y(\vartheta) + nd$, где $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, получим параметризацию всего контура σ . Дополнительно предположим (см. выше), что так продолженные $y(\vartheta)$, $z(\vartheta) \in C^\infty(-\infty, \infty)$, причем

$$(3) \quad I(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \{ [y'(\vartheta)]^2 + [z'(\vartheta)]^2 \}^{1/2} \geq l_0 > 0, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi],$$

где l_0 — некоторая константа. Условие (3) обеспечивает взаимную однозначность параметризации контура σ функциями $y(\vartheta)$, $z(\vartheta)$, с помощью которой перепишем (1) в виде интегрального уравнения относительно функции $\mu(\tau)$

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\tau) K(\vartheta, \tau) d\tau = F(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi, \pi],$$

где

$$(5) \quad \mu(\tau) = e^{-i\gamma\tau} l(\tau) M[y(\tau), z(\tau)]; \quad F(\vartheta) = e^{-i\gamma\vartheta} u^0[y(\vartheta), z(\vartheta)];$$

$$K(\vartheta, \tau) = e^{-i\gamma(\vartheta - \tau)} G \left[\frac{2\pi}{d} (y(\vartheta) - y(\tau)), \frac{2\pi}{d} (z(\vartheta) - z(\tau)) \right],$$

$\gamma = \kappa\alpha - \lfloor \kappa\alpha \rfloor$, причем функция $\lfloor x \rfloor$ — ближайшее целое к вещественному x . Поскольку функции M, u^0, G в (1) квазипериодичны по y , то функции $\mu(\tau), F(\vartheta), K(\vartheta, \tau)$ 2π -периодичны по ϑ и τ (для чего в (5) и вводились экспоненциальные множители).

3. В случае наклонного падения ($\varphi \neq 0$) свойства ядра (5) $K(\vartheta, \tau)$ существенно отличаются от свойств соответствующих ядер, рассмотренных в [4, 5]. Соответственно следует модифицировать подход [4, 5]. Для этого определим сначала "проинтегрированную логарифмическую особенность" — функцию

$$(6) \quad \rho(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \sin n\varphi = \frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{|n|} \rho_n e^{in\varphi},$$

$$\rho_n = \frac{1}{|n|(|n|+1)} + \frac{1}{|n|(|n|+1)(|n|+2)} + \\ + \frac{2}{|n|(|n|+1)(|n|+2)(|n|+3)},$$

где штрих над знаком суммы здесь и ниже означает, что пропущено нулевое слагаемое. Отметим, что $\rho_n = n^{-2} + O(n^{-5})$ и $\rho(\varphi)$ выражается в элементарных функциях (в отличие от суммы ряда из $n^{-2} \sin n\varphi$, равной интегралу Клаузена). Теперь определим функцию

$$(7) \quad H(\vartheta, \tau) = K(\vartheta, \tau) - (2\pi)^{-1} [\ln |2\sin((\vartheta - \tau)/2)| + i\gamma\rho(\vartheta - \tau)].$$

Можно показать, что 2π -периодическая функция $H(\vartheta, \tau)$ непрерывна вместе со своими первыми частными производными при $\vartheta, \tau \in (-\infty, \infty)$, ее вторые производные имеют лишь особенность, пропорциональную $\ln |2\sin((\vartheta - \tau)/2)|$, поэтому они лежат в $L_2([-\pi, \pi] [-\pi, \pi])$. В связи с этим функция $H(\vartheta, \tau)$ заведомо разлагается в двойной ряд Фурье:

$$(8) \quad H(\vartheta, \tau) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} h_{pq} e^{i(p\vartheta + q\tau)}, \quad \vartheta, \tau \in [-\pi, \pi].$$

Вследствие (6) $\rho(\vartheta - \tau)$ также разлагается в ряд Фурье и

$$(9) \quad \ln \left| 2\sin \frac{\vartheta - \tau}{2} \right| = -\frac{1}{2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{-1} e^{in(\vartheta - \tau)}, \quad \vartheta, \tau \in [-\pi, \pi] \quad [4, 11].$$

Будем разыскивать $\mu(\tau)$ в виде ряда Фурье:

$$(10) \quad \mu(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{in\tau}.$$

Подставляя (6)–(10) в (4) и пользуясь ортогональностью системы $\{e^{in\vartheta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ на $[-\pi, \pi]$, получаем сумматорное уравнение

$$(11) \quad \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n |n|^{-1} [1 - \gamma n \rho_n] e^{in\vartheta} - 4\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu_p h_{n,-p} = \\ = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi],$$

где $\{F_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $F(\vartheta)$.

4. Из (6) и определения γ следует, что $1 - \gamma n \rho_n > 0$. Поэтому определим величины

$$(12) \quad \eta_0 = 1; \quad \eta_n = \{|n|/(1 - \gamma n \rho_n)\}^{1/2}, \quad n \neq 0,$$

и вектор-столбцы z и f неизвестных и правых частей, и матричный оператор R по формулам

$$(13) \quad z = \{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad z_n = \mu_n \eta_n^{-1}; \quad f = \{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad f_n = -2F_n \eta_n; \\ R = \{r_{pq}\}_{p,q=-\infty}^{\infty}, \quad r_{pq} = -4\pi \eta_p \eta_q h_{p,-q} - \delta_{pq} \delta_{q0},$$

где δ_{sn} – символ Кронекера. Переходя в (11) к равенству коэффициентов Фурье, получаем с помощью (13) бесконечную алгебраическую систему уравнений вида

$$(14) \quad (I + R)z = f, \quad z, f \in l_2$$

относительно неизвестного вектор-столбца z .

Из описанных выше дифференциальных свойств функции $H(\vartheta, \tau)$ следует, что оператор R вполне непрерывен в l_2 и, более того,

$$(15) \quad \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} (1 + |p|)(1 + |q|) |r_{pq}|^2 < \infty,$$

причем оценка (15) допускает существенное усиление. Отметим, что если k не лежит на (комплексном дискретном) спектре, связанном с исходной краевой задачей, то уравнение (15) эквивалентно исходной краевой задаче, разрешимо в l_2 и при том единственным образом.

5. Важным моментом развитого нами алгоритма, существенно более эффективным, в сравнении с [12, 13], является способ вычисления функции G , заданной медленно сходящимся при малых $|z|$ рядом (2). Определим функции

$$(16) \quad E_m(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m (n+k-1)^{-1} e^{iny - n|z|},$$

которые при небольших $m \geq 1$ достаточно просто выражаются через элементарные функции. Легко видеть, что для $G(y, z)$ при любом целом фиксированном $N > 0$ можно построить разложение

$$(17) \quad G(y, z) = \sum_{m=1}^N [a_m E_m(y, z) + b_m E_m(-y, z)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n^N(y, z),$$

где a_m, b_m – некоторые, зависящие от α, k коэффициенты, причем "остаточные функции" $r_n^N(y, z) = O(n^{-N-1})$ равномерно по $(y, z) \in S$. Теперь, выбрав достаточно большое N , для вычисления $G(y, z)$ остается просуммировать быстро сходящийся ряд из $r_n^N(y, z)$. Нами получено разложение вида (17) для $N = 3$. Отметим, что разложение (17) можно использовать лишь при малых $|z|$ (мы рекомендуем $|z| \leq 1$), в противном случае следует непосредственно суммировать экспоненциально сходящийся ряд (2).

Как отмечалось выше, вторые частные производные функции $H(\vartheta, \tau)$ имеют логарифмические особенности. Поэтому для $H(\vartheta, \tau)$ мы получили разложение, в идейном плане близкое к (17), вследствие чего оказалось достаточно вычислять коэффициенты Фурье не самой функции $H(\vartheta, \tau)$, а другой, существенно более гладкой функции. Ее коэффициенты Фурье вычислялись нами с помощью (быстро) дискретного преобразования Фурье.

6. Отметим, что алгоритмы [2, 14, 15] в принципе не пригодны для поверхностей, изображенных на рис. 1: в случае, когда существует прямая, параллельная оси OZ и касающаяся или более одного раза пересекающая рассматриваемую поверхность. Сравнительный анализ эффективности различных методов проводится в работе [2], авторы которой считают свой метод строгим, хотя и не приводят доказательств сходимости решений усеченных систем к решению построенной ими бесконечной системы первого рода.

Проведенные численные эксперименты показали, что предлагаемый нами алгоритм весьма эффективен в широком диапазоне изменения параметров φ , κ , формы волнистой поверхности. Сравнение с численными результатами, приведенными в [2] для довольно узкого диапазона изменения параметров (синусоидальная поверхность при $\varphi = 0$ и $\kappa = 1 - 4$), показало, что построенный нами алгоритм при $\varphi = 0$ не менее чем в 20 раз быстрее "метода интегрального уравнения" [2] при совпадении результатов и лучшем выполнении условия баланса энергии. Для наклонного падения ($\varphi \neq 0$) мы ожидаем существенно больших преимуществ.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
19 IV 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955.
2. Вайнштейн Л.А., Суков А.И. — РЭ, 1984, № 8, с. 1472–1478.
3. Бадюков В.Ф. — РЭ, 1987, № 9, с. 1853–1861.
4. Тучкин Ю.А. — ДАН, 1985, т. 285, № 6, с. 1370–1373.
5. Тучкин Ю.А., Шестопапов В.П. — Там же, № 5, с. 1107–1109.
6. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения волн. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971.
7. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во ХГУ, 1973. 288 с.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 310 с.
9. Хёнл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
10. Сиренко Ю.К., Шестопапов В.П., Яцик В.В. Препринт Ин-та радиофизики и электроники АН УССР, № 266. Харьков, 1985. 34 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
12. Галишишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.
13. Панасюк В.В., Саарук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.
14. Баранцев Р.Г. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон., 1965, N 1, с. 66–76.
15. Masel R.I., Merril R.P., Miller W.H. — Phys. Rev. B, 1975, vol. 12, N 12, p. 5545–5551.