Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ф. Шаров, Прямоугольник из квадратов,
Квант, 2019, номер 3, 10–14

https://www.mathnet.ru/kvant822

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
17 января 2026 г., 04:38:11

Прямоугольник из квадратов

Ф.ШАРОВ

С ДАВНИХ ВРЕМЕН ЛЮДИ ЗАНИМАЛИСЬ задачами на разрезания. Можно ли разрезать определенную фигуру на какие-то другие (например, на квадраты)? Можно ли из некоторого набора фигур составить другую заданную фигуру (например, правильный треугольник)? В этой статье мы докажем один из классических результатов в этой области математики – теорему Дена.

Теорема 1 (М.Ден, 1903). *Если прямоугольник разрезан на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.*

Читатель, конечно, без труда сможет догадаться, как разрезать прямоугольник с рациональным отношением длин сторон на квадраты (рис.1). Содержательным

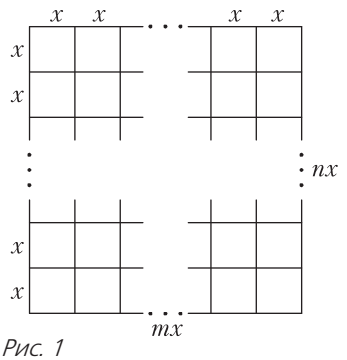

Рис. 1

является лишь вопрос невозможности разрезаний в остальных случаях.

Например, у прямоугольника вида $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$, где a, b, c, d рациональны, длины сторон и их отношения уже могут быть иррациональны. На этом простейшем частном случае уже можно продемонстрировать все основные идеи, лежащие в основе доказательства теоремы 1. В дальнейшем для удобства латинские буквы a, b, c, d и эти же буквы с индексами будут означать *рациональные* числа, а все числа вида $a+b\sqrt{2}$ будем называть *хорошими*.

Теорема Дена для хороших чисел

Сначала докажем теорему для частного случая, когда стороны разрезаемого прямоугольника и стороны всех квадратов являются хорошими числами.

Прежде всего рассмотрим пример: прямоугольник $1\times\sqrt{2}$. Решим следующую задачу.

Задача 1. Можно ли прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезать на квадраты с рациональными сторонами? А со сторонами, которые либо рациональны, либо имеют вид $b\sqrt{2}$? А со сторонами, которые являются произвольными хорошими числами?

Решение.[1] *Ответ* на первые два вопроса: нет. Решение для третьего вопроса приведено в конце журнала.

Ответим на первый вопрос. Предположим, что прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезан на квадраты с рациональными сторонами. Рассмотрим сторону, равную $\sqrt{2}$. Сумма примыкающих к ней сторон квадратов должна равняться $\sqrt{2}$. Сумма рациональных чисел не может быть равна иррациональному, следовательно, такое разрезание невозможно.

Ответим на второй вопрос. Предположим, что прямоугольник $1\times\sqrt{2}$ разрезан на квадраты со сторонами вида a или $b\sqrt{2}$. Его площадь равна $\sqrt{2}$. Площади квадратов имеют вид либо a^2, либо $2b^2$.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190302

[1] Решение задачи 1, а также приведенное ниже доказательство невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ на квадраты и решение задачи 3 (приведенное в конце журнала) написаны Е.Алиевой.

Площадь прямоугольника равна сумме площадей квадратов. Получаем противоречие, так как иррациональное число не может быть равно сумме рациональных. Здесь мы опирались на *аддитивность* площади: площадь целого равна сумме площадей частей.

Покажем теперь, что прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами. Для этого нам понадобится определение сопряженного числа.

Определение 1. Число $\overline{s}=a-b\sqrt{2}$ называется *сопряженным* к числу $s=a+$ $+b\sqrt{2}$.

Задача 2. Докажите, что сопряженное к сумме хороших чисел равно сумме сопряженных, а сопряженное к произведению – произведению сопряженных.

Итак, предположим, что прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ разрезан на n квадратов со сторонами $a_1+b_1\sqrt{2}$, $a_2+b_2\sqrt{2}$, …, a_n+ $+b_n\sqrt{2}$. Площадь данного прямоугольника равна сумме площадей рассматриваемых n квадратов, т.е.

$$1+\sqrt{2}=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)^2+$$
$$+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Найдем сопряженные к обеим частям полученного равенства. Сопряженным к числу $1+\sqrt{2}$ является число $1-\sqrt{2}$. По утверждению задачи 2 получаем, что сопряженным к числу

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)^2+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)^2$$

является число

$$\left(a_1-b_1\sqrt{2}\right)^2+\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Получаем, что

$$1-\sqrt{2}=\left(a_1-b_1\sqrt{2}\right)^2+$$
$$+\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Число $1-\sqrt{2}$ – отрицательное, а правая часть тождества – сумма неотрицательных. Получаем противоречие. Значит, прямоугольник $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами.

Заметим, что, например, сопряженное к числу $2+\sqrt{2}$ положительно. Поэтому только что использованный метод доказательства невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(1+\sqrt{2}\right)$ неприменим для доказательства невозможности разрезания прямоугольника $1\times\left(2+\sqrt{2}\right)$, а его, согласно теореме Дена, тоже нельзя разрезать на квадраты с хорошими сторонами. Обойти это препятствие можно при помощи следующего обобщения понятия площади.

Определение 2. Пусть x – некоторое действительное число. Назовем *x-площадью* прямоугольника $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$ число $(a+bx)(c+dx)$.

Например, $\sqrt{2}$-площадь – это обычная площадь такого прямоугольника, а $\left(-\sqrt{2}\right)$-площадь – сопряженное к ней число.

Задача 3. Найдите все прямоугольники вида $\left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$, x-площади которых неотрицательны при всех x.

Лемма 1 (аддитивность x-площади). *Если прямоугольник разрезан на конечное число прямоугольников, стороны которых – хорошие числа, то для любого действительного числа x x-площадь разрезаемого прямоугольника равна сумме x-площадей прямоугольников, на которые он разрезан.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что сумма x-площадей двух прямоугольников со сторонами вида $a+b\sqrt{2}$, имеющих общую сторону, равна x-площади их объединения.

Действительно, пусть имеется прямоугольник с x-площадью S, который состоит из двух прямоугольников с x-площадями

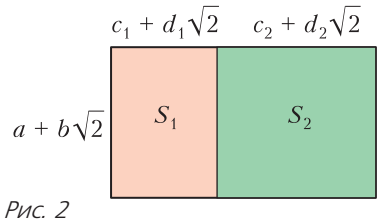

Рис. 2

S_1 и S_2 (рис.2). Тогда

$$S_1 + S_2 = \\ = (a+bx)(c_1+d_1x)+(a+bx)(c_2+d_2x) = \\ = (a+bx)((c_1+c_2)+(d_1+d_2)x) = S .$$

Пусть теперь количество прямоугольников в разрезании больше двух. Продолжим каждый разрез, как показано на рисунке 3. Тогда каждый прямоугольник

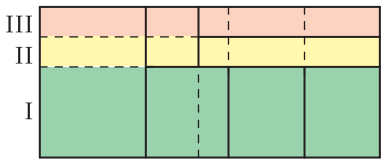

Рис. 3

нового разрезания будет также иметь стороны вида $a+b\sqrt{2}$. Рассмотрим горизонтальные слои из последовательно приложенных друг к другу по общей стороне прямоугольников (I, II, III на рисунке 3). Используя уже доказанное свойство аддитивности x-площади двух прямоугольников с общей стороной, методом математической индукции легко доказывается, что x-площадь любого такого слоя равна сумме x-площадей прямоугольников, составляющих этот слой. Теперь уже эти слои приложим друг к другу и применим только что доказанное утверждение об аддитивности x-площади ряда прямоугольников. Получим, что x-площадь разрезаемого прямоугольника равна сумме x-площадей горизонтальных слоев. Эта сумма равна сумме x-площадей всех прямоугольников нового разрезания. С другой стороны, каждый прямоугольник старого разрезания (так же, как и большой прямоугольник) составлен из прямоугольников нового разрезания, в один или несколько слоев. Таким образом, сумма x-площадей прямоугольников старого разрезания равна x-площади исходного прямоугольника.

Задача 4. Докажите, что отношение двух хороших чисел – хорошее число.

Теорема 2 (частный случай теоремы Дена). *Прямоугольник с хорошими длинами сторон можно разрезать на квадраты с хорошими длинами сторон тогда и только тогда, когда отношение его сторон рационально.*

Доказательство. Предположим, что отношение сторон иррационально, а разрезание существует. Поделим стороны прямоугольника и всех квадратов на меньшую сторону прямоугольника. По задаче 4 все стороны останутся хорошими. В частности, полученный прямоугольник будет иметь вид $1\times\left(c+d\sqrt{2}\right)$. Его x-площадь равна $c + dx$. Так как отношение сторон иррационально, то $d \neq 0$. Значит, x-площадь отрицательна при некотором x. В то же время x-площадь любого квадрата со стороной $a+b\sqrt{2}$ равна $(a+bx)^2$, что неотрицательно для любого x. Получили противоречие с леммой 1: сумма неотрицательных чисел не может равняться отрицательному.

Задача 5. Пусть z – произвольное иррациональное число. Можно ли прямоугольник $1\times z$ разрезать на квадраты со сторонами вида $a + bz$?

Подсказка: попробуйте модифицировать понятие x-площади так, чтобы оно стало определено для прямоугольника и квадратов, рассматриваемых в задаче.

Доказательство теоремы Дена в общем случае

Для доказательства теоремы Дена в общем случае определение x-площади нам уже не годится: ведь она определена только для хороших чисел, а теперь у нас в разрезании могут присутствовать квадраты с какими угодно сторонами (например, $\sqrt{3}$, π, $\sqrt[3]{2}$ и так далее).

Далее в этом разделе мы считаем, что прямоугольник $s_0\times t_0$ разрезан на прямоугольники $s_1\times t_1$, $s_2\times t_2$, …, $s_N\times t_N$, причем s_0 и t_0 несоизмеримы, т.е. их отношение иррационально.

Лемма 2. *Обозначим*

$$P = \{s_0, t_0, s_1, t_1, \ldots, s_N, t_N\}.$$

Тогда можно выбрать такие числа $e_1, e_2, \ldots, e_n \in P$, *чтобы любое число* $p \in P$ *единственным образом представлялось в виде*

$$p = as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n .$$

Например, для разрезания на рисунке 4, где $s_0 = 1$ и $t_0 = 2 + \sqrt{2}$, необходимо выбрать лишь одно число (либо $e_1 = \sqrt{3}$, либо $e_1 = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$).

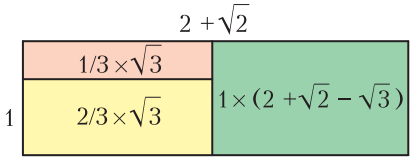

Рис. 4

Доказательство. Выпишем в строку длины сторон прямоугольников разрезания, начиная с s_0 и t_0. Так, для разрезания на рисунке 4 получится такая строка:

$$s_0 = 1,\ t_0 = 2 + \sqrt{2},\ s_1 = 1/3,\ t_1 = \sqrt{3},$$

$$s_2 = 2/3,\ t_2 = \sqrt{3},\ s_3 = 1,\ t_3 = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Теперь[2] подчеркнем в этом списке те числа, которые не представляются в виде суммы предыдущих с рациональными коэффициентами (сейчас поясним, что это значит). Например, s_0 мы подчеркнем (предыдущих чисел вовсе нет). Число t_0 мы тоже подчеркнем, так как оно несоизмеримо с s_0 и, следовательно, не представимо в виде $a_0 s_0$. Далее, если s_1 представляется в виде $a_0 s_0 + b_0 t_0$, то s_1 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. Аналогично, если t_1 представляется в виде $a_0 s_0 + b_0 t_0 + a_1 s_1$, то t_1 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. И так далее. В нашем случае получится такое:

$$\underline{1},\ \underline{2+\sqrt{2}},\ 1/3,\ \underline{\sqrt{3}},\ 2/3,\ \sqrt{3},\ 1,\ 2+\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Докажем теперь, что всякое число из этого списка единственным образом представляется как сумма подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами. Ясно, что неподчеркнутое число представляется нужным образом через подчеркнутые. Подчеркнутое тоже представляется: оно равно само себе. Если же такое представление не единственно, то, вычитая одно представление из другого, мы видим, что сумма неких подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами равна 0. Но это позволяет выразить, опять-таки в виде суммы с рациональными коэффициентами, одно из подчеркнутых чисел через предыдущие подчеркнутые числа, а значит, мы зря его подчеркнули.

Все подчеркнутые числа, начиная с третьего, и будут искомым набором $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Зафиксируем набор чисел $s_0, t_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$ из леммы 2. Он называется *базисом*.

Определение 3. Пусть y – некоторое действительное число. Назовем *y-площадью* прямоугольника со сторонами

$$as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$$

$$\text{и}\ \ cs_0 + dt_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$$

число $(a + by)(c + dy)$.

Например, y-площадь разрезаемого прямоугольника $s_0 \times t_0$ равна y.

Обратите внимание, что это определение не эквивалентно определению x-площади выше! Скажем, для прямоугольника на рисунке 4 x-площадь равна $2 + x$, а y-площадь равна y. Если подставить в качестве x и y одинаковые числа, то могут получиться разные результаты.

Лемма 3. *Любой квадрат в разрезании прямоугольника $s_0 \times t_0$ имеет неотрицательную y-площадь.*

Доказательство. Сторона любого квадрата в разрезании прямоугольника $s_0 \times t_0$ записывается в виде $as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Тогда его y-площадь равна $(a + by)^2$, что неотрицательно при любом действительном y.

Лемма 4. *Для любого y y-площадь разрезаемого прямоугольника $s_0 \times t_0$ равна сумме y-площадей прямоугольников, на которые он разрезан.*

Доказательство леммы 4 дословно повторяет доказательство леммы 1 с той лишь разницей, что нужно заменить в нем x-площадь на y-площадь, а также заменить все числа вида $a + b\sqrt{2}$ на соответствующие числа вида $as_0 + bt_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$ (в том числе и на рисунке 2).

[2] Дальнейший текст доказательства леммы 2 с незначительными изменениями заимствован из статьи Д.Фукса «Можно ли из тетраэдра сделать куб?» [4].

Доказательство теоремы 1. Пусть прямоугольник $s_0 \times t_0$ разрезан на квадраты, причем s_0 и t_0 несоизмеримы. По определению его y-площадь равна y. Это число отрицательно при $y < 0$. В то же время y-площадь любого квадрата неотрицательна по лемме 3. Получили противоречие с леммой 4: сумма неотрицательных чисел не может равняться отрицательному.

В заключение отметим, что y-площадь – это не просто олимпиадный трюк. В математике есть важное понятие *меры*. Мерами являются, например длина отрезков на прямой; площадь (обыкновенная, а не y-площадь) фигур на плоскости; объем тел в пространстве. Из двух основных свойств меры – аддитивности и неотрицательности – наша y-площадь обладает только первым.

Если свойство неотрицательности не требуется, вместо слова «мера» используется термин «заряд». Вот примером заряда и является y-площадь.

Литература

1. *М.Скопенков, О.Малиновская, С.Дориченко, Ф.Шаров*. Собери квадрат. В сборнике: Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки — к профессии. – М.: МЦНМО, 2018.
2. *М.Скопенков, О.Малиновская, С.Дориченко*. Собери квадрат. – «Квант», 2015, №2.
3. *М.Скопенков, М.Прасолов, С.Дориченко*. Разрезания металлического прямоугольника. – «Квант», 2011, №3.
4. *Д.Фукс*. Можно ли из тетраэдра сделать куб? – «Квант», 1990, №11.
5. *Ф.Шаров*. Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 20 (2016), с.200–216.
6. *И.М.Яглом*. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968.

Вниманию наших читателей!

В предыдущем номере журнала в статье «Объять необъятное …» было допущено несколько опечаток. Необходимо сделать следующие исправления.

Где:	**Было:**	**Должно быть:**
с.4, левая колонка, 6-я строка снизу	немного	намного
с.7, левая колонка, 11-я строка снизу	таких	малых
с.9, правая колонка, последний абзац	E_1 = 85 МэВ/нуклон	E_1 = 8,5 МэВ/нуклон
с.10, левая колонка, 2-й абзац	$\rho_{ср} \sim 5 \cdot 10^{30}$ г/см^3	$\rho_{ср} \sim 5 \cdot 10^{-30}$ г/см^3
с.10, левая колонка, предпоследний абзац	$\frac{c}{H} \sim 10^6$ м	$\frac{c}{H} \sim 10^{26}$ м
с.11, правая колонка, первый абзац	$x = 2$	$x = 1$
с.12, правая колонка, первый абзац	$T_С = T_З \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{l_{СЗ}}{2R_С}\right) = 20T_З = 6000$ К	$T_С = T_З \cdot (4 \cdot 4)^{1/4} \cdot \left(\frac{l_{СЗ}}{2R_С}\right)^{1/2} = 20T_З = 6000$ К